1. Определение двойного интегр. и его основ. свойства. Теорема о среднем. Классы интегрир. функций двух переменных.

Пусть произвольная функция f(x,y) определена всюду на замкнутой квадрируемой области D. Т.е. D-фигура, ограниченная простой замкнутой кривой и эта фигура имеет площадь. Разобьем область D при помощи конечного числа спрямляемых кривых на n частичных областей Di. Площадь области Di обозначим через ΔDi.

Свойства частичных областей Di :

1)Каждая точка области D будет принадлежать хотя бы одной из областей Di

2) Каждая из областей Di квадрируема(имеет площадь)

3)Примем, что области Di и Dj ($i\neq j$) могут иметь общими только граничные точки.

Разбиение области D(T(Di)) будем называть правильным(допустимым).

В каждой области Di выберем точку $p_i(\xi_i,\eta_i)$ и составим интегральную сумму $\sigma={}_{i=1}\Sigma^n f(p_i)*\Delta D_i$ (1)

Определение 1. Диаметром области D называется точная верхняя грань расстояний межлу любыми 2-мя точками этой области Δ_i=diamD_i>=0. $\Delta=\sup\{\Delta_i\}$.

Определение 2. Число I называют пределом интегральной суммы(1) при $\Delta\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$, найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое что для любого $\Delta<\delta$ и независимо от выбора точек p_i в D_i: $|\sigma-I|<\varepsilon$. Если данный предел конечен, то функция интегрируема по Риману, а предел называется двойным интегралом в области D: $I={}_D\iint F(p)dD={}_D\iint f(x,y)dxdy$.

Свойства. 1. Аддитивность: ${}_D\iint f(x,y)dxdy={}_{D1}\iint f(x,y)dxdy+{}_{D2}\iint f(x,y)dxdy$. D_1,D_2 - связные, но не имеющие общих точек по области D.

Линейные:

2. ${}_D\iint[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dxdy=\alpha_D\iint fdxdy+\beta_D\iint gdxdy$, если f(x,y) и g(x,y) интегрируемы в D, а α и β – любые вещественные числа.

3. Если f(x,y) и g(x,y) интегрируемы в D, то произведение f*g так же интегрируемо в этой области.

4. Если f(x,y) и g(x,y) интегрируемы в D и всюду $f(x,y)\leq g(x,y)$, то ${}_D\iint f(x,y)dxdy\leq{}_D\iint g(x,y)dxdy$.

5. Если f(x,y) интегрируема, то |f(x,y)| тоже интегрируема, причем $|{}_D\iint f(x,y)dxdy|\leq{}_D\iint|f(x,y)|dxdy$. (обратное неверно)

6. Геометрическое: ${}_D\iint 1\ dxdy=\Delta D$, где ΔD- площадь области D. $\sigma(T,\xi_i)={}_{i=1}\Sigma^n f(p_i)*\Delta D_i=\Sigma\Delta D_i=\Delta D$ – формула нахождения площади плоскостей.

Теорема (о среднем). Если f(x,y) и g(x,y) интегрируемы в D и $g(x,y)\geq 0$ (≤ 0) всюду в D, M и m – точные верхняя и нижняя грани f(x,y) в D, то найдется число μ: $m\leq\mu\leq M$, что ${}_D\iint f(x,y)*g(x,y)dxdy=\mu_D\iint g(x,y)dxdy$.

Классы интегрируемых функций:

Теорема1: Всякая непрерывная в области D функция f(x,y) интегрируема в этой области.

Док-во: т.к. функция непрерывна в замкнутой обл., то по теореме Кантора она равномерно непрерывна в этой области. Тогда по определению: для любого $\varepsilon>0$, найдется $\delta>0$: для любого $T(\Delta<\delta)$; $w_i<\varepsilon$: ${}_{i=1}\Sigma\Delta D_i=\varepsilon\Delta D$. Т.е выполняется достаточное условие интегрируемости.

Теорема2:Если функция f(x,y) ограничена в области D и имеет в этой области разрывы лишь в конечном числе спрямляемых кривых, то f интегрируема в этой области.**РИС.**

Док-во: следует из «множество точек разрыва имеет площадь=0»

2. Сведение двойного интеграла к повторному.

Теорема 1 (случай прямоугольной области). Пусть функция f(x,y) задана в прямоугольной области D=[a,b]*[c,d] и в этой области существует ${}_D\iint f(x,y)dxdy$. Пусть для каждого x из [a,b] существует одномерный интеграл $I(x)={}_c\int^d f(x,y)dy$, тогда существует повторный интеграл ${}_a\int^b I(x)dx={}_a\int^b dx_c\int^d f(x,y)dy$ и справедливо равенство: ${}_D\iint f(x,y)dxdy={}_a\int^b dx_c\int^d f(x,y)dy$

Доказательство. Разобьем прямоугольник D с помощью точек: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $c=y_0<y_1<\ldots<y_p=d$ на n*p частичных прямоугольников $D_{ik}=[x_{i-1},x_i]*[y_{k-1},y_k]$ положим $\Delta x=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y=y_k-y_{k-1}$. M_{ik} и m_{ik} – точные грани f(x,y) на этом прямоугольнике, тогда $m_{ik}\leq f(x,y)\leq M_{ik}$. Пусть $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$- произвольная точка, тогда $m_{ik}\leq f(\xi_i,y)\leq M_{ik}$. Проинтегрируем его по y на $[y_{k-1},y_k]$. $m_{ik}\Delta y_k\leq{}_{yk-1}\int^{yk}f(\xi_i,y)dy\leq M_{ik}\Delta y_k$. Просуммируем по всем k от 1 до p, умножим на Δx_i и проссумируем по i от 1 до n. ${}_{i=1}\Sigma^n{}_{k=1}\Sigma^p m_{ik}\Delta y_k\,\Delta x_i\leq{}_{i=1}\Sigma^n I(\xi_i)*\Delta x_i\leq{}_{i=1}\Sigma^n{}_{k=1}\Sigma^p M_{ik}\Delta y_k\,\Delta x_i$. Пусть наиб диаметр частичной области стремится к 0, тогда левые и правые части будут стремится к двойному интегралу ${}_D\iint f(x,y)dxdy$, значит существует предел и средней части неравенства, который равен такому же интегралу. По определению этот интеграл равен ${}_a\int^b I(x)dx={}_a\int^b dx_c\int^d f(x,y)dy=$ ${}_a\int^b({}_c\int^d f(x,y)dy)dx$.

Замечание: в теореме x и y можно менять местами.

Теорема 2 (случай произвольной области). Пусть выполнены условия: 1. Обл D – ограничена, замкнута и любая прямая, параллельная оси OY, пересекает границу области не более чем в 2-х точках ($y_1(x)\leq y_2(x)$-точки пересечения). 2. Для f(x,y) существует ${}_D\iint f(x,y)dxdy$ и для любого x из области D существует однократный интеграл ${}_{y1(x)}\int^{y2(x)}f(x,y)dy$. Тогда существует повторный интеграл ${}_a\int^b dx_{f1(x)}\int^{f2(x)}f(x,y)dy$, где a и b- наименьшая и наибольшая абсциссы в области D. При этом справедливо: ${}_D\iint f(x,y)dxdy={}_a\int^b dx_{f1(x)}\int^{f2(x)}f(x,y)dy$ (1)

Доказательство. Обозначим через R прямоугольник со сторонами параллельных координатным осям, содержащий в себе область D, а через F(x,y) функцию, совпадающую с f(x,y) в точках обл D, и равную нулю в остальных точках прямоугольника R. Для F(x,y) выполняются все условия теоремы, значит справедлива формула: ${}_R\iint f(x,y)dxdy={}_a\int^b dx_c\int^d F(x,y)dy$. Пусть [a,b] - проекция обл.D на ось OX.

т.к. вне обл.D F(x,y)=0, то формула переходит в формулу(1)

Замечание: Если область не удовлетворяет условиям теоремы, то данную область можно разделить на подобласти, где условия выполняются.

3. Тройной интеграл, сведение его к повторному.

Пусть функция f(x,y,z) определена всюду в замкнутой кубируемой области V. Разобьем область V на конечное число R замкнутых частичных областей Vi. Каждая из этих областей Vi будет кубируема. Обозначим обьем этой области через ΔVi. Полученное разбиение обозначим через T(Vi). **Свойства T(Vi):** каждая точка области V будет принадлежать хотябы одной из областей Vi, включая границы, все области Vi будут кубируемы (иметь обьем) и любая из областей Vi и Vj ($i\neq j$) могут иметь общими только граничные точки. В каждой частичной области Vi выберем точку $p_i=(x_i,y_i,z_i)$.

Определение 1. Число $\sigma={}_{i=1}\Sigma^n f(p_i)*\Delta V_i$ называют интегральной суммой функции f(x,y,z), соответствующей разбиению T(Vi) области V на частичные подобласти V_i и данному выбору промежуточных точек p_i.

Определение 2. Число I называют пределом интегральных сумм при $\Delta\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$, найдется $\delta>0$ такое что для любого $\Delta<\delta$ и независимо от выбора точек p_i в V_i: $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Определение 3. Функция f(x,y,z) называется интегрируемой по Риману в V, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta\to 0$. Этот предел I называют тройным интегралом в области V: $I={}_V\iiint f(p)dV={}_V\iiint f(x,y,z)dxdydz$.

Классы интегрируемых функций.

1.Всякая непрерывная в замкнутой области V функция f(x,y,z) интегрируема в этой области.

2.Если функция f(x,y,z) ограничена в области V и имеет в

3. этой области разрывы лишь в конечном числе поверхности объёма=0, то функция интегрируема в этой области.

Вычисление тройного интеграла. Пусть V проектируется на плоскость XY в область D.

${}_V\iiint f(x,y,z)dxdydz={}_e\int^h dz_D\iint f(x,y,z)dxdy={}_e\int^h dz_a\int^b dx_c\int^d f(x,y,z)dy$.

Пусть f (x,y,z) непрерывна в V и пусть поверхностьть S, ограничивающая V пересекается не более чем в 2-х точках любой прямой, параллельной одной из координатных осей ${}_V\iiint f(x,y,z)dxdydz={}_a\int^b dx_{\varphi 1(x)}\int^{\varphi 2(x)}dy_{\psi 1(x,y)}\int^{\psi 2(x,y)}f(x,y,z)dz$.(2)

Здесь: 1. Тело V проектируется на плоскость XY в область D. 2. Линии касания поверхности S и цилиндр поверхности, которая проектирует тело V на XY, разбивает S на 2 части, которые опредяются функциями $z_1=\psi_1(x,y)$, $z_2=\psi_2(x,y)$. 3. Спроектируем кривую, ограничивающую D на плоскость XY. Точки a и b, в которых прямые, параллельные Y, разбивают область на 2 части $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$. a и b - пределы интегрирования по x. Далее доказательство формулы (2) аналогично двойному интегралу.(вопрос 2 теор2)**РИС.**

4. Замена переменных в двойном интеграле. Пример: случай полярных координат.

Пусть задано регулярное отображение переменных (U,V)->(x,y), задающееся системой уравнений {x=x(U,V); y=y(U,V)} (1) и пусть это отображение переводит некоторую замкнутую область G с кусочно-гладким контуром L’ в область D с кусочно-гладким контуром L. Задание пары значений $(U,V)\in G$ однозначно определяют некую точку $(x,y)\in D$ и обратно. Таким образом числа U,V можно рассматривать как координаты точек области D. Таким образом система уравнений (1) вводит на плоскости (x,y) новые (криволинейные) координаты.

Теорема. Если отображение {x=x(U,V); y=y(U,V) переводит замкнутую область G в замкнутую область D, то если существует $_D\iint f(x,y)dxdy$, то имеет место формула $_D\iint f(x,y)dxdy={}_G\iint[f(x(U,V), y(U,V))*|D(x,y)/D(U,V)|]dUdV$.

Доказательство. Разобьем фигуру G на n частичных областей G_i. В каждой области D_i фигуры D выберем точку $P_i(x_i,y_i)$. Составим интегральную сумму $\sigma_n= {}_{i=1}\sum^n [f(x_i,y_i)]\Delta D_i= {}_{i=1}\sum^n f(P_i)\Delta D_i$. Пусть $Q_i=(U_i,V_i)$ есть образ точки P_i при обратном преобразовании {U=U(x,y); V=V(x,y).

4. 3fgbitv $\sigma_n={}_i\sum[f(x_i(U,V),y_i(U,V))]\Delta D_i\Delta G_i/\Delta G_i$ При этом для $\rho=[\Delta U^2+\Delta V^2]^{1/2}$ –диаметр области G_i ,при $\varepsilon>0$ будет выполняться $|\Delta D_i/\Delta G_i -|I(U_i,V_i)||< \varepsilon$ (2). При этом найдется такое разбиение $T(\Delta D_i)$, что будет выполняться это равенство. Раскрывая (2) представим $\Delta D_i/\Delta G_i =|I(U_i,V_i)| + \alpha_i$, где$0< \alpha_i<\varepsilon$. Тогда $\sigma_n={}_i\sum[f(x_i(U,V),y_i(U,V))]|I(U_i,V_i)|\Delta G_i+ {}_i\sum[f(x_i(U,V),y_i(U,V))]\alpha_i\Delta G_i=\sigma_1+\sigma_2$. Оценим σ_2: т.к. f ограничена на D, т.е. $\exists M$ $|f|<M$ на D, то $|\sigma_2|<M\varepsilon*{}_i\sum\Delta D_i= M\varepsilon\Delta D$. $Lim|\sigma_2|$->0 при Δ->0. Ввиду непрерывности функции (1) max{diam(D_i)}->0. Отсюда следует, что $\lim_{i=1}\sum^n [f(x_i,y_i)]\Delta D_i= \lim_{i=1}\sum^n[f(x_i(U,V),y_i(U,V))]|J(U_i,V_i)|\Delta G_i<\xi$. ***РИС.***

Полярные координаты. Задаются полярным радиусом r, выходящим из начала координат в точку M(x,y) и имеющим с осью x угол φ. Таким образом на плоскости (x,y) регулярное отображение: {$x=r\cos\varphi;y=r\sin\varphi$ и обратное ему {$r=[x^2+y^2]^{1/2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}(y/x)$. Якобиан отображения $J(r,\varphi)=D(x,y)/D(r,\varphi)=|\partial x/\partial r,\ \partial x/\partial\varphi;\ \partial y/\partial r,\ \partial y/\partial\varphi|=|\cos\varphi,\ -r\sin\varphi;\ \sin\varphi,\ r\cos\varphi|=r$.

5. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры: случай цилиндрических и сферических координат.

Пусть задано регулярное отображение переменных (U,V,W)->(x,y,z), задающееся системой уравнений {x=x(U,V,W); y=y(U,V,W); z=z(U,V,W)} (1) и пусть это отображение переводит некоторую замкнутую пространственную замкнутую область G в замкнутую область D. Регулярное отображение является взаимообратным: {U=U(x,y,z); V=V(x,y,z); W=W(x,y,z)}(2), [D(U,V,W)/D(x,y,z)]*[D(x,y,z)/D(U,V,W)] =1. Задание пары значений $(U,V,W)\in G$ однозначно определяют некую точку $(x,y,z)\in D$ и обратно. Таким образом числа U,V,W можно рассматривать как координаты точек области D. Таким образом система уравнений (1) вводит на плоскости (x,y) новые (криволинейные) координаты.

Теорема. Если отображение {x=x(U,V,W); y=y(U,V,W); z=z(U,V,W) переводит замкнутую область G в замкнутую область D, то если существует $_D\iiint f(x,y,z)dxdydz$, то имеет место формула $_D\iiint f(x,y,z)dxdydz={}_G\iiint[f(x(U,V,W), y(U,V,W), z(U,V,W))*|D(x,y,z)/D(U,V,W)|]dUdVdW$.

$\Delta D= {}_G\iiint|\partial(x,y,z)/\partial(U,V,W)|\ dUdVdW$

Доказательство. Доказательство аналогично двойному интегралу.(4 билет)

5. Цилиндрические координаты. Задаются радиус-вектором r, выходящим из начала координат плоскости (x,y) в проекцию M(x,y) точки M(x,y,z), имеющим с осью x угол φ и координатой z. Таким образом в пространстве (x,y,z) задается регулярное отображение: {$x=r\cos\varphi;y=r\sin\varphi;\ z=z$} и обратное ему {$r=[x^2+y^2]^{1/2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}(y/x)$; z=z}. Якобиан отображения $J(r,\varphi,z)=D(x,y,z)/D(r,\varphi,z)=|x_r’,x_\varphi’,x_z’;\ y_r’,y_\varphi’,y_z’;\ z_r’,z_\varphi’,z_z’|=|\cos\varphi,\ -r\sin\varphi,\ 0;\ \sin\varphi,\ r\cos\varphi,0;\ 0,0,1|=r$.

Сферические координаты. Задаются радиус-вектором r, выходящим из начала координат в точку M(x,y,z), причем в плоскости (x,y) проекция радиус-вектора указывает проекцию M(x,y) точки M(x,y,z), а z-ая координата задается тем же радиусом, отстающим от оси z на угол θ. Таким образом в пространстве (x,y,z) задается регулярное отображение: {$x=r\cos\varphi\sin\theta;\ y=r\sin\varphi\sin\theta;\ z=z\cos\theta$} и обратное ему {$r=[x^2+y^2+z^2]^{1/2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}(y/x)$; $\theta=\mathrm{arctg}([x^2+y^2]^{1/2}/z)$. Пределы изменения углов: $\pi\geq\theta\geq0$, $2\pi\geq\varphi\geq0$, $+\infty>r\geq0$. Якобиан отображения $J(\varphi,\theta,r)=D(x,y,z)/D(\varphi,\theta,r)=|x_\varphi’,x_\theta’,x_r’;\ y_\varphi’,y_\theta’,y_r’;\ z_\varphi’,z_\theta’,z_r’|= |-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi;\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi;\ 0,\ -r\sin\theta,\ \cos\theta|= -r^2\sin\theta$.

6. Вычисление площади гладкой поверхности, заданной параметрически и в явном виде.

Пусть z=f(x,y) - гладкая поверхность, задаваемая функцией S класса C^1. Пусть $M_i=(x_i,y_i,z_i)$, $z_i=f(x_i,y_i)$ - точки поверхности. Уравнение нормали к поверхности в этой точке: $(x-x_i)/f_x'(x_i,y_i)=(y-y_i)/f_y'(x_i,y_i)=(z-z_i)/(-1)$. Направляющий косинус нормали $\cos\gamma_i=1/[1+(f_x'(x_i,y_i))^2+(f_y'(x_i,y_i))^2]^{1/2}$. (γ_i-острый угол) Пусть область D-проекция S на плоскость OXY. Площадь поверхности S называется число ΔS, получаемое как: 1)Область D разобьем правильным разбиением на n частичных областей D_i. В каждой области D_i выберем произвольно точку $D_i(x_i,y_i)$ 2)В этой точке восстанавливаем перпендикуляр к OXY и получаем точку $M_i=(x_i,y_i,f(x_i,y_i))$3)Проведем касательную плоскость к поверхности в точке M_i. Через ΔSi обозначим площадь куска касательной плоскости, вырезаемой цилиндром с основанием Di и с образующей, параллельной оси OZ: $\Delta Si=\Delta Di/\cos\gamma_i$. 4)Составим интегральную сумму $\sigma={}_{i=1}\sum^n\Delta Si= {}_{i=1}\sum^n[\Delta Di/\cos\gamma_i]= {}_{i=1}\sum^n[1+(f_x'(x_i,y_i))^2+(f_y'(x_i,y_i))^2]^{1/2}\Delta Di$. – интегральная сумма для функции

$[1+(f_x'(x_i,y_i))^2+(f_y'(x_i,y_i))^2]^{1/2}$. 5)пусть характеристика D->0(Δ->0) тогда $\Delta S=\lim {}_{i=1}\sum^n[1+(f_x'(x_i,y_i))^2+(f_y'(x_i,y_i))^2]^{1/2}\Delta Di$. f_x',f_y' непрерывны в D=>$[1+(f_x'(x_i,y_i))^2+(f_y'(x_i,y_i))^2]^{1/2}$ непрерывна в D.

$\Delta S ={}_D\iint[1+(f_x'(x,y))^2+(f_y'(x,y))^2]^{1/2}\ dxdy$; $\Delta S ={}_D\iint[1+(\partial z/\partial x)^2+(\partial z/\partial y)^2]^{1/2}\ dxdy$; $z_i=f(x_i,y_i)$

7. Определение криволинейного интеграла первого рода, его свойства и вычисление.

Пусть на плоскости Ox,y параметрически задана простая незамкнутая спрямляемая кривая кривая L, ограниченная точками A и B и некоторая функция f(x,y), которая определена и непрерывна на множестве L. Параметрическое уравнение кривой: L:$\{x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ a<t<b$. Разобьем [a,b] при помощи точек $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$ на отрезки $[t_{k-1},t_k]$ Каждому значению t_k соответстсвует точка $M_k(x_k,y_k)$, где $x_k=\varphi(t_k)$ и $y_k=\psi(t_k)$. В этом случае разбиению отрезка [a,b] соответствует разбиение кривой L на частичные дуги $M_{k-1}M_k$. Выберем на каждой частичной дуге произвольную точку $N_k=(\xi_k,\eta_k)$; $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$, $\xi_k=\varphi(\tau_k)$ и $\eta_k=\psi(\tau_k)$. Пусть Δl_k – длина дуги $M_{k-1}M_k$. Составим интегральную сумму $\sigma={}_{k=1}\sum^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$ (1).

Определение 1. Число J называется пределом интегральной суммы (1) при $\Delta\to0$, где $\Delta=\max\{\Delta l_k\}$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ и независимо от выбора точек $N_k(\xi_k,\eta_k)$ выполняется неравенство $|\sigma-J|<\varepsilon$.

Определение 2. Если при $\Delta\to0$ $\exists$ конечный предел J интегральных сумм (1), то этот предел называется криволинейным интегралом 1 рода от функции f(x,y) по кривой L обозначение: $_L\int f(x,y)dl$.

определение 3. Кривая L:$\{x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ a<t<b$ назыв. гладкой, если $\varphi(t)$ и $\psi(t)\in C^1[a,b]$, т.е. имеют непрерывные производные.

Определение 4. Точка $M\in L$ назыв. особой, если она соответствует значению параметра t: $\{\varphi'(t)=0;\ \psi'(t)=0;$

Теорема. Если кривая L=AB -гладкая и не содержит особых точек, а функция f(x,y) непрерывна на множестве точек кривой L, то $_L\int f(x,y)dl={}_a\int^b f(\varphi(t),\psi(t))[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt$ (2).

Доказательство. Определенный интеграл в правой части (2) существует, т.к. подынтегральная функция непрерывна. Разобьем отрезок [a,b] на n частичных отрезков и составим интегральную сумму $\sigma={}_{k=1}\sum^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$, где $\Delta l_k={}_{t_{k-1}}\int^{t_k}[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt$. Соответственно и интегральная сумма запишется как $\sigma={}_{k=1}\sum^n\{[f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))]*{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt\}$, $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$. Интеграл в правой части можно записать в виде $J={}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}f(\varphi(t),\psi(t))[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt\}$. Оценим разность σ-J. Т.к. функции φ и ψ непрерывны на [a,b], а f(x,y) непрерывна на L, то по теореме о непрерывности сложной функции, функция $f(\varphi(t),\psi(t))$ будет непрерывна на [a,b]. Пусть $\Delta=\max\{\Delta l_k\}\to0$, тогда $\max\{[t_{k-1},t_k]\}\to0$/ т.о. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что при $\Delta\to\delta$ разность функций $[f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))-f(\varphi(t),\ \psi(t))]<\varepsilon$ из-за непрерыности. Отсюда при $\Delta<\delta$ получаем $|\sigma-J|<\varepsilon*{}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt\}=\varepsilon*{}_a\int^b[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{1/2}dt=\varepsilon\Delta l$, где l – длина L => при $\Delta\to0 \Rightarrow \sigma\to J$.

Свойства. Непсредственно доказываются следующие свойства:

1. $_L\int[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dl=\alpha\,{}_L\int f(x,y)dl+\beta\,{}_L\int g(x,y)dl$.
2. $_{AB}\int f(x,y)dl={}_{AC}\int f(x,y)dl+{}_{CB}\int f(x,y)dl$, $C\in L=AB$.
3. $_L\int|f(x,y)|dl\geq|{}_L\int f(x,y)dl|$.

Если f(x,y) непрерывна на L, то для $\exists M\in L$ справедливо равенство $_L\int f(x,y)dl=f(M)\,\Delta l$

8. Определение криволинейного интеграла второго рода, его свойства и вычисление. Связь с интегралом первого рода.

Пусть вдоль кусочно-гладкой и непрерывной кривой, заданной параметрически L: $\{x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ a<t<b$ определены непрерывные функции P(x,y) и Q(x,y). $\sigma_1=\sum P(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})$ $\sigma_1=\sum Q(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})$.Пусть $\Delta=\max\{\Delta l_k\}$ – характеристика разбиения L.

Определение 1. Число $J_1(J_2)$ называется пределом интегральной сумм $\sigma_1(\sigma_2)$ при $\Delta\to0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ и независимо от выбора промежуточных точек $N_k(\xi_k,\eta_k)$ выполняется неравенство $|\sigma_1-J_1|<\varepsilon$ ($|\sigma_2-J_2|<\varepsilon$).

Определение 2. Если этот предел существует, то он называется криволинейным интегралом 2 рода от функции P(x,y) (Q(x,y)) и обозначается как $_L\int P(x,y)dx$ ($_L\int Q(x,y)dy$). Их сумма называется общим интегралом 2 рода и обозначается как $_L\int[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]$.

Замечание1. Криволинейный интеграл 2 рода зависит от направления, поэтому $_{AB}\int P(x,y)dx=-{}_{BA}\int P(x,y)dx$. Интеграл можно рассматривать и в пространстве.

Замечание2. Для пространственной кривой вводится аналогично 3 криволинейных интеграла 2 рода и общий интеграл имеет вид: $_{AB}\int Pdx+Qdy+Rdz$

Теорема. Пусть праметрически заданная кривая L: $\{x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ a<t<b$ гладкая и не содержит особых точек, а функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны на этой кривой, то $_L\int P(x,y)dx={}_a\int^b[P(\varphi(t),\ \psi(t))*\varphi'(t)]dt$; $_L\int Q(x,y)dy={}_a\int^b[Q(\varphi(t),\ \psi(t))*\ \psi'(t)]dt$ (2).

Доказательство. заметим, что $\Delta x_k={}_{t_{k-1}}\int^{t_k}\varphi'(t)dt$. $\sigma_1={}_{k=1}\sum^n\{[P(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))]*{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}\varphi'(t)dt$, $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$; $J_1={}_a\int^b[P(\varphi(t),\ \psi(t))*\varphi'(t)]dt={}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}[P(\varphi(t),\psi(t))*\varphi'(t)]dt\}$. $|\sigma_1-J_1|=|{}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}\{[P(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))-P(\varphi(t),\psi(t))\}*\ \varphi'(t)dt|<\varepsilon*{}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}|\varphi'(t)|dt\}=\varepsilon*M\,{}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}dt\}=\varepsilon*{}_{k=1}\sum^n\{{}_{t_{k-1}}\int^{t_k}|\varphi'(t)|dt\}=\varepsilon*{}_a\int^b\varphi'(t)dt=\varepsilon*M(a-b)$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ при $\delta\to0$ $\sigma_1\to J_1$. док-во $\sigma_2\to J_2$ аналогично.

Свойства. Криволинейного интеграла 2 рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла 1 рода.

1. $_L\int[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dl=\alpha\,{}_L\int f(x,y)dl+\beta\,{}_L\int g(x,y)dl$.
2. $_{AB}\int f(x,y)dl={}_{AC}\int f(x,y)dl+{}_{CB}\int f(x,y)dl$, $C\in L=AB$.
3. $_L\int|f(x,y)|dl\geq|{}_L\int f(x,y)dl|$.
4. Если f(x,y) непрерывна на L, то для $\exists M\in L$ справедливо равенство $_L\int f(x,y)dl=f(M)*l$

Связь между криволинейным интегралом 1 и 2 рода. Пусть на кривой L взята некоторая точка M. Из точки M проведем касательную к кривой L, которая создаст углы α и β между касательной и осями координат OX и OY. Тогда $dx=\cos\alpha dl$, $dy=\cos\beta dl$ (dl-дифференциал дуги в точке M) и $_L\int[Pdx+Qdy]={}_L\int[P\cos\alpha dl+Q\cos\beta dl]={}_L\int F(x,y)dl$. для пространственной кривой: $_L\int[Pdx+Qdy+Rdz]={}_L\int[P\cos\alpha dl+Q\cos\beta dl+R\cos\gamma dl]$ ($\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma$-направляющие косинусы кривой L

9. Формула Грина.

L- замкнутая крива AB, точки A и Bсовпадают.

Введем понятие ориентированной кривой.

Определение 1. Пусть простая замкнутая кривая L является границей плоской области G. Если при обходе кривой (при возрастании параметра t) область G остается слева (обход совершается против часовой стрелки), то такая ориентация кривой называется положительной (в противном случае - отрицательной).

Определение 2. Криволинейной трапецией называется область D, ограниченная двумя отрезками, параллельными оси x и y и двумя простыми кусочно-гладкими кривыми, взаимно не пересекающимися.

Теорема (формула Грина). Пусть 1) G-плоская область, ограниченная простым кусочно-гладким контуром L. 2) Эту область можно разбить на конечное число криволинейных трапеций. 3) В замкнутой области G заданы непрерывные функции P(x,y) и Q(x,y). Тогда справедлива формула: $_{L+}\int[Pdx+Qdy]={}_G\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]dxdy$ (1).

Доказательство (частный случай). Пусть G-криволинейная трапеция, относительно оси x и y, ограниченная кривой L_1: $\{x=a;\ x=b;\ y=\varphi_1(x);\ y=\varphi_2(x)$ или кривой L2: $\{y=c;\ y=d;\ x=\psi_1(x);\ x=\psi_2(x)$ (данные представления равнозначны). Вычислим двойной интеграл: $_G\iint(\partial P/\partial y)dxdy={}_a\int^b dx\,{}_{\varphi1(x)}\int^{\varphi2(x)}(\partial P/\partial y)dy$. По формуле Ньютона-Лейбница: $_{\varphi1(x)}\int^{\varphi2(x)}(\partial P/\partial y)dy=P(x,y)_{y=\varphi1(x)}|^{y=\varphi2(x)}=P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))$. Теперь окончательное выражение для интеграла запишется как: $_G\iint(\partial P/\partial y)dxdy={}_a\int^b P(x,\varphi_2(x))dx-{}_a\int^b P(x,\varphi_1(x))dx$. Замечая, что $_a\int^b P(x,\varphi_2(x))dx={}_{M7M6M5M4}\int P(x,y)dx$ и $_a\int^b P(x,\varphi_1(x))dx={}_{M8M1M2M3}\int P(x,y)dx$, а так же то, что $_{M8M7}\int P(x,y)dx=0$ и $_{M3M4}\int P(x,y)dx=0$ приходим к выводу, что $_G\iint(\partial P/\partial y)dxdy=-{}_{M8M1M2M3}\int Pdx-{}_{M3M4}\int Pdx-{}_{M4M5M6M7}\int Pdx-{}_{M7M8}\int Pdx=-{}_{L+}\int Pdx$ (2). Аналогичным образом доказывается, что $_G\iint(\partial Q/\partial x)dxdy={}_{L+}\int Qdy$ (3). Вычитая (2) из (3) получим искомое выражение (1).

Доказательство (общий случай). Докажем теорму для общего случая. Пусть область G разбита на подобласти кусочно гладкой кривой и подобласти G_1 и G_2 ориентированы одинаково относительно кривой L. В этом случае $_L\int Pdx={}_{L1}\int Pdx+{}_{L2}\int Pdx$. Пусть G-область общего вида. Разобьем ее на области общего вида (криволинейные трапеции). Для этих областей $_{Gi}\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]dxdy={}_{Li+}\int[Pdx+Qdy]$. Сосчитав все интегралы, а так же пользуясь его аддитивностью получим, что $_G\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]dxdy={}_i\sum{}_{Gi}\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]dxdy={}_{L+}\int[Pdx+Qdy]$.

10. Условие того, что дифференциальная форма от двух переменных является полным дифференциалом, и криволинейный интеграл на плоскости не зависит от пути интегрирования.

Определение. N-связной областью называется связная область, ограниченная N контурами.

Теорема. Пусть P(x,y) и Q(x,y) непрерывны и определены в ограниченной односвязной замкнутой области D. Тогда имеют место следующие утвеждения: 1) ${}_{L}(\oint)$[Pdx +Qdy]=0. 2) ${}_{L}\int$[Pdx +Qdy] не зависит от пути интегрирования. 3) Pdx +Qdy - полный дифференциал некой однозначной функции U: dU= Pdx +Qdy. 4) В области D: $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y$.

Доказательство. Будем проводить по схеме 1=>2=>3=>4=>1. 1) **1=>2.** Если ${}_{L}\int$[Pdx +Qdy]=0, то ${}_{L}\int$[Pdx +Qdy] не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим замкнутую область ACBH. ${}_{ACBH}\int$[Pdx +Qdy]=0; ${}_{ACBHA}\int$[Pdx +Qdy]=${}_{ACB}\int$[Pdx +Qdy]+ ${}_{BHA}\int$[Pdx +Qdy]=${}_{ACB}\int$[Pdx +Qdy] - ${}_{AHB}\int$[Pdx +Qdy]=0 => ${}_{ACB}\int$[Pdx +Qdy]= ${}_{AHB}\int$[Pdx +Qdy]. 2) **2=>3.** Пусть ${}_{L}\int$[Pdx +Qdy] не зависит от пути интегрирования. Требуется доказать, что Pdx +Qdy=dU. Зафиксируем точку A, а точку B сделаем произвольной. ${}_{AB}\int$[Pdx +Qdy]=U(B)=U(x,y). $\partial U/\partial x$=P, $\partial U/\partial y$=Q вычислим $\partial U/\partial x=\lim[(U(x+\Delta x,y)-U(x,y))/\Delta x]=\lim(\Delta U/\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$ есть интеграл от выражения Pdx +Qdy взятый по пути, соединяющем точки B(x,y) и $B_1(x+\Delta x,y)$.

Т.к. по условию этот интеграл не зависит от кривой, то это путь - отрезок прямой. $\Delta U/\Delta x=(1/\Delta x){}_{BB1}\int$[Pdx +Qdy]= $(1/\Delta x){}_{BB1}\int$Pdx+ $(1/\Delta x){}_{BB1}\int$Qdy=$(1/\Delta x){}_{BB1}\int$Pdx=$(1/\Delta x){}_{(x,y)}\int^{(x+\Delta x,y)}$Pdx=(по теореме о среднем)=$(1/\Delta x)P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x$ ($0<\theta<1$). Таким образом $\partial U/\partial x=\lim[P(x+\theta\Delta x,y)]=P(x,y)$ при $\Delta x\to 0$. Аналогично доказывается, что $\partial U/\partial x$=Q(x,y). 3) **3=>4**. Из того, что Pdx +Qdy=dU следует, что $\partial U/\partial y$=Q и $\partial U/\partial x$=P. Поскольку P и Q непрерывные функции, то $\partial Q/\partial x=\partial^2 U/\partial y\partial x=\partial P/\partial y=\partial^2 U/\partial x\partial y$ (теорема о смешанном произведении). 4) **4=>1**. Пусть в области D выполнено условие $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y$ и L-произвольный простой замкнутый контур.

По формуле Грина ${}_{L}(\oint)$[Pdx +Qdy]=0=${}_{G}\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]$dxdy.

Замечание 1. Если D не является односвязной областью, то последнее условие не выполняется.

Замечание 2. Если контур не является самопересекающейся кривой, то D можно разбить на 2 подобласти.

11. Определение поверхностного интеграла 1 рода, его свойства, вычисление.

Пусть имеется некоторая кусочно-гладкая квадрируемая поверхность S, ограниченная гладким контуром. Разобьем поверхность S с помощью сетки кусочно-гладких кривых на части S_i. Обозначим площадь i-ой части через ΔS_i. В каждой части S_i выберем точку M_i с составим интегральную сумму $\sigma={}_{i=1}\sum^n f(M_i)\Delta S_i$ (1). Пусть $\Delta=\max\{diam(S)\}$.

Определение 1. Число J называется пределом интегральной суммы (1) при $\Delta\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma-J|<\varepsilon$.

Определение 2. Если при $\Delta\to 0$ существует (независимо от выбора точек M_i и разбиения поверхности S) конечный предел J интегральной суммы (1), то этот предел называется поверхностным интегралом 1 рода по поверхности S и обозначается как ${}_{S}\iint f(x,y,z)dS={}_{S}\iint f(M)dS$.

Свойства. Непосредственно доказываются следующие свойства:

1. ${}_{S}\iint[\alpha f(M)+\beta g(M)]dS=\alpha{}_{S}\iint f(M)dS+\beta{}_{S}\iint g(M)dS$.
2. ${}_{S}\iint f(M)dS={}_{S1}\iint f(M)dS+{}_{S2}\iint f(M)dS$, $S_1+S_2=S$.
3. Если на поверхности S: m<f(M)<M, то $m\Delta S<{}_{S}\iint f(M)dS<M\Delta S$.
4. Если на поверхности S: f(M)<g(M), то ${}_{S}\iint f(M)dS<{}_{S}\iint g(M)dS$
5. ${}_{S}\iint|f(M)|dS\geq|{}_{S}\iint f(M)dS|$.
6. теорема о среднем:если f(x,y,z) непрерывна,то найдется $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ ${}_{S}\iint f(x,y,z)dS=f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})*\Delta S$.

Теорема. Пусть: 1) S-гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром. 2) f(x,y,z) непрерывная функция по поверхности S. 2) Существует интеграл ${}_{S}\iint f(x,y,z)dS$. Тогда имеет место следующее равенство: ${}_{S}\iint f(x,y,z)dS={}_{\Omega}\iint f(x(U,V),y(U,V),z(U,V))[EG-F^2]^{1/2}dUdV$, где Ω-область на плоскости переменных U и V, которой соответсвуют точки поверхности S при заданных отображениях класса C_1: {x=x(U,V); y=y(U,V); z=z(U,V),

$E=(\partial x/\partial U)^2+(\partial y/\partial U)^2+(\partial z/\partial U)^2$; $G=(\partial x/\partial V)^2+(\partial y/\partial V)^2+(\partial z/\partial V)^2$; $F=(\partial x\partial x/\partial U\partial V)^2+(\partial y\partial y/\partial U\partial V)^2+(\partial z\partial z/\partial U\partial V)^2$.

Доказательство. Пусть разбиению поверхности S на части S_i соответствует разбиение области Ω на части Ω_i. Пусть Δ и Δ' - характеристики разбиения поверхности S и области Ω соответсвенно. Тогда из-за непрерывности функции f, при $\Delta\to 0$ Δ' так же стремится к нулю ($\Delta'\to 0$). Разложим S и Ω на Si и Ωi. В области S_i выберем точку (x_i,y_i,z_i), которой будет соответсвовать точка (U_i,V_i) в области Ω: $\{x_i=x(U_i,V_i);\ y_i=y(U_i,V_i);\ z_i=z(U_i,V_i)$. Составим интегральную сумму $\sigma={}_{i=1}\sum^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$, где $\Delta S_i=[EG-F^2]^{1/2}dUdV$ - элемент площади поверхности S. Применим теорему о среднем [**прим.** далее в теореме "ср." обозначает усредненное значение и в лекциях обозначается соответствующей буквой с чертой наверху] $\Delta S_i=[EG-F^2]^{1/2}|_{(Ucp.i,Vcp.i)}\Delta G_i$, где $(Ucp.i,Vcp.i)\in\Omega_i$, а $[EG-F^2]^{1/2}$ - непрерывная функция. Рассмотрим разность интегральной суммы $\sigma^*={}_{i=1}\sum^n f(x(U_i,V_i),\ y(U_i,V_i),\ z(U_i,V_i))[EG-F^2]^{1/2}|_{(Ucp.i,Vcp.i)}*\Delta G_i$ и интегральной суммы σ: $|\sigma-\sigma^*|=|{}_{i=1}\sum^n\{f(\ldots)([E_{cp.}G_{cp.}-F_{cp.}{}^2]^{1/2}-[EG-F^2]^{1/2})\Delta G_i\}|$. Функция $[EG-F^2]^{1/2}$ непрерывна в замкнутой области Ω, значит она непрерывна и в самой области. Тогда для $\forall\varepsilon>0$ найдется такое разбиение $T(\Omega)$ с характеристикой Δ', что $|[E_{cp.}G_{cp.}-F_{cp.}{}^2]^{1/2}-[EG-F^2]^{1/2}|<\varepsilon$. Т.к. f действует в непрерывной замкнутой области, то она ограничена в этой области. Отсюда получаем, что $\lim(\sigma-\sigma^*)=0$ при $\Delta'\to 0$ => $\sigma\to\sigma^*$.

12. Определение поверхностного интеграла второго рода, его свойства, вычисление. Связь с интегралом первого рода.

Пусть S-гладкая, двусторонняя поверхность. В каждой точке поверхности можно указать единичный вектор нормали к поверхности **n**. Вектор-функция **n**(M), задающая нормаль в каждой точке, называется непрерывным полем нормали. Задать непрерывное поле нормали-значит задать ее поверхность. В любой точке поверхность определяется как вектор-функция координат: **F**(x,y,z)=P(x,y,z)**i** + Q(x,y,z)**j** + R(x,y,z)**k**, где P,Q,R-непрерывные функции координат. Разобьем поверхность S с помощью сетки кусочно-гладких кривых на части S_i, в каждой части которой выберем точку M_i. Пусть $F_n(M_i)$ - проекция вектора **F** на **n** в точке M_i, тогда пользуясь определением скалярного произведения $F_n(M_i)$=(**F**(Mi),**n**(Mi))=$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$. Составим интегральную сумму $\sigma={}_{i=1}\sum^n$(**F**(Mi),**n**(Mi))ΔS_i (1).

Определение 1. Число J называется пределом интегральной суммы (1) при $\Delta\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что при $\Delta<\delta$ и независимо от выбора точек M_i выполняется неравенство $|\sigma-J|<\varepsilon$.

Определение 2. Если при $\Delta\to 0$ существует (независимо от выбора точек M_i и разбиения поверхности S) конечный предел J интегральной суммы (1), то этот предел называется поверхностным интегралом 2 рода по поверхности S и обозначается как ${}_{S}\iint[Pdydz+Qdzdx+Rdxdy]={}_{S}\iint[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS=$ ${}_{S}\iint$(**F**,**n**)dS.

Свойства. Непосредственно доказываются следующие свойства:

1. Поверхностный интеграл 2-ого рода зависит от выбора стороны поверхности (значения косинусов меняют свой знак на противоположный) ${}_{S+}\iint$(**F**,**n**)dS= - ${}_{S-}\iint$(**F**,**n**)dS.
2. Понятие поверхностного интеграла распространяется также на кусочно-гладкую поверхностьΦ.

Связь между поверхностыми интегралами 2-ого и 1-ого рода. После выбора стороны поверхностный интеграл 2-ого рода можно рассматривать как интеграл первого рода от функций f(M)cosZ(M), f(M)cosY(M), f(M)cosX(M), причем можно использовать формулу для вычисления поверхностного интеграла 1-ого рода: ${}_{\Phi}\iint f(x,y,z)\cos Z dS={}_{\Omega}\iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))[EG-F^2]^{1/2}dudv$.

13. Теорема (формула) Гаусса-Остроградского, ее запись в координатной и векторной формах.

Теорема. Пусть в замкнутой ограниченной области G заданы функции P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), непрерывные на G вместе ос своими частными производными 1 порядка. Тогда имеет место следующее тождество:
$_G\iiint(\partial P/\partial x+\partial Q/\partial y+\partial R/\partial z)dxdydz={}_S\iint(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ или $_G\iiint \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,dxdydz={}_S\iint \mathbf{adS}$, т.е интеграл по области от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}=(P,Q,R)$ равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

Доказательство. Пусть G-область в пространстве XYZ. Предположим, что на плоскости XY существует такая квадрируемая область Г, что граница области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2 задаваемых соответственно явными представлениями $z=\varphi(x,y)$ и $z=\psi(x,y)$, где функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ неперрывны на замкнутой области Г. Рассмотрим, например, интеграл $_G\iiint(\partial R/\partial z)dxdydz$. Пользуясь введенными обозначениями, представим его как $_G\iiint(\partial R/\partial z)dxdydz={}_Г\iint[{}_{\varphi(x,y)}\int^{\psi(x,y)}(\partial R/\partial z)dz]dxdy={}_Г\iint[R(x,y,\psi(x,y))-R(x,y,\varphi(x,y))]dxdy={}_{S2}\iint[R(x,y,z)]dxdy+{}_{S1}\iint[R(x,y,z)]dxdy={}_{S2}\iint Rdxdy+{}_{S1}\iint Rdxdy+{}_{S0}\iint Rdxdy={}_S\iint Rdxdy$.

Совершенно аналогично доказывается, что $_G\iiint(\partial P/\partial x)dxdydz={}_S\iint Pdydz$ и $_G\iiint(\partial Q/\partial y)dxdydz={}_S\iint Qdzdx$. Складывая эти три тождества получим искомую формулу**.**

14. Теорема (формула) Стокса, ее запись в координатной и векторной формах.

Формула Стокса выражает связь между интегралами по поверхности и кривой, ограничивающей данную поверхность. Пусть S-ограниченная кусочно-гладкая поверхность с кусочно гладкой границей L.

Определение. Окрестностью поверхности S называется любое открытое множество V, содержащее эту поверхность.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности кусочно-гладкой поверхности заданы функции P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), непрерывные вместе со своими частными производными 1 порядка. Тогда имеет место следующее тождество:
$_L(\int)[Pdx+Qdy+Rdz]={}_S\iint|\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma; \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z; P, Q, R|dS$ или $_L\int\mathbf{a}d\mathbf{r}={}_S\iint \mathrm{rot}\,\mathbf{a}d\mathbf{S}$, т.е. циркуляция векторного поля $\mathbf{a}=(P,Q,R)$ по контуру L равна потоку вихря этого поля через поверхность S, ограниченную контуром L. Обход контура соответствует выбранной поверхности.

Доказательство. Рассмотрим криволинейный интеграл $_L\int P(x,y,z)dx={}_{L1}\int P(x,y,z(x,y))dx$ (1), где L_1-проэкция кривой L, ограничивающей поверхность, на плоскость XY. К правому интегралу в формуле (1) применим формулу Грина

(формула Грина: $_G\iint[(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)]dxdy={}_{L+}\int[Pdx+Qdy]$; в нашем случае Q=0. $P=P(x,y,z(x,y))$: $_{L1}\int P(x,y,z(x,y))dx=-{}_D\iint(\partial P(x,y,z(x,y)/\partial y)]dxdy$, $\partial P/\partial y=\partial P/\partial y+(\partial P/\partial z)(\partial z/\partial y)$. Отсюда получаем, что $_{L1}\int P(x,y,z(x,y))dx=-{}_D\iint[\partial P/\partial y+(\partial P/\partial z)(\partial z/\partial y)]dxdy=-{}_S\iint[\partial P/\partial y+(\partial P/\partial z)(\partial z/\partial y)]\cos\gamma dS$=(с учетом того, что $(\partial z/\partial y)\cos\gamma=-\cos\beta$) $=-{}_S\iint[(\partial P/\partial y)\cos\gamma-(\partial P/\partial z)\cos\beta]dS$. Т.е. для функции P получим выражение: $_L\int Pdx={}_S\iint[(\partial P/\partial z)\cos\beta-(\partial P/\partial y)\cos\gamma]dS$. Аналогично путем проектирования поверхности на другие плоскости получим: $_L\int Qdy={}_S\iint[(\partial Q/\partial x)\cos\gamma-(\partial Q/\partial z)\cos\alpha]dS$ и $_L\int Rdz={}_S\iint[(\partial R/\partial y)\cos\alpha-(\partial R/\partial x)\cos\beta]dS$. Складывая три равенства получим $_S\iint[(\partial R/\partial y-\partial Q/\partial z)\cos\alpha+(\partial P/\partial z-\partial R/\partial x)\cos\beta+(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)\cos\gamma]dS$ откуда и получается искомая формула, записываемая в виде символического определителя.

Замечание. Неоднозначно проектируемую поверхность можно разбить на части, которые будут проектироваться однозначно.

15. Градиент скалярного поля и его свойства. Вычисление градиента в декартовых координатах.

Пусть D- область на плоскости или в пространстве. Говорят, что в D задано скалярное поле, если каждой точке области D ставится в соответствие некая функция U(M).

Определение 1. Градиентом скалярной функции u(M), определенной и дифф в некоторой области D, называется вектор $\mathrm{grad}u=\{\partial u/\partial x;\partial u/\partial y;\partial u/\partial z\}$. $\nabla=(\partial/\partial x)\mathbf{i}+(\partial/\partial y)\mathbf{j}+(\partial/\partial z)\mathbf{k}=\{\partial/\partial x;\partial/\partial y;\partial/\partial z\}$; $\mathrm{grad}u=\nabla u$. Если есть функция u, то произв по направлению $\mathbf{l}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$, т.е. $\partial u/\partial l=\mathrm{grad}u*\mathbf{l}=Пр_l\mathrm{grad}u*|l|=Пр_l\mathrm{grad}u$

Определение 2. Градиентом скалярной функции u в точке M называется вектор, который характеризует наибольшую скорость изменения u в точке M.

Операции над скалярным полем. 1. Grad(u+v)=gradu+gradv. 2. Grad(u/v)=(vgradu-ugradv)/v^2. 3. Grad(u*v)=vgradu+ ugradv. 4. Grad(c*u)=cgradu, c=const. 5. Gradf(u)=f '(u)*gradu, f-дифференцируемая функция.

Вычисление в декартовых координатах. Пусть $u=u(g_1,g_2,g_3)$. Вычислим компоненту градиента u в базисе ($\mathbf{e_1,e_2,e_3}$). По направлению $\mathbf{e_1}$: $\Delta u=u(M_1)-u(M)=\Delta u(M)$, $de_1=\Delta e_1$.
$(\mathrm{grad}u)_1=(\mathrm{grad}u,\mathbf{e_1})=\lim\Delta u/de_1=\lim\Delta u/(H_1*dy_1)=\partial\varphi/(H_1*\partial y_1)$, $\{\Delta e_1\to 0\}$…
$\mathrm{grad}u=(1/H_1)*(\partial u/\partial g_1)*\mathbf{e_1}+(1/H_2)*(\partial u/\partial g_2)*\mathbf{e_2}+(1/H_3)*(\partial u/\partial g_3)*\mathbf{e_3}$. H_1-H_3 – коэфф Ламэ, отвеч коорд g_1, g_2, g_3.

16. Векторное поле градиента, потенциальные поля, условия потенциальности.

Говорят, что в области D задано векторное поле, если в $\forall M\in D$ ставится в соответствие по некоторому закону вектор $\vec{\mathbf{F}}(M)$.

$\vec{F}(M) = \{ F_x (x,y,z), F_y (x,y,z), F_z (x,y,z) \}= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

Определение 1. Векторное поле называется полем класса C^n, если его составляющие F_x, F_y, $F_z \in C^n$.

Пусть u(M) – дифференцируемое скалярное поле. Построив в каждой точке M этого поля вектор gradu, мы получим векторное поле скалярной величины u.

Определение 2. Векторное поле $\vec{\mathbf{F}}(M)$ называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторой скалярной функции u. То есть $\vec{\mathbf{F}}$=gradu. U(M) - потенциал поля.

Теорема. Для того, чтобы векторное поле $\vec{\mathbf{A}}\in C^1$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{0}$.

Доказательство.

1. Необходимость: Пусть u(x,y,z) – потенциал векторного поля **A**. $u\in C^2$. Т.к. **A**=gradu, то $A_x=\partial u/\partial x \ldots A_z=\partial u/\partial z$. Найдём x-овую составляющую ротора:

$(\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}})_x=\partial A_z/\partial y-\partial A_y/\partial z=\partial^2u/(\partial z\partial y)-\partial^2u/(\partial y\partial z)=0$. Аналогично

$(\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}})_y=0$, $(\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}})_z=0$.

17. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля, ее вычисление в декартовых координатах.

Пусть в области D задано некоторое непрерывное векторное поле $\vec{\mathbf{A}}(M)= A_x(x,y,z)\vec{\mathbf{i}}+A_y(x,y,z)\vec{\mathbf{j}}+A_z(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$.

Возьмем в этом векторном поле некоторую поверхность S и выберем ее определенную сторону.

Пусть $\mathbf{n}(M)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – поле единичных векторов нормалей к поверхности, соответствующей выбранной стороне, тогда поверхностный интеграл 2-ого рода:

${}_S\iint(A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)dS$ или ${}_S\iint(\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{n}})dS$ или ${}_S\iint A_ndS$

называется потоком вектора $\vec{\mathbf{A}}$ через поверхность S в указанную сторону.

Пусть дано векторное поле $\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{M})=\{A_x;A_y;A_z\}$ класса C^1, пусть в этом поле задана область V, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S**.** Пусть $\vec{\mathbf{n}}$ – внешняя нормаль поверхности S, тогда по формуле Остроградского, если положить: $P=A_x$, $Q=A_y$, $R=A_z$. Поток векторного поля **A** через поверхность S во вне можно преобразовать в тройной интеграл: ${}_S\iint A_ndS= {}_S\iint[(A_x\cos\alpha+A_y\cos\beta+A_z\cos\gamma]dS={}_V\iiint(\partial A_x/\partial x+\partial A_y/\partial y+\partial A_z/\partial z)dx\, dydz$.

Определение 1. Стоящая под знаком интеграла функция называется дивергенцией или расходимостью векторного поля **A** и обозначается:

$\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}=\partial A_x/\partial x+\partial A_y/\partial y+\partial A_z/\partial z$. Таким образом формула Остроградского в векторной форме выглядит так:

${}_S\iint A_ndS= {}_V\iiint \mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}dV$

Пусть $\vec{\mathbf{A}}$ – векторное поле класса C^1. Поставим в соответствие каждой пространственной области V, ограниченной кусочно-гладкой областью S, скалярную величину ${}_S\iint A_ndS$, т.е. Ф(V)(аддитивная функция) ${}_S\iint A_ndS=\Phi(V)$

Определение 2. Дивергенцией векторного поля **A** в точке $M\in V$ называется производная функции $\Phi(V)= {}_S\iint A_ndS$ по обьему в этой точке, т.е. $\lim_S\iint A_ndS/\Delta V$, $V\to M$ $(\Delta V\to 0)$

Дивергенция в декартовых координатах. Дивергенция некоторого векторного поля **A** в точке M определяется формулой $\mathrm{div}\mathbf{A}=\lim_S\iint A_ndS/\Delta V$, $\Delta V\to M$. Пусть ΔV – обьем бесконечно малого параллелепипеда. Рассмотрим вектор **A** в базисе $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$; $\mathbf{A}= A_1\mathbf{e_1}+A_2\mathbf{e_2}+A_3\mathbf{e_3}$. Вычислим поток **A** через поверхность параллепипеда. Поток через грани: $\partial/\partial q_1(A_1H_2H_3)dq_1dq_2dq_3$; $\partial/\partial q_2(A_2H_3H_1)dq_1dq_2dq_3$; $\partial/\partial q_3(A_3H_1H_2)dq_1dq_2dq_3$; поделим их сумму (поток через параллелепипед) на $\Delta V= H_1H_2H_3\, dq_1dq_2dq_3$, получим дивергенцию в криволинейных координатах $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\mathbf{A}=(1/(H_1H_2H_3))*[\partial(A_1H_2H_3)/\partial q_1+\partial(A_2H_3H_1)/\partial q_2+\partial(A_3H_1H_2)/\partial q_3]$

18. Циркуляция векторного поля и ротор векторного поля. Вычисление ротора в декартовых координатах.

Определение 1. Пусть L-кусочно-гладкая замкнутая кривая, заданная в области G. Криволинейный интеграл ${}_L\int A_xdx+A_ydy+A_zdz$ называется циркуляцией векторного поля $\mathbf{A}=\{A_x;A_y;A_z\}$ по кривой L и обозначается ${}_L\int A_\tau dl$, где A_τ-касательная составляющая **A** к кривой L. ${}_L\int\mathbf{Adr}$, $\mathbf{dr}=\{dx;dy;dz\}$.

Пусть в области G некоторая поверхность S ограничена замкнутым контуром L, тогда по формуле Стокса, если $P=A_x$, $Q=A_y$, $R=A_z \in C^1$, циркуляция векторного поля по контуру L может быть преобразована в поверхностный интеграл:

${}_L\int\mathbf{Adr}={}_S\iint|\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma;\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z;A_x,A_y,A_z|dS={}_S\iint[(\partial A_z/\partial y-\partial A_y/\partial z)\cos\alpha+(\partial A_x/\partial z-\partial A_z/\partial x)\cos\beta+(\partial A_y/\partial x-\partial A_x/\partial y)\cos\gamma]dS$.

Правая часть – поток через поверхность S вектора: $(\partial A_z/\partial y-\partial A_y/\partial z)\mathbf{i}+(\partial A_x/\partial z-\partial A_z/\partial x)\mathbf{j}+(\partial A_y/\partial x-\partial A_x/\partial y)\mathbf{k}$ (1)

Вектор (1) называется ротором или вихрем векторного поля **A** и обозначается rot**A**: $\mathrm{rot}\mathbf{A}=|\mathbf{i,j,k};\ \partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z;A_x,A_y,A_z|$; $\mathrm{rot}\mathbf{A}=[\nabla,\mathbf{A}]$

Ротор в декартовых координатах. Нормальная составляющая ротора: $(\mathrm{rot}\mathbf{A})_n = \lim {}_L\int A_\tau dl / \Delta S$ $S\to M = \lim {}_L\int(\mathbf{Adr})dl/\Delta S$

$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_1 = 1/H_2H_3\ [\ \partial(A_3H_3)/\ \partial q_2 - \partial(A_2H_2)/\ \partial q_3\ ]$ и т.д.

$\mathrm{rot}\mathbf{A} = |\mathbf{e_1}/H_2H_3\ ,\ \mathbf{e_2}/H_3H_1\ ,\ \mathbf{e_3}/H_1H_2\ ;\ \partial/\partial q_1\ ,\ \partial/\partial q_2\ ,\ \partial/\partial q_3\ ;\ A_1H_1\ ,\ A_2H_2\ ,\ A_3H_3\ |$

19. Оператор Гамильтона (Набла), дифференциальные операции второго порядка, связь между ними. Оператор Лапласа, его вычисление в декартовых координатах.

Оператор Набла. $\nabla=\{\partial/\partial x;\partial/\partial y;\partial/\partial z\}$ имеет двоякую природу - с одной стороны это вектор, а с другой стороны вектор, который требует дифференцирования. Оператор Набла действует только на аргумент, который стоит после него. Оператор, действующей на произведение и(или) частное двух функций проявляет двойственную природу и действует в соответствии с правилами дифференцирования. $\mathrm{grad}u=\nabla u$, $\mathrm{div}\mathbf{A}=(\nabla,\mathbf{A})$, $\mathrm{rot}\mathbf{A}=[\nabla,\mathbf{A}]$.

Дифференциальные операции второго порядка.

$\mathrm{rotgrad}u=[\nabla,\nabla u]=[\nabla,\nabla]u=\mathbf{0}$; $\mathrm{div\,rot}\mathbf{A}=\nabla[\nabla,\mathbf{A}]=[\nabla,\nabla]\mathbf{A}=\mathbf{0}$,

$\mathrm{rotrot}\mathbf{A}=[\nabla,[\nabla,\mathbf{A}]]=\nabla(\nabla,\mathbf{A})-(\nabla,\nabla)\mathbf{A}=\mathrm{graddiv}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$

$\Delta\mathbf{A}=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)\{A_x, A_y, A_z\}=$ $\{\partial^2A_x/\partial x^2+\partial^2A_x/\partial y^2+\partial^2A_x/\partial z^2;\ \partial^2A_y/\partial x^2+\partial^2A_y/\partial y^2+\partial^2A_y/\partial z^2;\ \partial^2A_z/\partial x^2+\partial^2A_z/\partial y^2+\partial^2A_z/\partial z^2\}$

Оператор Лапласа. divgrad – оператор Лапласа и обозначается: $\Delta=(\nabla,\nabla)$; $(\nabla,\nabla u)=(\nabla,\nabla)u=\Delta u$;

$\Delta=(\nabla,\nabla)=\{\partial/\partial x;\partial/\partial y;\partial/\partial z\}*\{\partial/\partial x;\partial/\partial y;\partial/\partial z\}=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$; $\Delta u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2$ – оператор Лапласа

Оператор Лапласа в декартовых координатах.

$\Delta u=\mathrm{divgrad}u$

$\mathrm{Grad}u=1/H_1*\partial u/\partial q_1*\mathbf{e_1}+1/H_2*\partial u/\partial q_2*\mathbf{e_2}+1/H_3*\partial u/\partial q_3*\mathbf{e_3}$

$\mathrm{div}\mathbf{A}=\mathrm{div}\{A_1, A_2, A_3\}=1/H_1H_2H_3*[\partial(A_1H_2H_3)/\partial q_1+\partial(A_2H_3H_1)/\partial q_2+\partial(A_3H_1H_2)/\partial q_3]$

$\Delta u=\mathrm{divgrad}u=1/(H_1H_2H_3)*[\partial/\partial q_1*((H_2H_3/H_1)*(\partial u/\partial q_1))+\partial/\partial q_2*((H_3H_1/H_2)*(\partial u/\partial q_2))+\partial/\partial q_3*((H_1H_2/H_3)*(\partial u/\partial q_3))]$

20. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X к своей предельной функции f(x).

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к f(x) равномерно на множестве X, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$, что $\forall n\geq N$ и $\forall x\in X$ справедливо неравенство: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Определение 2. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ называется равномерно сходящимся на X, если на этом множестве его последовательность частичных сумм сходится равномерно к f(x).

Теорема 1. Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X к своей предельной функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n\geq N$, $\forall p\in N$, $\forall x\in X \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к f(x) на множестве X, пусть $\varepsilon>0$ – заданное число, тогда для этого ε $\exists N$, $\forall n\geq N$, $\forall x\in X \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$. Если p=1,2,…, то тем более будет выполняться равенство $|f_{n+p}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$ Оценим модуль разности $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|(f_{n+p}(x)-f(x))+(f(x)-f_n(x))|\leq|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Достаточность. Пусть выполнено неравенство $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon/2$, удовлетворяющее условию теоремы, тогда при любом фиксированном x, исходя из критерия Коши, следует для числовых последовательностей $\{f_n(x)\}$ на множестве X и $\Rightarrow\exists$ предельная f(x) на этом множестве. Т.к. это неравенство справедливо для p, то при $p\to\infty$ $\forall n\geq N$ и $\forall x\in X$: $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$. Здесь использована теорема о предельном переходе в неравенствах. Если бы в неравенствах было $a_n<b_n$, то $\lim a_n\leq\lim b_n$

Теорема 2. Для того, чтобы функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ равномерно сходился на множестве X к некоторой своей сумме S(x), необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)>0$ $\forall n\geq N$, $\forall p=1,2,\ldots$, $\forall x\in X \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k(x)|<\varepsilon$

Доказательство: Эта теорема – есть следствие теоремы 1, т.к. под знаком модуля стоит разность частичных сумм. $S_{n+p}-S_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k(x)$

21. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда(достаточные условия равномерной сходимости).

Теорема. Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x)$ (1.1)определен на множестве X и если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}C_k$ такой, что для всех x из множества X и для любого номера k справедливо неравенство $|U_k(x)|\leq C_k$ (1.2), то функциональный ряд (1.1) сходится равномерно на множестве X . **Краткая формулировка:** функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.

Доказательство. Согласно критерию Коши для числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}C_k$, для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой ,что для всех $n\geq N(\varepsilon)$ и для любого натурального p =1,2,3… справедливо неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p}C_k<\varepsilon$ (1.3). Из неравенств (1.2) и(1.3) и из того, что модуль суммы не превосходит суммы модулей , получим $|\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k(x)|<\varepsilon$ (для всех $n\geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества X).Согласно критерию Коши функциональный ряд (1.1) сходится равномерно на множестве X.

22. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

ТЕОР. Если Un(x) непрер. на X и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится равномерно на X,то его сумма $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ также непрерывна на X.

Док-во пусть $x_0 \in X$, x_0- некоторая фикс.точка, докажем что S(x) непрерывна в т. x_0. выберем произвол. $\varepsilon>0$ пусть частичная сумма $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} U_k(x)$, согласно условию теоремы $S_n(x)$ равн.сх-ся к S(x)на X, поэтому $\exists N(\varepsilon)$, что $|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon$ для любого n=>N. В частности это будет справедливо и для n=N, $|S_N(x0) - S_N(x)| < \varepsilon/3$.Фун-ция $S_N(x)$ непрерывна в т. x_0 как сумма конечного числа непрерывных функций, поэтому $\exists\delta(\varepsilon)>0$, $\forall x\in X$ и при условии $\rho(x,x_0)< \delta$ выполняется нер-во: $|S_N(x0) - S_N(x)| < \varepsilon/3$. сделаем оценку : $|S(x) - S(x_0)| \equiv |(S(x)-S_N(x)+S_N(x) - S_N(x_0))| \le |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon/3+ \varepsilon/3+ \varepsilon/3= \varepsilon$. => $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$. Сумма S(x) непрерывна в $\forall$т. x_0 => непрерывна на X.

Теор(о непрер. Предельной функции функциональной посл-ти): Если $f_n(x)$ непрерывна на X и послед. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то предельная функция f(x) непрерывна на мн-ве X. В частности имеет место равенство: $\lim_{x\to x0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))= \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x0} f_n(x))$

Док-во: В случае равном.сход. пределы по n и x можно менять местами:
$\lim_{x\to x0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))= \lim_{x\to x0} f(x)=f(x_0)$, $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x0} f_n(x))= \lim_{n\to\infty} f_n(x)= f(x_0)$.

23 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда и предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 1 (о почленном интегрировании). Пусть ф-ции $U_n(x)$ непрерывны на [a,b] и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ **(1)** равномерно сходится на этом отрезке. Тогда для любого $x_0 \in [a,b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U_n(t)dt$ **(2)** так же сходится равномерно на [a,b] , при этом , если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ **(3)** , то $\int_{x0}^{x} S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U_n(t)dt$ **(4)**, или $\int_{x0}^{x} (\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t))dt = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{x0}^{x} U_n(t)dt)$ **(4').**

Доказательство. Т.к. ряд (1) сходится равномерно на [a,b], то по теореме о непрерывности суммы функционального ряда его сумма S(x) является непрер. на [a,b], поэтому интегрируема на любом $[x_0,x] \in [a,b]$. Покажем , что ряд (2) сходится равномерно на [a,b] к функции $\int_{x0}^{x} S(t)dt$:

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$, и $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. тогда для любого $x \in [a,b]$:

$|\int_{x0}^{x} S(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{x0}^{x} U_k(t)dt| = |\int_{x0}^{x} S(t)dt - \int_{x0}^{x}(\sum_{k=1}^{n} U_k(t))dt| = |\int_{x0}^{x} S(t)dt - \int_{x0}^{x} S_n(t)dt| \le |\int_{x0}^{x} |S(t) - S_n(t)|dt| = |\int_{x0}^{x} |r_n(t)| dt| \le \sup |r_n(t)| * |\int_{x0}^{x} dt|$ (при $|t-x0| \le |x-x0|$) $\le |x - x_0| * \sup_{|t-x0| \le |x-x0|} |r_n(t)| \le (b-a)*\sup_{[a,b]} |r_n(x)| \equiv C_n$.

Последовательность $\sup_{[a,b]} |r_n(x)|$ есть числовая последовательность , но в силу равномерной сходимости ряда (1) $\lim \sup |r_n(x)| = \lim \sup |S_n(x) - S(x)| = 0$ при $n\to\infty$, => последовательность $\{C_n\}$ ($C_n = (b-a)*\sup_{[a,b]} |r_n(x)|$) сходится к нулю при $n\to\infty$. Согласно нашей оценке : $|\int_{x0}^{x} S(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{x0}^{x} U_k(t)dt| \le C_n$, $C_n \to 0$, $C_n > 0$. По мажорантному признаку Вейерштрасса последовательность в левой части этого неравенства сходится равномерно, причем к нулю; это значит, что $\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{x0}^{x} U_n(t)dt)$ сходится равномерно к $\int_{x0}^{x} S(t)dt$. Т.о. ряд (2) сходится равномерно и имеет место формула (4).

Теорема 2 (о предельном переходе). Если последовательность непрерывна на [a,b] , ф-ция $f_n(x)$ равномерно на этом отрезке сходится к ф-ции f(x), то для любого $x_0 \in [a,b]$: $\int_{x0}^{x} f_n(t)dt$ сходится равномерно к $\int_{x0}^{x} f(t)dt$, в частности имеет место правило предельного перехода : $\lim \int_{x0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x0}^{x} (\lim_{n\to\infty} f_n(t))dt = \int_{x0}^{x} f(t)*dt$ при $n\to\infty$.

24. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда и о предельном переходе под знаком производной.

Теорема 1 (о почленном дифференцировании). Пусть: 1) Ф-ии $U_n(x)$ непр. дифф. на [a,b] 2)$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сход. хотя – бы в одной т-ке $x0 \in [a,b]$ (1) 3) $\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ сход. равномерно на [a,b] (2). Тогда (1) сход . равномерно на [a,b] , а его сумма $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (3) непр. дифф. и имеет место ф-ла: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ (4) т.е. возможно почленное дифф. ряда $((\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ (4'))

Доказательство. Пусть $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ (5) Т.к. по условию этот ряд сход . равномерно его можно почленно интегр. $\int_{x0}^{x} \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U'_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x) - U_n(x_0))$ $x \in [a,b]$ (6). По теореме о почленном интегрировании функции ряда (Теорема 1 (о почленном интегрировании). Пусть ф-ции $U_n(x)$ непрерывны на [a,b] и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (1) равномерно сходится на этом отрезке. Тогда для любого $x_0 \in [a,b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U_n(t)*dt$ (2) так же сходится равномерно на [a,b] , при этом , если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ (3) , то $\int_{x0}^{x} S(t)*dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U_n(t)*dt$ (4)) $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x) - U_n(x_0))$ (7) – сходится.

По условию данной теоремы $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x_0))$ (8) – так-же сходится . По этому сходится сумма рядов (7) и (8), т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x))$ (9)

Сумму этого ряда обозначим через S(x). Таким образом (6) можно переписать: $\int_{x0}^{x} \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) \equiv S(x) - S(x_0)$ (10) ф-ия в левой части этого равенства имеет производную. $\sigma(t)$ непрерывна ввиду равномерной сход.ряда $\sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$, по этому $\exists$ производная и правой части (10) $\sigma(t) = S'(x)$ (11).

Согласно равенству (5) $\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x) = S'(x)$.

Как мы показали $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x0}^{x} U'_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x)) - \sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x_0))$. Здесь первый ряд сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x_0))$ - это числовой ряд, по этому: $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n(x))$ тоже сходится равномерно на [a,b].

Теорема 2 (о предельном переходе). Пусть посл. непр. дифф. ф-ий на [a,b] $f_n(x)$ (12) сход. хотя бы в одной т-ке $x_0 \in [a,b]$, а $f'_n(x)$ равном сход на [a,b], тогда (12) сход. равномерно на [a,b] к некоторой ф-ии f(x) и ее предел f(x) есть непр. дифф. на этом отрезке ф-ия и имеет место равенство: $\lim[df_n(x)/dx]$ при $n\to\infty$ = $(d/dx)(\lim f_n(x)$ при $n\to\infty) = (d/dx)f(x)$ $x\in[a,b]$.

25. Теорема Абеля об абсолютной сходимости степенного ряда. Область и радиус сходимости степенного ряда.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида $_{n=0}\Sigma^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+..+a_n(x-x_0)^n+..$ (1) , где $a_0,a_1,a_2,..,a_n\dots$ -постоянные, вещественные числа, называемые коэффициентами этого ряда. Чаще числовой ряд записывают в виде $_{n=0}\Sigma^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ Составим с помощью коэффициентов ряда (1) следующую числовую последовательность. $\{(a_n)^{1/n}\}$ (2)

Теорема Абеля(об абсолютной сходимости степенного ряда): если степенной ряд $_{n=0}\Sigma^{\infty}a_nx^n$ (1) сходится в т. $x=x_0\neq0$, то он сходится (абсолютно) на интервале $-|x_0|<|x|<|x_0|$.

Док-во. По условию числовой ряд $_{n=0}\Sigma^{\infty}a_nx^n_0$ (2)-сход-ся по необходимому признаку сх-ти, его n-ый член $a_nx^n_0\to0$ при $n\to\infty$ =>{ $a_nx^n_0$}- является ограниченной, это значит ,что найдется $M>0$ $\forall n$: $|a_nx^n_0|\leq M$. Поэтому для n-ого члена ряда (1) справедлива оценка : $|a_nx^n|=|a_nx^n_0|*|x/x_0|^n\leq M*|x/x_0|^n$, если $|x|<|x_0|$,то ряд $_{n=0}\Sigma^{\infty}|x/x_0|$, явл-ся сходящимся как геометрическая прогрессия $q=|x/x_0|<1$.

Следствие. Если степенной ряд (1) расходится в точке x_0, то он расходится и при всех x,удовлетворяющих условию.

Определение. Велечина $R\geq0$,такая,что при всех x, $|x|<R$, ряд (1) сходится, а при всех $x>R$ ряд (1) расходится, называется радиусом сходимости степенного ряда(1).

Определение. Множество точек (-R,R) назыв. интервалом сходимостиряда(1) или кругом сходимости.

26. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости степенного ряда.

Вычисление радиуса сх-ти степенного ряда(формула Коши-Адамара). Рассмотрим ряд (1) $_{n=0}\Sigma^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$

Составим из его коэффициентов след. последовательность : $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, $|a_1|$, $\sqrt{|a_2|}$, $\sqrt[3]{|a_3|}$, $\sqrt[n]{|a_n|}$ …(2)

Эта последовательность может быть ограниченной и неограниченной. В случае её ограниченности существует конечный верхний предел. Обозначим этот предел через L: $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$,который неотрицателен.(≥0).

Теорема Коши-Адамара. Если :

1) L=0,то $R=+\infty$ (ряд сходится при любых x)
2) $L\neq0$, $\neq\infty$,то R=1/L
3) $L=\infty$,то R=0 (ряд сходится только в точке x=0)

Т.е. имеет место следующая формула Коши-Адамара: $R=1/L=1/(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|})$.

Док-во. 1) Пусть L=0; Т.к. послед.(2) состоит из неотрицат. элементов, то этот предел единственный →последоват.(2) беск малая. Данный предел является верхним. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n\geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|}\leq\varepsilon$.

Пусть $x\neq0$-$\forall$ фиксир. число. Возьмём $\forall n\geq N$: $\sqrt[n]{a_nx^n}=|x|\sqrt[n]{|a_n|}<|x|*(1/2|x|)=1/2<1$.

По признаку Коши ряд расходится в $\forall$ точке $x\neq0$,причём абсолютно. В точке x=0 ряд также сходится, поэтому $L=0\to R=+\infty$.

2) Пусть L принадлежит]0;+ ∞ [.

а) Ряд (1) сходится абсолютно(по принципу Коши) при всех x, удовлетворяющих условию $|x|<1/L$

б) Ряд (1) расходится(не выполняется признак сходимости) при всех x, удовлетворяющих условию $|x|>1/L$, R=1/L

3) Пусть $L=+\infty$ (т.е. послед. (2) не ограничена),тогда $\forall x\neq0$ $=|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|a_nx^n|}$ - также неограниченная последовательность.

Следовательно существует беск. много членов неогранич. последовательности, удовлетворяющие условию : $\sqrt[n]{|a_nx^n|}>1$ или $|a_nx^n|>1$ $\forall x\neq0$ ряд (1) расходится → R=0

27. Степенной ряд Тейлора. Теорема единственности.

Определение 1. Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд: $_{n=0}\Sigma^{\infty}[f^{(n)}(x_0)/n!](x-x_0)^n$ (1) называется рядом Тейлора f(x) в точке x_0.

Определение 2. Будем говорить, что функция f(x) на интервале (-R,R) (на множестве {x}) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд сходящийся к f(x) на указанном интервале (указанном множестве). Справедливы следующие утверждения:

1) Для того, чтобы функция f(x) могла быть разложена в степенной ряд на указанном интервале (-R,R), необходимо, чтобы эта функция имела на этом интервале непрерывные производные любого порядка.

2) Если функция f(x) может быть на интервале (-R,R) разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.

Док-во. Пусть функция может быть разложена на интервале в степенной ряд (1). Дифференцируя указанный ряд почленно n раз (что заведомо можно сделать внутри интервала), получим $f^{(n)}(x)=a_nn!+a_{n+1}(n+1)!x+\dots$. Отсюда при x=0 найдем $f^{(n)}(0)=a_nn!$ или $a_n=f^{(n)}(0)/n!$ (1) . Таким образом, коэффициент степенного ряда (1), в который может быть разложена функция f(x) , однозначно определяется формулой (1).

3) Если функция f(x) может быть разложена на интервале (-R,R) в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции f(x) .

4) Для того чтобы функция f(x) могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале (-R,R) (на множестве {x}), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале.

28. Критерий разложимости функции в ряд Тейлора. Достаточные условия разложимости.

Критерий разложимости. Для того чтобы f(x) могла быть разложена в ряд Тейлора на нек. интервале необходимо, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к 0.
Док-во. Если x_0 -центр разложения; $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$ и $S_n(x) = {}_{k=0}\sum^n[f^k(x_0)/k!](x-x_0)^k$, что чтобы: $\lim S_n(x)$ при $n\to\infty$ = f(x) необх и дост, чтобы $\forall$ x $\in$ данному интервалу : $\lim r_n(x)$ при $n\to\infty$ = 0.
Теорема (достаточное условие разложимости функции). Пусть f(x) и все ее произв равностепенно ограничены на $]x_0 - h, x_0 + h[$, т.е $\exists$ M > 0 : $\forall$ n и $\forall$ x $\in$ $]x_0 - h, x_0 + h[$ выполнялось нер-во: $|f^n(x) \le M|$ (1). Тогда на этом интервале f(x) разложима в ряд Тейлора, т.е. $f(x) = {}_{n=0}\sum^\infty [f^n(x_0)/n!](x-x_0)^n$,
$|x-x_0|<h$

1. Степенные ряды, получающие из ряда (1) почленным дифференцированием и интегрированием имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

29. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда.
Лемма. Пусть дан степенной ряд (1) ${}_{n=0}\sum^\infty U_n = {}_{n=0}\sum^\infty a_nx^n$ и пусть даны ряды ${}_{n=0}\sum^\infty U_n{}' = {}_{n=1}\sum^\infty a_nx^{n-1}n$ (2) и ${}_{n=0}\sum^\infty {}_{x0}\int^x U_n(t)dt = {}_{n=0}\sum^\infty a_n*(x^{n+1}-x_0{}^{n+1})/n+1$ (3). Тогда радиусы сходимости рядов (1)-(3) равны.
Док-во. **1**. Пусть R-радиус сходимости ряда (1), тогда по формуле Коши-Адамара: R ‘ $=1/(\lim \sqrt[n]{n|a_n|})=1/(\lim \sqrt[n]{|a_n|})=$ R ,при $n\to\infty$. Т.к. $\sqrt[n]{n} \to 1$
2. R ‘’ $= 1/(\lim \sqrt[n]{(a_n/n+1)})=R$, т.к. $\sqrt[n]{1/n+1} \to 1$
Теор. Пусть R>0 – радиус сходимости степенного ряда $f(x)= {}_{n=0}\sum^\infty a_nx^n$ (1). Тогда :
f(x) имеет на интервале (-R;R) производные всех порядков, которые находятся из ряда (1) почленным дифференцированием: $f\,'(x)= {}_{n=1}\sum^\infty (a_nx^n)' = {}_{n=1}\sum^\infty a_nnx^{n-1}$(4)
$\forall$x ,принадлежащего (-R;R) (т.е. внутри интервала сходимости) степенной ряд можно интегрировать, т.е. ${}_{x0}\int^x f(t)dt={}_{n=0}\sum^\infty {}_{x0}\int^x (a_nx^n)dt= {}_{n=0}\sum^\infty a_n*(x^{n+1}-x_0{}^{n+1})/n+1$ (5),где x,x_o принадлежат (-R;R).

2. Степенные ряды, получающие из ряда (1) почленным дифференцированием и интегрированием имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

Док-во. Согласно лемме ряды (4) и (5) имеют радиус сходимости R. всякий степенной ряд вида (1) в том числе и (4), (5) с радиусом сходимости R, равномерно сходятся на отрезке

30 Разложение в ряд Тейлора функций e^x ,cos(x),sin(x)
(Всё в окрестности 0)

1) **$f(x) = e^x$**, $x_0 = 0$

$f^{(n)}(x) = e^x$, для $\forall$ x $\in$]-h, h[, h>0.
$0 < f^{(n)}(x) < e^h$.
Для данной функции выполнены достаточные условия разложимости ф-ии в ряд Тейлора **(Теорема (достаточное условие).** Пусть f(x) и все ее произв равностепенно ограничены на $]x_0 - h, x_0 + h[$, т.е $\exists$ M > 0 : $\forall$ n и $\forall$ x $\in$ $]x_0 - h, x_0 + h[$ вып нер-во: $|f^n(x) \le M|$ (1). Тогда на этом интервале f(x) разложима в ряд Тейлора, т.е. $f(x) = {}_{n=0}\sum^\infty[f^n(x_0)/n!](x-x_0)^n$**)** выполняются для $x_0 = 0 \Rightarrow e^x$ в окрестности 0 раскл на любом конечном промежутке, т.е. на всей вещественной оси. Т.к. $f^{(n)}(0) =1 \Rightarrow e^x = {}_{n=0}\sum^\infty(x^n/n!)$ **(1)**

2) **f(x) = Sin(x)**

$f^{(n)}(x) = \mathrm{Sin}(x + n(\pi/2))$
$\forall n : |f^{(n)}(x)| \le 1$ – на всей вещественной оси
$\mathrm{Sin}(x) = {}_{n=0}\sum^\infty[((-1)^nx^{2n+1})/(2n+1)!]$ **(2)**

3) **f(x) = Cos(x)**

Аналогично: $\mathrm{Cos}(x) = {}_{n=0}\sum^\infty[((-1)^nx^{2n})/(2n)!]$ (3)

31. Разложение в ряд Тейлора функций In (1 + x), (1 + x.)^m

1) **f(x) = ln(1+x)**

$\ln(1+x) = x - (x^2/2) - (x^3/3) + \ldots + (-1)^{n+1}(x^n/n) + r_n(x)$

$r_n \to 0$ при $n \to \infty$ на]-1;1[

$\ln(1+x) = {}_{n=1}\sum^{\infty}(-1)^{n+1}(x^n/n)$

2) **f(x) = (1+x)^m**

$(1+x)^m = 1 + mx + [(m(m-1)x^2)/(2!)] + \ldots + [(m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n)/(n!)] + r_n(x)$

$(1+x)^m = {}_{n=0}\sum^{\infty}[(m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n)/(n!)]$.

32. Пространство кусочно-непрерывных функций с квадратной метрикой. Ортогональные и ортонормированные системы. Ряды Фурье по данной ортогональной системе.

Опр. Лин пр-во R наз евклидовым (нормированным), если вып след два требован:

1) известно правило, по кот. любым двум элем. f и g пр-ва R став в соотв. число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (f, g);

2) указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1°- (f, g) = (g, f) - переместительное свойство.

2°- (f+g, h} = (f, h) + (g, h) —распределительное свойство.

3°. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ для любого вещественного числа λ.

4°. (f, f) > 0, если $f \neq \mathbf{0}$, (f, f) = 0, если $f = \mathbf{0}$.

Классическим примером бесконечномерного евклидова пространства является пространство всех кусочно-непрерывных на некотором сегменте $a \le x \le b$ функций.

Кусочно-непрерывная на сегменте [a, b] функция f(x) такая функция, которая непрерывна всюду на сегменте [a, b], за исключением, быть может, конечного числа точек x_i (i =1, 2,… , n), в которых она имеет разрыв первого рода, причем в каждой точке разрыва x_i эта функция удовлетворяет условию $f(x_i) = [f(x_i - 0) + f(x_i + 0)]/2$.

Опр. Последовательность $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ называется ортонормированной системой, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице $\|\psi_i\|=1$. (А элементы ортогональны, когда их скалярное произведение равно 0)

Опр. Назовем рядом Фурье элемент f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида: ${}_{k=1}\sum^{\infty}f_k\psi_k$ в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента и определяемые равенствами $f_k = (f, \psi_k)$, где k = 1,2, … ${}_{k=1}\sum^{n}f_k\psi_k$ – n-ая частичная сумма ряда Фурье.

Опр1. Ортонорм сист $\{\psi_k\}$ наз замкнутой, если для любого элемента f данного евкл пр-ва R и для люб полож числа ε найдется такая лин комбин конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклон которой от f (по норме пр-ва R) меньше ε.

Опр2. Ортонорм сисит $\{\psi_k\}$, наз полной , если, кроме нулевого элемента не сущ ни какого др элем f данного евкл пр-ва, который был бы ортогон ко всем элем ψ_k системы $\{\psi_k\}$.

33. Тригонометрические ряды Фурье, формулы для коэффициентов. Ряды Фурье четных и нечетн. функций.

Опр. Тригон. Рядом Фурье ф-ии f кусочно непр на отр [-π;π], наз ряд Фурье тригонометр ОНС: $(1/(2\pi)^{1/2})$, $(\mathrm{Cos}x/\pi^{1/2})$, $(\mathrm{Sin}x/\pi^{1/2})$, … , $(\mathrm{Cos}nx/\pi^{1/2})$, $(\mathrm{Sin}nx/\pi^{1/2})$,

Пользуясь общим определением ряда Фурье тригоном ряд Фурье может быть записан в виде: $\text{ꞙ}_0(1/(2\pi)^{1/2}) + {}_{n=1}\sum^{\infty}(\text{ꞙ}_n(\mathrm{Cos}nx/\pi^{1/2})+\text{ꞙ}(\mathrm{Sin}nx/\pi^{1/2}))$ (1)

$\text{ꞙ}_0 = {}_{-\pi}\int^{\pi}f(x)(1/(2\pi)^{1/2})dx$; $\text{ꞙ}_n = {}_{-\pi}\int^{\pi}f(x)(\mathrm{Cos}nx/\pi^{1/2})$; $\text{ꞙ}_n = {}_{-\pi}\int^{\pi}f(x)(\mathrm{Sin}nx/\pi^{1/2})$

Но в дальнейшем мы будем пользоваться иной формой записи ряда Фурье

$f(x) \sim a_0/2 + {}_{n=1}\sum^{\infty}(a_n\mathrm{Cos}nx + b_n\mathrm{Sin}nx)$ (2)

$a_0 = (1/\pi){}_{-\pi}\int^{\pi} f(x)dx$ ($a_0 = \text{ꞙ}_0 * 1/(2\pi)^{1/2}$)

$a_n = (1/\pi){}_{-\pi}\int^{\pi} f(x)\mathrm{Cos}nxdx$ ($a_n = \text{ꞙ}_n/\pi^{1/2}$)

$b_n = (1/\pi){}_{-\pi}\int^{\pi} f(x)\mathrm{Sin}nxdx$ ($b_n = \text{ꞙ}_n/\pi^{1/2}$)

Здесь a_0, a_n, b_n – коэфициенты Фурье

Замечание для ряда (2) нер-во Бесселя запис след образом: ${}_{k=1}\sum^{\infty} f^2_k \le \| f \|^2$

$a_0/2 + {}_{n=1}\sum^{\infty}(a^2_n + b^2_n) \le (1/\pi){}_{-\pi}\int^{\pi} f^2(x)dx$ (3).

Теорема. Если f(x) –четная, интегрруемая на [-L,L] то соответствующий ряд Фурье имеет вид: $f(x) \sim a_0/2 + {}_{n=1}\sum^{\infty} a_n\mathrm{Cos}(\pi nx/L)$ (3), где $a_n = (2/L){}_0\int^{L} f(x)\mathrm{Cos}(\pi nx/L)dx$

Если f(x) – нечетная, то $f(x) \sim {}_{n=1}\sum^{\infty} b_n\mathrm{Sin}(\pi nx/L)$ (4) ; $b_n = (2/L){}_0\int^{L} f(x)\mathrm{Sin}(\pi nx/L)dx$

Док-во1)пусть f(x) –четное, тогда f(x) Cos(πnx/L) также четная, а f(x)Sin(πnx/L) –нечетная, поэтому согласно (((если ${}_{-L}\int^{L} f(x)\,dx=\{2*{}_0\int^{L} f(x)dx$, если f(x)-четная;0-если f(x)-нечетная))) мы имеем $a_n = (1/L){}_{-L}\int^{L} f(x)\mathrm{Cos}(\pi nx/L)dx= (2/L){}_0\int^{L} f(x)\mathrm{Cos}(\pi nx/L)dx$, в то же время $b_n = (1/L){}_{-L}\int^{L} f(x)\mathrm{Sin}(\pi nx/L)dx =0$. 2}f(x)-нечетная ,то f(x) Cos(πnx/L) нечетная, а f(x)Sin(πnx/L) –четная, тогда $a_n = (1/L){}_{-L}\int^{L} f(x)\mathrm{Cos}(\pi nx/L)dx=0$, $b_n = (2/L){}_0\int^{L} f(x)\mathrm{Sin}(\pi nx/L)dx$

34. Разложение функций в ряд Фурье по косинусам и по синусам на интервале.]0,1[.есть в лекции

1) Пусть f(x) задана на [0,L]. Доопределим ее на [–L,0] продолжив четным образом. В результате на отрезке [–L,L] будем иметь функцию:

$f^*(x)=\{f(x)$, если $0<x\le L$; $f(-x)$, если $-L\le x\le 0\}$

Сделаем период. продолжение $f^*(x)$ на всю числов. ось. Ряд Фурье будем содержать только косинусы.

$f^*(x)\sim {}_{n=1}\sum^{\infty} a_n \mathrm{Cos}(\pi n x/L)$, n=0,1,…; $a_n=(2/L)\,{}_0\int^L f(x)\mathrm{Cos}(\pi n x/L)dx$

$f(x)\sim {}_{n=1}\sum^{\infty} a_n \mathrm{Cos}(\pi n x/L)$ на [0,L]

2) Доопределим задан. функцию на [–L,0[, продолжим ее нечетным образом

$f^*(x)=\{f(x)$, если $0<x\le L$; 0, если x=0 ; $f(-x)$, если $-L\le x<0\}$

В этом случае ряд Фурье будет выглядеть след. образом:

$f^*(x)\sim {}_{n=1}\sum^{\infty} b_n \mathrm{Sin}(\pi n x/L)$, n=0,1,…; $b_n=(2/L)\,{}_0\int^L f(x)\mathrm{Sin}(\pi n x/L)dx$, n=1,2,…

35. Экстремальные свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.

${}_{k=1}\sum^{\infty} C_k\psi_k$ (10') произв лин комбин первых n элементов ОНС $\{\psi_k\}$

$S_n = {}_{k=1}\sum^{n} f_k\,\psi_k$ (10) n- ная частичная сумма ряда Фурье ${}_{k=1}\sum^{n} f_k\,\psi_k$ (9) частичная сумма ряда Фурье

Опр. Отклонением по норме элем g от f наз величина || f-g ||,т.е.если f и g опр на [a,b], то $\| f-g \| = ({}_a\int^b[f(x) - g(x)]^2dx)^{1/2}$

Основная ТеоремаСреди всех сумм вида (10') наименьшим отклонением от f по норме данного евкл пр-ва имеет n- ная частичная сумма (9) ряда Фурье ф-ии f.

Док-во:Рассмотрим квадрат нормы, пользуясь аксиомами скалярного произведения, а также учитывая, что $\{\psi_k\}$ – ортонорм сист ф-ий.

$\| {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k - f \|^2 = ({}_k\sum C_k\psi_k - f,\ {}_k\sum C_k\psi_k - f) = {}_k\sum C^2_k(\psi_k, \psi_k) - 2\,{}_k\sum C_k(f, \psi_k) + (f, f) = {}_k\sum C^2_k - 2\,{}_k\sum C_k f_k + \| f \|^2 = C^2_k - 2\,{}_k\sum C_k f_k + {}_k\sum f^2_k + \| f \|^2 - {}_k\sum f^2_k = {}_k\sum(C_k - f_k)^2 - {}_k\sum f^2_k + \| f \|^2$

(Мы восп: $(\psi_k, \psi_n) = 1$ при k=n, = 0 при $k \ne k$)

После этих преобраз мы имеем выражение: $\| {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k - f \|^2 = {}_k\sum(C_k - f_k)^2 - {}_k\sum f^2_k + \| f \|^2$ (11)В левой части стоит квадрат отклонения суммы (10) от f по норме.

Миним квадрат отклонения будет тогда, когда $\| {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k - f \|^2 = 0 \Rightarrow C_k = f_k$

Таким образом если мы хотим данную ф-ию f представить в виде многочлена $f \sim {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k$ и при этом потреб наим отклонения по норме ф-ии f от данного многочлена то коэф C_k должны быть коэфициентами Фурье ф-ии f по данной ОНС $\{\psi_k\}$.

Следствие1. Для Для $\forall f \in R$, $\forall$ ОНС $\{\psi_k\}$, $\forall \{ C_k \}$,$\forall$ n : $\| f \|^2 - {}_{k=1}\sum^n f^2_k \le \| {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k - f \|^2$ (12)

Это нер-во $\Rightarrow$ из (11) т.к. лев часть (11) неотрицательна.

Следствие2. Тождество Бесселя:

Для $\forall f \in R$, $\forall$ ОНС $\{\psi_k\}$,$\forall$ n справедливо тождество Бесселя $\| {}_{k=1}\sum^n C_k\psi_k - f \|^2 = \| f \|^2 + {}_{k=1}\sum^n f^2_k$ (13)

Для док-ва дост в (11) положить $C_k = f_k$.

Th(Неравенство Бесселя)

Для $\forall f \in R$, $\forall$ ОНС $\{\psi_k\}$ справедливо нер-во Бесселя: ${}_{k=1}\sum^{\infty} f^2_k \le \| f \|^2$ (14)

Док-во:Лев часть тожд Бесселя (13) неотрицательна, по этому неотрицательна и правая часть.(15) ${}_{k=1}\sum^n f^2_k \le \| f \|^2$ это означает, что ряд ${}_{k=1}\sum^{\infty} f^2_k$ имеет огранич послед частичных сумм, кроме того этот ряд состоит из неотриц элементов $\Rightarrow$ послед частичн сумм монотонно возрастает $\Rightarrow$ ряд сходится. Переходя в нер-ве (15) при $n\to\infty$ мы получим нер-во (14) #

36. Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном. Равномерная сходимость.

Пусть каждая ф-ция последовательности $\{f_n(x)\}$ интегрируема на [a,b]. Пусть так же функция f(x) , являющаяся предельной ф-цией, тоже интегрируема на [a,b]. Тогда ф-ция $(f(x) - f_n(x))^2 = f^2(x) - 2*f(x)*f_n(x)+f^2_n(x)$ будет так же интегрируема на этом отрезке.

__**Опр1**__. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем (или в среднеквадратичном) функции f(x) на [a,b] , если $\lim {}_a\int^b(f_n(x)-f(x))^2*dx = 0$ при $n \to\infty$. Т.к. $(f_n(x)-f(x))^2$ это норма, то это означает сходимость по норме.

__**Опр2**__. Говорят, что функциональный ряд ${}_{n=1}\sum^{\infty} U_n(x)$ сходится в среднем функции f(x) на [a,b] , если послед-ть его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится в среднем к его сумме S(x) на [a,b]. Если последовательность или ряд сходятся в среднем на [a,b] , то он сходится в среднем на любом [c,d]Є[a,b] .

Признак абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье:

__**Th**__. (достаточные условия равномерной сходимости) Пусть функция f(x) непрерывна на [-π;π] , имеет на этом отрезке кусочно-непрерывную производную , и удовлетворяет условию : f(π)=f(-π) . Тогда тригонометрический ряд Фурье ф-ции f(x) сходится к этой ф-ции на [-π;π] равномерно, причем так же равномерно сходится и ряд , составленный из модулей элементов этого ряда Фурье.

__**Док-во**__: доказательства теоремы достаточно доказать , что к функции f(x) сходится равномерно ряд : $|a_0|/2 + {}_{n=1}\sum^{\infty}(|a_n*\cos(nx)| + |b_n*\sin(nx)|)$ **(1)** . Воспользуемся мажорантным признаком Вейерштрасса (МПВ) :

1) $| a_n*\cos(nx)| \le |a_n|$
2) $| b_n*\sin(nx)| \le |b_n|$

Для доказательства теоремы достаточно доказать сходимость ряда ${}_{n=1}\sum^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ **(2)**

Найдем производную f '(x) : в точках , где f '(x) не существует , определим ее произвольно . Разложим f '(x) в ряд Фурье, обозначим коэффициенты ряда через α_n , β_n.

$\alpha_n = (1/\pi)*{}_{-\pi}\int^{\pi} f'(x)*\cos(nx)*dx =$ *{ cos(nx)=u , f '(x)*dx=d(f(x))=dv }* $= (1/\pi)*[(f(x)*\cos(nx))_{-\pi}|^{\pi} + n*{}_{-\pi}\int^{\pi} f(x)*\sin(nx)*dx] = 0 + n*(1/\pi)*{}_{-\pi}\int^{\pi} f(x)*\sin(nx)*dx = n*b_n$.

Аналогично : $\beta_n = (1/\pi)*{}_{-\pi}\int^{\pi} f'(x)*\sin(nx)*dx = -n*a_n$. => $|a_n| + |b_n| = |\alpha_n|/n + |\beta_n|/n$, и для доказательства сходимости ряда (2) нам нужно доказать сходимость ряда :

${}_{n=1}\sum^{\infty} (|\alpha_n|/n + |\beta_n|/n)$ **(3)** . Напишем тождественное равенство : $(|\alpha_n| - 1/n)^2 = |\alpha_n|^2 - (2/n)*|\alpha_n| + 1/n^2 \ge 0$ => $|\alpha_n|/n \le (\alpha_n^2 + 1/n^2)/2$. Аналогично $|\beta_n|/n \le (\beta_n^2 + 1/n^2)/2$.

=> мы получили , что : $|\alpha_n|/n + |\beta_n|/n \le (\alpha_n^2 + \beta_n^2)/2 + 1/n^2$. Ряд ${}_{n=1}\sum^{\infty}[(\alpha_n^2 + \beta_n^2)/2]$ сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции f '(x) по норме , а ${}_{n=1}\sum^{\infty} 1/n^2$ – это числовой сходящийся ряд (по интегральному признаку Коши-Маклорена). => ${}_{n=1}\sum^{\infty} [(\alpha_n^2 + \beta_n^2)/2 + 1/n^2]$ сходится , значит и сходится ряд (3) по МПВ. #

Замечание: Если f(x) , удовлетворяющую уславиям теоремы , периодически с периодом 2*π продолжить на всю числовую ось, то тригонометрический ряд Фурье будет сходится к такой функции на всей числовой оси.

37. Замкнутые ортогональные системы функций. Условие Парсеваля. Замкнутость тригонометр. системы.

Опр1. ОНС { ψ_k } наз. замкнутой, если $\forall$ f данного евкл. пр-ва R и $\forall\varepsilon>0$ найдется такая лин. комбин. конечного числа элементов { ψ_k }, отклон. которой от f (по норме пр-ва R) меньше ε.
Теорема 10.5. Если ортонормированная система{ ψ_k } является замкнутой, то для любого элемента f рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя переходит в точное равенство $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \| f \|^2$ называемое равенством Парсеваля.
Доказательство.
Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное положительное число ε. Так как система { ψ_k } является замкнутой, то найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \dots, C_n$, что $\|\sum_{k=1}^{n} C_k f_k - f\|^2 = \| f \|^2 < \varepsilon$. это означает, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n, для которого
$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$ (10.25)
Для всех номеров, превосходящих указанный номер n, неравенство (10.25) будет тем более справедливо, ибо при возрастании n сумма, стоящая в левой части (10.25) может только возрасти.

Итак, мы доказали, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, начиная с которого справедливо неравенство (10.25).
это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{n} f_k^2$ сходится к сумме $\| f \|^2$ #
Теорема 10.10. Тригонометрическая система { ψ_k } (10.11) является замкнутой т. е. для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[\pi, \pi]$ функции f(x) и любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен T(x) такой, что $\| f(x) - T(x) \| = (\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2dx)^{1/2} < \varepsilon$

38. Полные ортогональные системы функций. Теорема о полноте замкнутых ортогональных систем.
Опр2. Ортонорм сисит { ψ_k }, наз полной , если, кроме нулевого элемента не сущ ни какого др элем f данного евкл пр-ва, который был бы ортогон ко всем элем ψ_k системы { ψ_k }.
Th3. Всякая замкнутая ОНС является полной.
Док-во: Пусть{ ψ_k } – замкнутая ОНС, пусть $f \in R$, который ортогон. по всем элементам ψ_k, т.е. для $\forall$ k : $(f, \psi_k) = 0$ требуется доказать, что $f \equiv \mathbf{0}$.Очевидно, что $f_k = (\psi_k, f) = 0$, в силу равенства Парсеваля: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = \| f \|^2 \Rightarrow \| f \|^2 = 0$. причем по аксиоме $1 \Rightarrow f = \mathbf{0}$.

1. Аксиома 1: $\|A\| \geqslant 0$, причём $\|A\| = 0$ только при $A = 0$;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

39. Теорема о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье.

В этой теореме участвуют две формулы:
$S_n(x_0) = (1/\pi)*[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)*[(Sin(n+1/2)(x_0-x))/(2Sin((x_0-x)/2))]dx]$ (6)-интеграл Дирихле
$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} = (1/\pi)*[\int_0^{\pi}[f(x_0-t)+f(x_0+t)]*[(Sin(n+1/2))/(2Sin(t/2))]dt]$ (7)
Th. (Достаточное условие разлож. В ряд Фурье.)
Если ф-ия f(x) с $T = 2\pi$ кусочно непрерывна и кус. диф. на $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 числовой прямой и имеет сумму: $S_n(x_0) = S_0 = [f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$
Док-во:Равенство (7) т.е интеграл Дирихле имеет место для $\forall$ f(x) отвечающей условиям Th. в частности для $f(x) \equiv 1$. Тогда из (7) получим: $1 = (2/\pi)*[\int_0^{\pi}[(Sin(n+1/2)t)/(2Sin(t/2))]dt]$ (8). Умножим обе части на S_0. $S_0 = (1/\pi)*[\int_0^{\pi}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]*[(Sin(n+1/2)t)/(2Sin(t/2))]dt]$ Вычтим полученный результат из (7): $S_n(x_0) - S_0 = (1/\pi)*[\int_0^{\pi}[f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)]*[(Sin(n+1/2)t)/(2Sin(t/2))]dt]$ Достаточно доказать что при $n \to \infty$ инт. в правой части $\to 0$.
$(1/\pi)*[\int_0^{\pi}g(t)(Sin(n+1/2)t)dt]$ (9). Где $g(t) = [[(f(x_0+t) - f(x_0+0))/t] - [(f(x_0-t) - f(x_0-0))/-t]]*[(t/2)/(Sin(t/2))]$ (10)Если доказать чтоg(t) – кус непр то по лемме Римана предел(9) = 0 при $t \to \infty$.
Ясно что в прмеж $[0;\pi]$ непр всюду за искл быть может конечн числа точек, где может иметь точки разрыва первого рода.
Исследуем поведение g(t) при $t\to+0$ $\lim[(t/2)/(Sin(t/2))] = 1$ при $t\to+0$

39. Рассмотрим выражение в [] (в ф-ле 10).
1) x_0 – внутр точка прмеж непрерывности $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$
Каждое из слагаемых в [] будет иметь вид: $[(f(x_0+t) - f(x_0+0))/t]$ и $[(f(x_0-t) - f(x_0-0))/-t]$ (11)
Каждое из этих выр $\to f'(x_0)$, а $[]\to 0$.
2) x_0 – точка излома и одновр непр. В этом случае (11) справедливы, причем 1 $\to$ прав произв в x_0; 2 $\to$ лев произв в x_0. Значения произв конечны и различны.
3) x_0 – т-ка разрыва первого раода. Здесь мы получим аналогичный результат, с той лишь разницей, что в соотношении (11) вместо $f'(x_0)$ будет $f'(x_0-0)$, и $f'(x_0+0)$.
Таким образом мы доказали, что в $\forall$ случае $\exists$ конечный предел: $\lim g(t) = K$ при $t\to+0$, положим в т-ке t=0 g(0) =K Тогда мы получим непр ф-ии g(t) в t=0 $\Rightarrow$ g(t) явл ку непр на $[0;\pi] \Rightarrow$ согл лемме Римана инт в прав части (9) $\to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow \lim[S_n(x_0) - S_0] = 0 \Rightarrow S_n(x_0) \to S_n$ #

40. Представление функции интегралом Фурье. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций.

Пусть f(x) кус непр на $\forall$ промеж и абсол инт на всей прямой, значит $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ – существует. Пусть A > 0 - произв число, x_0 - произв т-ка. Рассмотрим интеграл:
$I(A, x_0) = (1/\pi)\int_0^A dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Cosz(U\text{-}x_0)dU$ (1)
Пусть задано B > 0, и ф-ия f(U) принадл классу C^0 на[-B;B], тогда исп теорему об инт по параметру инт зав от парам с конучными пределами $(1/\pi)\int_0^A dz\int_{-B}^{+B} f(U)Cosz(U\text{-}x_0)dU = (1/\pi)\int_{-B}^{B} f(U)dU\int_0^A Cosz(U\text{-}x_0)dz = (1/\pi)\int_{-B}^{B} f(U)[(SinA(U\text{-}x_0))/(U\text{-}x_0)]dU$ $(U \neq x_0)$ (2)
Замечание: Если f(U) кус непрер, то данные преобраз мы можем сделать для каждого участка непрерывности.
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Cosz(U\text{-}x)dU$ - Этот инт явл равном сход по парам Z, т.к. мажорируется интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(U)|dU$. Следовательно инт завис от парам: $\int_{-B}^{+B} f(U)Cosz(U\text{-}x_0)dU$ при $B \to +\infty$, $\to$ к своему пределу: $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Cosz(U\text{-}x_0)dU$(V.P-это главные значения).
Данный инт, в следств того что он мажорируется стремится к своему пределу равномерно.
Перейдем к пределу в (2) при $B\to+\infty$. В лев части этого

40. равенства в силу равном сходимости под знаком интеграла, откуда получим $I(A, x_0) = (1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)[(SinA(U\text{-}x_0))/(U\text{-}x_0)]dU$ – это и эсть то самое выраж, которое мы хотели получить.
Его можно преобразовать: $U - x_0 = t$: $I(A, x_0) = (1/\pi)\int_0^{+\infty}[f(x_0+t) + f(x_0\text{-}t)]((SinAt)/t)dt$ (3)
Интеграл Фурье для четных и нечетных функций.
Запишем формулу (1) в следующем виде: $f(x) = (1/\pi)\int_0^{+\infty} Coszxdz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)CoszUdU\ f(x) + (1/\pi)\int_0^{+\infty} Sinzxdz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)SinzUdU$

1) f(x)– четная

$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)CoszUdU = 2*\int_0^{+\infty} f(U)CoszUdU$
$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)SinzUdU = 0$
$f(x) = (2/\pi)\int_0^{+\infty} Coszxdz\int_0^{+\infty} f(U)CoszUdU$ (7)
аналогично для нечетного.
$f(x) = (2/\pi)\int_0^{+\infty} Sinzxdz\int_0^{+\infty} f(U)SinzUdU$ (8)
Пусть теперь ф-ия f(x) задана на $[0, +\infty]$, тогда продолжая эту ф-ию четным или нечетным образом на левую часть полупрямой, мы получим интеграл Фурье либо в виде (7) либо (8).

41. Комплексные формы записи интеграла Фурье.

Пусть вып услов представлени ф-ии f(x) интегралом Фурье (Кус непр, абс интегр) f(x) – всюду непр,а в точках разрыва ее знач будет: $f(x_0) = [f(x_0+0) + f(x_0\text{-}0)]/2$
Тогда для $\forall$ точки x будет справедл форма Фурье: $f(x) = (1/\pi)\int_0^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Cosz(U\text{-}x)dU$ (1)
Внутри интегр - четная ф-ия относ z $\Rightarrow$ Весь интегр можно переписать в виде: $f(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Cosz(U\text{-}x)dU$ (2)
Т.к. выполн. нер-во $|f(U)Sinz(U\text{-}x)| \le |f(U)|$, а $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(U)|dU$ сходится согласно мажорантному признаку Виерштрасса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Sinz(U\text{-}x)dU$ – сход равномерно на всей оси OZ. $\Rightarrow$
Для $\forall$ M > 0 $\exists$ $\int_{-M}^{M} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Sinz(U\text{-}x)dU = 0$ (4) $M\to+\infty$
Рассм (4) в смысле главного значения $VP\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)Sinz(U\text{-}x)dU = 0$ (5)
Умножим этот интеграл на (1/2i) и сложим с интегралом (2)
$f(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)[Cosz(U\text{-}x) + iSinz(U\text{-}x)]dU$
По формуле Эйлера: $f(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(U)e^{iz(u-x)}dU$ (6) – это и есть комплексная форма записи интеграла Фурье.

42. Преобразование Фурье. Синус- и косинус-преобразование Фурье.

$f(x) = (1/\pi)\int_0^{\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} [f(U)CoszUdU]$ (8)
$f(x) = (1/2\pi)VP\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} [f(U)e^{iz(U-x)}dU]$ (6)
Положим в последнем интеграле
$\Phi(z) = (1/(2\pi)^{1/2})\int_{-\infty}^{+\infty}[f(U)e^{izU}dU]$ (9)
$\Phi(z) = (1/(2\pi)^{1/2})VP\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(z)e^{-izx}dz]$ (10)
Опр1. Ф-ия Ф которая ставится в соответствие f по формуле $\Phi(x) = (1/(2\pi)^{1/2})\int_{-\infty}^{+\infty}[f(U)e^{ixU}dU]$ (11) наз. преобразованием Фурье ф-ии f, и обозначается символом F[f] или f^.
Опр2. Ф-ия Ф, которая ставится в соответствие ф-ии f по формуле $\Phi(x) = (1/(2\pi)^{1/2})VP\int_{-\infty}^{+\infty}[f(U)e^{-ixU}dU]$ (12) наз. обратным преобразованием Фурье, и обозначается символом $F^{-1}[f]$ или f.
Замечание:
Прямое и обратное преобразования Фурье – есть взаимообратные ф-ии:
$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$
Линейность преобразований Фурье.

42. Если для ф-ий f_1, f_2 $\exists$ прям. и обр. преобр. Фурье, то для $\forall$ α_1, α_2 $\exists$ прям. и обр. преобр. Фурье, для ф-ии $(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2)$, причем $F(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) = \alpha_1F[f_1] + \alpha_2F[f_2]$.
Следует из линейных св-в интеграла.
Синус- и Косинус- преобразования Фурье.
Пустьf(x),определена на $[0, +\infty]$ и представлена интегралом Фурье для ее четного продолжения $f(x) = (2/\pi)\int_0^{+\infty}[Coszxdz[\int_0^{+\infty} f(U)CoszUdU]]$ (7)
Введем обозначения $F_e(z) = ((2/\pi)^{1/2})\int_0^{+\infty} f(U)CoszUdU$ (15)
$f(x) = ((2/\pi)^{1/2})\int_0^{+\infty} F_e(z)Coszxdx$ (16) - называется Косинус-преобразованием Фурье для ф-ии f.
Аналогично, с помощью нечетного преобразования f получим интеграл Фурье в виде:
$f(x) = (2/\pi)\int_0^{+\infty}[Sinzxdz[\int_0^{+\infty} f(U)SinzUdU]]$ (8)
$F_s(z) = ((2/\pi)^{1/2})\int_0^{+\infty} f(U)SinzUdU$ (17)
$f(x) = ((2/\pi)^{1/2})\int_0^{+\infty} F_s(z)Sinzxdx$ (18)
Ф-ия F_s наз. Синус- преобразованием Фурье ф-ии f.
Заметим, что (16) и (18) дают и обратные преобразования Фурье (они симметричны).

43. Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена для рядов с неотрицательными членами.

Th Пусть $f(x)$ определена при любом $x \geq m$, и пусть она неотрицательна и монотонно убывает (m – фиксир-й номер). Тогда ряд $\sum f(n)$ $\{n{:}m,\ldots,\infty\}$ $=f(m)+f(m+1)+\ldots$ **(1)** сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл: $_m\int^{+\infty} f(x)*dx$

Док-во: не уменьшая общности, докажем Th для $m=1$. Пусть $x \in [k; k+1]$, т.е.: $k \leq x \leq k+1$. Тогда $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ (неравенства выполняются в следствии монотонности $f(x)$). $_k\int^{k+1} f(k)dx \geq {}_k\int^{k+1} f(x)dx \geq {}_k\int^{k+1} f(k+1)dx$, $f(k)*1 \geq {}_k\int^{k+1} f(x)*dx \geq f(k+1)*1$ Суммируя это нер-во от $k=1$ до $k=n$, получим:
$_{k=1}\sum^n f(k) \geq {}_1\int^{n+1} f(x)dx \geq {}_{k=1}\sum^n f(k+1)$ Обозначим через S_n ряд $_{k=1}\sum^n f(x)$
Тогда выполняется: $S_n \geq {}_1\int^{n+1} f(x)*dx \geq S_{n+1} - f(1)$ **(3)**
{ т.к. $\sum f(k+1)=f(2)+f(3)+\ldots+f(n+1)=[f(1)+f(2)+\ldots+f(n+1)]-f(1)$ }
Обозначим $\{a_n\} \equiv {}_1\int^{n+1} f(x)dx$, тогда $S_n \geq a_n \geq S_{n+1} - f(1)$ **(4)** => , что посл-ть a_n не убывающая; для её сход-ти необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченна. Для сходимости (1) необходимо и достаточно, чтобы $\{S_n\}$ была ограниченна, но из (4) => , что ограниченна $\{a_n\}$, т.е.

43. тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл
$_1\int^{+\infty} f(x)dx$ (т.к. $\lim a_n = {}_1\int^{+\infty} f(x)dx$) #

ПРИМЕР

Исследовать на сходимость ряд $\sum (1/n^\alpha)$
Пусть $\alpha>1$: $f(x)=1/x^\alpha$
$_1\int^{+\infty}(1/x^\alpha)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$

44. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка ряда Лейбница. Абсолютно условно сходящиеся ряды.

Знакопеременные ряды:

Пусть члены ряда $_{n=1}\sum^{+\infty} Un$ с изменением номера принимают как положительные, так и отрицательные значения. Такие ряды называются знакопеременными.

Знактчередующийся ряд:

Рассмотрим знакопеременный ряд такой, у которого «+» и «-» члены чередуются: $_{n=1}\sum^{+\infty}$ [(-1)^(n+1)]*Un (для любого n : Un > 0 (Un < 0))

Ряд Лейбница:

Опр. Рядом Леибница наз знакочередующийся ряд $\sum[(-1)^{(n+1)}]*Un$ (для любого n: Un > 0) , члены которого, взятые по модулю, образуют невозрастающюю бесконечно малую последовательность, т.е. :1) для любого n : $Un \geq Un+1 > 0$ **(2)**
2) $\lim Un = 0$ при $n \to \infty$ **(3)**

Th Лейбница : Ряд Лейбница сходится.

Док-во: Рассмотрим четные частичные суммы ряда Лейбница :$S_{2k} = {}_{n=1}\sum^{2k}$ [(-1)^(n+1)]*Un , т.е. $S_{2k} = (U_1-U_2) + (U_3-U_4) + \ldots +(U_{2k-1} - U_{2k})$ {здесь $Un \geq Un+1$}
=> выражения в скобках не отрицательны, => $S_{2k} \leq S_{2*(k+1)}$.
Это означает, что последовательность четных частичных сумм монотонно возрастает ; кроме того , частичные суммы S_{2k} можно записать : $S_{2k}=U_1-(U_2-U_3)-\ldots-((U_{2k-2}) -(U_{2k-1}))-U_{2k}$. Здесь выражения в скобках ≥ 0, $U_{2k} >0$. => $S_{2k} < U_1$,т.е. $\{S_{2k}\}$ ограниченна сверху. Т.к.

44. эта последовательность монотонно возрастает и ограниченна сверху, то она сходится .
Пусть $\lim S_{2k} = S$ при $k \to \infty$. Покажем, что нечетные частичные суммы ряды Лейбница сходится к тому же пределу: действительно $S_{2k+1} = S_{2k} +U_{2k+1}$. Но, т.к. ряд сходящийся и , =>, выполняется признак сходимости, то при $k \to +\infty$ $U_{2k+1} \to 0$, => $S_{2k+1} \to S$.#

Th(оценка остатка ряда Л-ца)
Любая частичная сумма Sn ряда Л-ца отличается от его суммы S на величину, меньшую члена ряда U_{n+1}, т.е. $| R_n | = | S-S_n | < | U_{n+1} |$.

Док-во : Докажем сначала, что для рядов Л-ца справедливо: для любого k : $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$.Т.к. S – это lim монотонно возрастающей посл-ти $\{S_{2k}\}$, то $S_{2k} \leq S$. В то же время $S_{2k+1}=S_{2k-1} +(-1)^{2k+1}*U_{2k}+ (-1)^{2k+1+1}*U_{2k+1}== S_{2k-1} – (U_{2k}-U_{2k+1})$ => $S_{2k+1} \leq S_{2k-1}$, это означает , что $\{ S_{2k-1} \}$ монотонно убывает. Т.к. S=lim $\{ S_{2k+1} \}$, от S – это есть еще и предел $\{ S_{2k-1} \}$, поэтому $S \leq S_{2k-1}$ и $S \leq S_{2k+1}$.
Т.о. $S_{2k} \leq S \leq S_{2k-1}$ (*) так же $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$ (**)
Далее, $S-S_{2k} \leq S_{2k+1} – S_{2k} = U_{2k+1}$ => $S - S_{2k} \leq U_{2k+1}$. Из (*) => , что $S_{2k-1} – S \leq S_{2k-1} – S_{2k} = U_{2k}$ ($S_{2k} – S \leq S_{2k-1} – S \leq S_{2k-1} – S_{2k} = U_{2k}$) , => $S - S_{2k} \leq U_{2k+1}$ => $S_{2k} - S \leq U_{2k}$ => $| S - S_n | \leq U_{n+1}$. #

Абсолютно и условно сходящиеся ряды:

Опр1. Ряд $\sum U_n$ **(1)** наз абсолютно схд-ся ,если сходится ряд $\sum|U_n|$ (2).

Th Если ряд сход-ся абсолютно, то он сход-ся .

Док-во: по критерию Коши : для того, чтобы (1) сходился , надо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n \geq N$ и любого $p \in \mathbf{N}$ (**N**-это мн-во натуральных чисел) : $|_{k=n+1}\sum^{n+p} U_k| < \varepsilon$.Т.к. (2) сход-ся , то на тех же условиях $_{k=n+1}\sum^{n+p}| U_k | < \varepsilon$. Т.к. $|_{k=n+1}\sum^{n+p} U_k| < {}_{k=n+1}\sum^{n+p}| U_k | < \varepsilon$, => ряд (1) сходится (по критерию Коши) #

Опр2. Ряд $\sum U_n$ наз сход-ся условно, если он сходится, а ряд $\sum|U_n|$ – расходится