Практические задания

Вначале документа приведены примеры решения практических заданий и список необходимых определений и формул. В конце приведены задания для самостоятельного решения (по вариантам). В задания включены стандартные задачи и задачи повышенной сложности (отмечены звездочкой).
Обязательно необходимо решить стандартные задачи.
Задачи в части «Дифференциальная геометрия» взяты в основном из задачников [6] и [7] и учебника [4].

§ 1. Кривые на плоскости и в пространстве

Пусть задана кривая на плоскости:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \ \ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.1}$$

Ее кривизна k вычисляется по формуле

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Назовем *кругом кривизны* кривой в данной точке M круг, который

1) касается кривой в точке M (т. е. имеет с ней общую касательную в этой точке);

2) направлен выпуклостью вблизи точки M в ту же сторону, что и кривая;

3) имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M.

Если кривая задана уравнениями (1.1), то координаты (ξ, η) центра круга кривизны выражаются формулами

$$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{y}, \quad \eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{x}. \tag{1.2}$$

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее *эволютой.*

Пример 1. Найдем эволюту парболы $y = \dfrac{x^2}{2}$. По формулам (1.2) находим координаты центра кривизны:

$$\xi = -x^3, \quad \eta = 1 + \frac{3}{2}x^2.$$

Это и есть параметрические уравнения эволюты параболы (где x в роли параметра). Исключая из этих уравнений x, получаем

$$\xi^2 = \frac{8}{27}(\eta - 1)^3.$$

Мы видим, что эволютой параболы служит полукубическая парабола (сделайте чертеж!). $\square$

Пусть задана кривая в пространстве

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.3}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Кривая считается гладкой, т. е. функции x, y, z считаются дифференцируемыми необходимое количество раз (можно сразу считать, что это функции класса C^∞).

Кривизна k и *кручение* κ кривой вычисляются по формулам

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}, \quad k = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|^2}. \tag{1.4}$$

Пример 2. Вычислим кривизну и кручение кривой

$$\boldsymbol{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}).$$

Имеем

$$\boldsymbol{r}'(t) = (e^t, \sqrt{2}, -e^{-t}), \quad \boldsymbol{r}''(t) = (e^t, \sqrt{2}, e^{-t}), \quad \boldsymbol{r}'''(t) = (e^t, 0, -e^{-t}). \tag{1.5}$$

Отсюда по формулам (1.4) находим

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t}, \quad \kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}^2 t}. \tag{1.6}$$

$\square$

Введем векторы

$$\tau = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}, \quad \beta = \frac{\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}, \quad \nu = \beta \times \tau. \tag{1.7}$$

Они образуют в каждой точке кривой так называемый *репер Френе*. Вектор τ направлен по касательной, векторы ν и β – единичные векторы *главной нормали* и *бинормали* соответственно.

Имеют место *формулы Френе*:

$$\begin{cases} \dot\tau = & & k\nu, & \\ \dot\nu = & -k\tau & & +\kappa\beta, \\ \dot\beta = & & -\kappa\nu & \end{cases}$$

(в первой формуле считается, что $k \neq 0$).

Пример 3. Найдем репер Френе кривой из примера 2 в точке $t = 0$. На основании формул (1.5) и (1.7) легко находим:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, \sqrt{2}, 1), \quad \nu = \frac{1}{4\sqrt{3}}(2, 2\sqrt{2}, -6), \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{2}, -2, 0). \ \square$$

Формулы

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s)$$

где s – натуральный параметр (длина дуги) называются *натуральными уравнениями* кривой.

Пример 4. Найдем натуральные уравнения кривой из примера 2. Имеем

$$s = \int\limits_0^t |r'(u)| du = \int\limits_0^t \sqrt{2 + e^{2u} + e^{-2u}} du = \int\limits_0^t 2 \operatorname{ch} u = 2 \operatorname{sh} t.$$

Так как $\operatorname{ch}^2 t = \operatorname{sh}^2 t + 1$, из формул (1.6) получаем натуральные уравнения

$$k = \kappa = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 4}. \ \square$$

§ 2. Поверхности

Пусть задана поверхность

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

Касательная плоскость к поверхности в точке M проходит через эту точку параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Единичный вектор нормали

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}.$$

Этот вектор определен однозначно с точностью до направления. Выбор направления задает ориентацию поверхности.

Первой квадратичной формой поверхности называется форма

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u), \quad F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u), \quad G = (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v).$$

Матрица первой квадратичной формы:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением

$$z = z(x, y),$$

то

$$E=\frac{1+z_x^2}{1+z_x^2+z_y^2},\quad F=\frac{z_xz_y}{1+z_x^2+z_y^2},\quad G=\frac{1+z_y^2}{1+z_x^2+z_y^2}.$$

Пример 5. Найдем первую квадратичную форму эллиптического параболоида

$$2z=x^2+y^2.$$

Имеем $z_x=x$, $z_y=y$, откуда

$$ds^2=(1+x^2)dx^2+2xy\,dx\,dy+(1+y^2)dy^2.\ \square$$

Угол α между кривыми

$$u=u_1(t),\ \ v=v_1(t)\quad \text{и}\quad u=u_2(t),\ \ v=v_2(t)$$

в точке M, в которой кривые пересекаются, вычисляется по формуле

$$\cos\alpha=\frac{E\dot u_1\dot u_2+F\dot u_1\dot v_2+F\dot v_1\dot u_2+G\dot v_1\dot v_2}{\sqrt{E\dot u_1^2+2F\dot u_1\dot v_1+G\dot v_1^2}\sqrt{E\dot u_2^2+2F\dot u_2\dot v_2+G\dot v_2^2}}.$$

Производные берутся в той же точке.

Площадь области D на поверхности вычисляется по формуле

$$S(D)=\iint\limits_{D'}\sqrt{EG-F^2}du\,dv,$$

где D' – прообраз области D на плоскости (u,v).

Второй квадратичной формой поверхности называется форма

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$

где

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

В частности, если поверхность задана уравнением

$$z=z(x,y),$$

то
$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

Пример 6. Найдем вторую квадратичную форму эллиптического параболоида
$$2z = x^2 + y^2.$$

Имеем
$$z_x = x, \quad z_y = y, \quad z_{xx} = 1, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 1,$$
откуда получаем выражение для второй квадратичной формы:
$$\frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \ \square$$

Нормальным сечением поверхности в точке M назывпается линия пересечения поверхности с произвоьной плоскостью, проходящей через нормаль ак поверхности в точке M. Пусть ν – орт главной нормали некоторого нормального сечения в точке M. Кривизну такого сечения будем обозначать через k_n, считая, что $k_n > 0$, если $\nu = \boldsymbol{n}$ и $k_n < 0$, если $\nu = -\boldsymbol{n}$. Можно доказать, что либо существуют два взаимно ортогнальных направления, в которых k_n принимает экстремальные значения:
$$k_1 = \min k_n, \quad k_2 = \max k_n,$$
либо кривизна всех нормальных сечений одинакова. В последнем случае точка M называвается *омбилической*. Величины k_1 и k_2 назыываются *главными кривизнами* поверхности в точке M.

Если нормальное сечение образует угол φ с первым главным направлением, то для кривизны этого сечения имеет место *формула Эйлера*:
$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Прозведение главных кривизн
$$K = k_1 k_2$$
называется *гауссовой кривизной* поверхности, их полусумма
$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
– *средней кривизной.*

Имеют место формулы
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Если поверхность задана как график функции
$$z = z(x, y),$$

то

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{(1+z_x^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{yy}}{(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}}. \tag{2.1}$$

Точка на поверхности называется *эллиптитической*, если $K > 0$; *гиперболической*, если $K < 0$; *параболической*, если $K = 0, H \neq 0$; *точкой уплощения*, если $k = H = 0$. Омбилические точки характеризуются условием $K = H^2$. и подразделяются на точки уплощения и шаровые точки, в которых $K = H^2 > 0$. Поверхность называется *минимальной*, если во всех ее точках $H = 0$. Поверхность называется *развертывающейся*, если во всех ее точках $K = 0$.

Пример 7. Найдем гауссову кривизну эллиптического параболоида

$$2z = x^2 + y^2.$$

Имеем $z_x = x, z_y = y, z_{xx} = z_{yy} = 1, z_{xy} = 0$, откуда

$$K = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Так как $K > 0$, все точки этой поверхности – эллиптические. □

Пример 8. Найдем среднюю кривизну поверхности

$$z = \ln\cos y - \ln\cos x.$$

Имеем

$$z_x = \operatorname{tg} x \quad z_y = -\operatorname{tg} x, \quad z_{xx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad z_{xy} = 0, \qquad z_{yy} = -\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Подставляя в (2.1), получаем $H = 0$. Данная поверхность – минимальная. □

Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если в каждой своей точке она имеет главное направление. Линии кривизны определяются из дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dvdu & du^2 \\ E & G & G \\ L & N & N \end{vmatrix} = 0.$$

Оба семейства координатных линий $u = \mathrm{const}$ и $u = \mathrm{const}$ являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $F = 0$ и $M = 0$.

Пусть (g_{ij}) – матрица первой квадратичной формы. Рассмотрим тогда матрицу (g^{ij}), обратную к (g_{ij}):

$$g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

Тогда *символы Кристоффеля* вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2}g^{lj}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

(формулы Кристоффеля).

Запишем те же формулы более подробно:

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \dfrac{1}{2} E_u,\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \dfrac{1}{2} E_v;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \dfrac{1}{2} E_u,\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \dfrac{1}{2} E_v;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \dfrac{1}{2} E_u,\\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \dfrac{1}{2} E_v;\end{cases}$$

Если поверхность задана как график функции

$$z = z(x, y),$$

то символы Кристоффеля вычисляются по формулам

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1 = \dfrac{z_x z_{xx}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \dfrac{z_x z_{xy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \dfrac{z_x z_{yy}}{1 + z_x^2 + z_y^2},\\ \Gamma_{11}^2 = \dfrac{z_y z_{xx}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \dfrac{z_y z_{xy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \dfrac{z_y z_{yy}}{1 + z_x^2 + z_y^2}.\end{cases}$$

Пример 9. Пусть поверхность представляет собой эллиптический параболоид (см. пример 5)

$$2z = x^2 + y^2.$$

Вычисляем производные:

$$z_x = x, \quad z_y = y, \quad z_{xx} = 1, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 1.$$

Значит,

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{y}{1 + x^2 + y^2},$$

а $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \quad \square$.

Имеет иместо *формула Гаусса*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}$$

и *формулы Петерсона–Кодацци*

$$(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-(EN-FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0,$$

Геодезическая кривизна кривой $r = r(t)$ на поверхности вычисляется по формуле

$$k_g = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}', \boldsymbol{n}),$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектот нормали к поверхности.

Пусть $r = r(u,v)$ и $u = u(t), v = v(t)$ – уравнения кривой в окрестности этой точки.

Обозначим

$$A = \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2,$$

$$B = \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2.$$

Тогда для геодезической кривизны имеем формулу

$$k_g = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{3/2}}(\ddot{u}\dot{v} - \ddot{v}\dot{u} + A\dot{v} - B\dot{u}).$$

Кривая на поверхности называется *геодезической*, если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю. Уравнения геодезической

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

причем

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0,$$

$$\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0.$$

Имеют место следующие утверждения.

Для того, чтобы кривая была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее главная норималь в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадала с нормалью к поверхности.

Через каждую точку на поверхности в любом напрвлении можно провести геодезическую, причем ровно одну.

§ 3. Векторные и тензорные поля

См. [3].

§ 4. Тензор кривизны

Текнзор типа (3, 1) с координатами

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js}$$

называется *тензором кривизны.*

Рассмотрим поверхность в $\mathbb{R}^3$. Всегда можно так выбрать систему координат, что в окрестности данной точки эта поверхность будет задана уравнением

$$z = z(x, y).$$

Для компонент тензора кривизны справедливы выражения

$$\begin{pmatrix} R^2_{211} & R^2_{212} \\ R^1_{121} & R^1_{122} \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь K – гауссова кривизна. Всегда

$$\begin{pmatrix} R^2_{211} & R^2_{212} \\ R^1_{121} & R^1_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2_{121} & -R^2_{122} \\ -R^1_{211} & -R^1_{212} \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Остальные кооординаты равны нулю. Кроме того,

$$R_{1122} = R_{2211} = K \det g, \quad R_{1212} = R_{2121} = -K \det g, \tag{4.2}$$

остальные $R_{lijk} = 0$. Здесь $\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Пример 8. Вычислим тензор кривизны эллиптического параболоида из примеров 5, 6 и 7. Вычисление по формулам (4.1) дает

$$\begin{pmatrix} R^2_{211} & R^2_{212} \\ R^1_{121} & R^1_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2_{121} & -R^2_{122} \\ -R^1_{211} & -R^1_{212} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + x^2 & xy \\ xy & 1 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, на основании (4.2) получаем

$$R_{1122} = R_{2211} = -R_{1212} = -R_{2121} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)}. \ \square$$

Поверхность может быть задана параметрически. Выражения кооординат тензора кривизны через гауссову кривизну и коэффициенты первой квадратичной формы задаются теми же формулами (4.1).

Согласно общему правилу ковариантного дифференцирования тензоров (см. [1], [2], [3]), ковариантная производная тензора кривизны вычисляется по формуле

$$(\nabla_m R)^l_{ijk} = \frac{\partial R^l_{ijk}}{\partial x^m} + \Gamma^l_{m\alpha} R^\alpha_{ijk} - \Gamma^\alpha_{mi} R^l_{\alpha jk} - \Gamma^\alpha_{mj} R^l_{i\alpha k} - \Gamma^\alpha_{mk} R^l_{ij\alpha}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4\cos t + 3), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(3\cos t - 4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 + z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все нормали к поверхности проходят через одну точку, то поверхность есть сфера или область на сфере.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Найдите эволюту трактрисы

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \qquad y = a\sin t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 3\operatorname{ch} t + 4t, \qquad y = 5\operatorname{sh} t, \qquad z = 4\operatorname{ch} t - 3\,t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 + 6z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все нормали к поверхности проходят через одну прямую, то поверхность есть поверхность вращения или область на такой поверхности.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Найдите эволюту циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(3\cos t - 4), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(4\cos t + 3).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 48z = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что поверхность с первой квадратичной формой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

имеет постоянную гауссову кривизну.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 4

Задача 1. Найдите эволюту гипоциклоиды

$$x = a(2\cos t + \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

Задача 2. На кривой

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = \sin t$$

найдите кривизну и кручение в произвольной точке, а также репер Френе при $t = 0$.

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите теорему Клеро о геодезических на поверхностях вращения: *произведение радиуса на синус угла, образуемого геодезической с меридианом, есть величина постоянная*,

$$r \sin\alpha = \mathrm{const}.$$

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. Найдите эволюту логарифимической спирали

$$r = e^{\varphi}.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 13e^t \cos t, \quad y = e^t(5\sin t + 12), \quad z = e^t(12\sin t - 5).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4.* Докажите, что геодезические на поверхностях с первой квадратичной формой

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2)$$

(эти поверхности называются поверхностями Лиувилля) находятся в квадратурах.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1,1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

Задача 5. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

ВАРИАНТ 6

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = a[2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t], \quad y = a[2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t].$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 13\operatorname{ch} t, \quad y = 5\operatorname{sh} t - 12t, \qquad z = 12\operatorname{sh} t + 5\,t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4z^2 = 24.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 5. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 6*. Постройте три линейно независимых векторных поля на трехмерной сфере $\boldsymbol{S}^3$.

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 7

Задача 1. Найдите эволюту циссоиды

$$y^2(2a-x)=x^3.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x=5e^t\cos t,\qquad y=e^t(4\sin t+3),\qquad z=e^t(3\sin t-4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2-4xy+2y^2-z^2+24=0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Сеть линий на поверхности называется *сетью Чебышева* , если в каждом образованном ею криволинейном четырехугольнике противоположные стороны имеют одинаковые длины. Например, нити куска ткани, натянутого на поверхность, образуют на ней чебышевскую сеть.

Доказать, что если в сети Чебышева на поверхности S одно семейство нитей состоит из геодезических, то поверхность S – развертывающаяся.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X,Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2=du^2+\cos^2 u\,dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1,1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 8

Задача 1. Найдите эволюту астроиды

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 5\mathrm{ch}\, t + 12t, \quad y = 13\mathrm{sh}\, t, \quad z = 12\mathrm{ch}\, t - 5\, t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6z^2 + 24 = 0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 5. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 6*. Постройте семь линейно независимых векторных полей на семимерной сфере $\boldsymbol{S}^7$.

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 5 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 9

Задача 1. Найдите эволюту кривой

$$x = 2\cos t + (2t+3)\sin t, \quad y = 2\sin t - (2t+3)\cos t.$$

Задача 2. На кривой

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2 \quad (t > 0)$$

найдите кривизну и кручение в произвольной точке, а также репер Френе при $t = 0$.

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4z^2 + 24 = 0.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если минимальная поверхность является поверхностью вращения, то она либо плоскость, либо катеноид.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1,1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 10

Задача 1. Найдите эволюту эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 5\mathrm{ch}\, t + 12\mathrm{sh}\, t, \quad y = 13t, \quad z = 12\mathrm{ch}\, t - 5\mathrm{sh}\, t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если все точки поверхности – омбилические, то поверхность есть область на сфере или на плоскости.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 11

Задача 4. Найдите эволюту гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4\cos t + 3), \quad y = 5e^t \sin t, \quad z = e^t(3\cos t - 4).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите теорему Бельтрами–Эннепера: *если асимптотические линии различных семейств имеют в их общей точке отличные от нуля кривизны, то они имеют равные по величине, но противоположные по знаку кручения; абсолютная величина кручения равна абсолютному значению гауссовой кривизны поверхности в данной точке.*

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 12

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных кординатах

$$r = \sqrt{2} + \cos\varphi + \sin\varphi.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 3\operatorname{ch} t + 4\operatorname{sh} t, \quad y = 5t, \quad z = \operatorname{ch} t - 3\operatorname{sh} t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 3z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. 1) Пусть на гладкой поверхности в двух точках прижимается и натягивается нерастяжимая нить. В результате нить займет положение на поверхности вдоль некоторой кривой. Докажите, что эта кривая – геодезическая.

2) Пусть по гладкой поверхности без трения передвигается материальная точка. В начальный момент времени точка имеет некоторую скорость и продолжает движение по инерции. Никакие внешние силы на точку не действуют (можно это представлять себе как движение маленького магнита по гладкой железной поверхности). Докажите, линия движения точки — геодезическая.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 13

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных кординатах

$$r = \sqrt{2} + \cos\varphi + \sin\varphi.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(5\cos t - 12t), \quad y = 13e^t \sin t, \quad z = e^t(12\cos t + 5t).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 2z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Метрика пространства-времени в окрестности точечной массы имеет вид

$$ds^2 = \frac{\rho - 1}{\rho} dt^2 - \frac{\rho}{\rho - 1} d\rho^2 - \rho^2(d\psi^2 + \cos^2\psi d\varphi^2).$$

Составить уравнение пространственно-временной траектории (геодезической с $ds^2 > 0$), лежащей в плоскости $\psi = 0$; решить его для случая круговой орбиты ($\rho = \mathrm{const}$). При каких ρ круговая орбита возможна? Каков период обращения (по времени t и по собственному времени s спутника)?

За единицу длины взят гравитационный радиус; единица времени выбрана так, чтобы скорость света $c = 1$.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 14

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных кординатах

$$r = a(1 + \sin\varphi).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 7\mathrm{ch}\, t + 24\mathrm{sh}\, t, \quad y = 25t, \quad z = 24\mathrm{ch}\, t - 7\mathrm{sh}\, t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 3z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Вычислите гауссову кривизну поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1,1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

.

ВАРИАНТ 15

Задача 1. Найдите эволюту кривой, заданной в полярных кординатах

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = e^t(4\cos t + 3\sin t), \quad y = 5e^t, \quad z = e^t(3\cos t - 4\sin t).$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 24z = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

то гауссова кривизна поверхности

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \ln\lambda.$$

где Δ – оператор Лапласа.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 3 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

ВАРИАНТ 16

Задача 1. Найдите эволюту гиперболы

$$xy = a^2.$$

Задача 2. Найдите натуральные уравнения кривой

$$x = 7\mathrm{ch}\, t + 24t, \quad y = 25\mathrm{sh}\, t, \quad z = 24\mathrm{ch}\, t - 7\, t.$$

Задача 3. Вычислите гауссову кривизну поверхности

$$2x^2 + 4xy - y^2 + z^2 = 12.$$

Найдите пределы изменения гауссовой кривизны. Найдите точки, в которых гауссова кривизна принимает экстремальные значения.

Задача 4*. Докажите, что если если координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны, то уравненния Петерсона–Кодацци принимают вид

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u,$$

где H – средняя кривизна поверхности.

Задача 5. Вычислите коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y (задача 1 из [3]).

Задача 6. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найдите ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определите кооординаты тензоров S и R, полученных опусканием и подниманием индексов из тензора T. Определите ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$ (задача 2 из [3]).

Задача 7. Найдите компоненты R^l_{ijk} и R_{lijk} тензора кривизны поверхности из задачи 3. Систему координат выберите самостоятельно.

Задача 8*. Вычислите тензор кривизны из задачи 6 и ковариантную производную этого тензора в направлении поля X.

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.

[2] Ю. И. Димитриенко, *Тензорное исчисление*, Высшая школа, М., 2001.

[3] А. Н. Щетинин, Е. А. Губарева, *Основы тензорного анализа*, Изд-во МГТУ, М., 2012.

[4] А. В. Погорелов, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Изд-во Харьковского ун-та., Харьков, 1961.

[5] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

[6] Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин, *Сборник задач по высшей математике. ТТ. 1, 2*, Физматлит, М., 1958.

[7] Э. Р. Розендорн, *Задачи по дифференциальной геометрии*, Изд-во МГУ, М., 1969.