1. Параметризация фигур

Введем понятие *параметра*. Под параметрами будем понимать независимые величины, позволяющие из множества выделить элемент либо подмножество элементов. Будем рассматривать множество фигур. Процесс задания параметров будем называть *параметризацией* фигуры. На чертежах параметры реализуются размерами либо геометрическими условиями, возникающими между элементами фигуры. Эти условия, воспринимаемые на изображении «на глаз», могут заменять собой числовые параметры. Например, в прямоугольном треугольнике угол, равный 90°, не указывается размером.

Измерение параметров производится с помощью систем параметризации, которые реализуются системами координат. Фигуры в геометрии будем рассматривать как множества точек.

Введем понятие *размерности*. Под размерностью будем понимать количество координат, определяющих точку в пространстве. Символ $\boldsymbol{R^n}$ будет обозначать пространство (фигуру), имеющую размерность $\boldsymbol{n}$, n-мерную фигуру или пространство.

Так пространство $\boldsymbol{R^0}$ является «нульмерным» и представляет собой точку. Пространство $\boldsymbol{R^1}$ – одномерное и представляет собой линию. Соответственно $\boldsymbol{R^2}$ и $\boldsymbol{R^3}$ представляют собой двух- и трехмерное пространства, реализуемые поверхностью либо объемной фигурой.

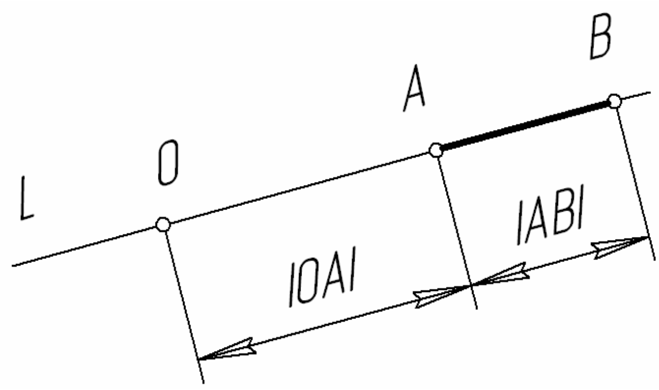

Рис. 1

На *рис. 1* в качестве пространства $\boldsymbol{R^1}$ взята прямая линия *L*. Для выделения на прямой единственной точки введём систему параметризации в виде произвольной точки *O* на прямой *L*. Будем рассматривать только правую от точки *O* часть прямой. Тогда параметром любой точки *A*, не совпадающей с точкой *O*, будет величина отрезка */OA/*.

Такая же точка может быть найдена влево от точки *O*.

В математике эти две точки различаются знаками. В чертежах отрицательные параметры применяются крайне редко, а однозначность выбора точки определяется непосредственно по изображению.

На прямой можно выбрать подмножество точек в виде отрезка. При этом обычно указываются параметр одной из точек и длина отрезка (*см. рис. 1*, отрезки */OA/* и */AB/*). Заметим, что параметр */OA/* изменяется по мере перемещения отрезка AB по прямой l. Это параметр положения, он отсчитан от неподвижной точки O системы параметризации. Параметр $|AB|$, реализующий длину отрезка, отсчитан от точки A, принадлежащей отрезку. Параметр $|AB|$ остается неизменным при перемещении отрезка. Это параметр величины.

Из сказанного можно сделать общий вывод.

При выделении параметров положения фигуры выбирается система параметризации вне фигуры, не зависящая от фигуры. Если же выбирается параметр формы, то выбирается система параметризации в самой фигуре. Заметим также, что факт принадлежности точки к линии в пространстве $\boldsymbol{R}^1$ непосредственно следует из изображения. Принадлежность точки плоскости либо поверхности непосредственно из изображения плоскости и поверхности установить не удается. Точку приходится определять как результат пересечения двух линий, принадлежащих плоскости либо поверхности.

На *рис. 2* изображена система параметризации в плоскости. Это система прямоугольных декартовых координат. Из *рис. 2* видно, что в общем случае точка A определяется в пересечении двух прямых, отрезки которых (абсцисса и ордината) являются параметрами положения точки. Эти параметры могут заменяться геометрическими условиями в случаях принадлежности точки уже заданной точке либо линии. Так, например, точка C, принадлежащая линии OY, задается одним параметром, значение которого есть ордината точки C.

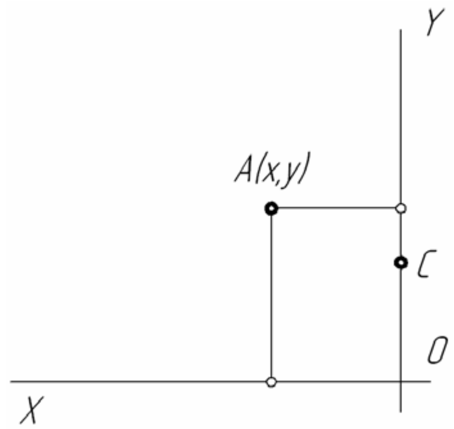

Рис. 2

На *рис. 3* показаны примеры параметризации в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ различно расположенных фигур, в частности, прямых и окружностей.

Окружность имеет один параметр формы – величину радиуса либо диаметра. Положение окружности задается двумя параметрами, которые реализуются координатами центра.

Конечно, количество этих параметров зависит от наличия геометрических условий расположения центра.

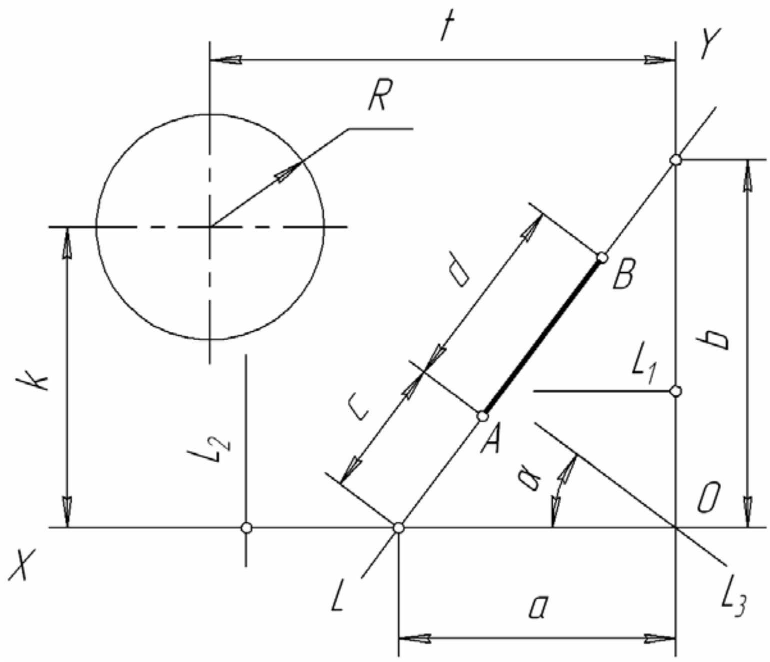

Рис. 3

В *табл. 1 и 2* приведены типичные примеры параметризации простейших фигур и замены параметров геометрическими условиями.

Таблица 1

Таблица геометрических условий и эквивалентных им параметров в двухмерном пространстве

Геометрическое условие	**Параметр**
Принадлежность точки линии	1
Параллельность прямых	1
Перпендикулярность прямых	1
Касание фигур	1
Касание в заданной точке	2

Таблица 2

Таблица параметров фигур в двухмерном пространстве

Наименование фигуры	K^f	K^p	ΣK
Точка	–	2	2
Прямая	–	2	2
Отрезок прямой	1	3	4
Окружность	1	2	3
Многоугольник, имеющий *n*-вершин	$2n – 3$	3	$2n$
Кривая 2-го порядка	2	3	5

На *рис. 4* показан пример параметризации произвольного четырехвершинника с помощью восьми параметров положения его сторон. При этом форма фигуры воспринимается с помощью изображения, т. к. числовые параметры формы не заданы, в то же время положение фигуры задано. Можно было бы не указывать и параметры положения сторон фигуры. Её форма и положение воспринималось бы с помощью изображения фигуры. В этом случае говорят, что фигура задана с точностью до ее изображения.

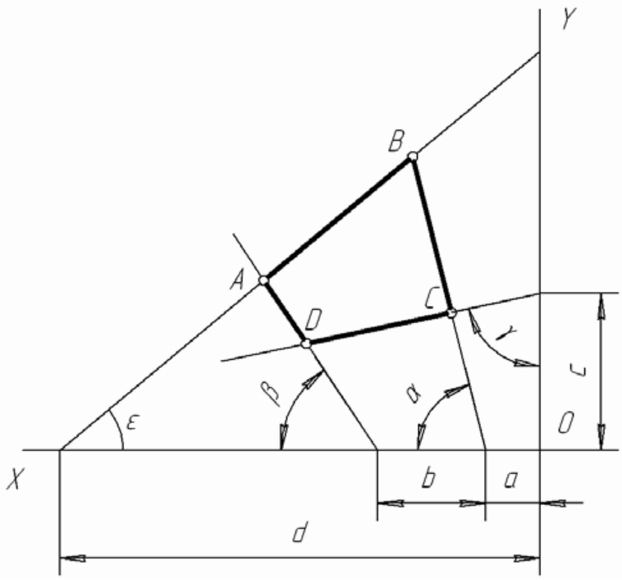

Рис. 4

На *рис. 5* к той же параметризуемой фигуре присоединена система $o^{\text{ф}} x^{\text{ф}} y^{\text{ф}}$ параметризации формы. Одна из вершин фигуры использована в качестве начала координат, а одна из сторон – в качестве оси координат.

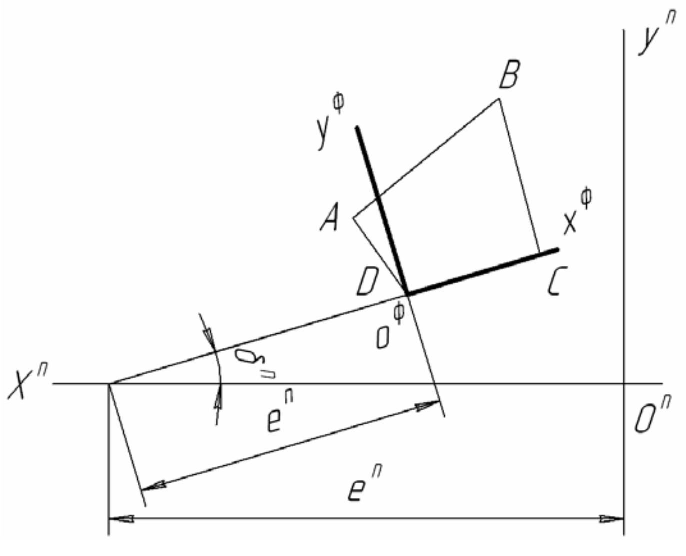

Рис. 5

Как видно из *рис. 5 и 6*, на параметризацию формы фигуры затрачено пять параметров. Оставшиеся три параметра задают систему $o^{\phi}x^{\phi}y^{\phi}$ относительно системы $o^{п}x^{п}y^{п}$. Поскольку выбрана произвольная фигура, а системы координат объективны, можно сделать вывод, что максимальное количество параметров положения задающих фигуры в $\boldsymbol{R}^2$ не превышает трех.

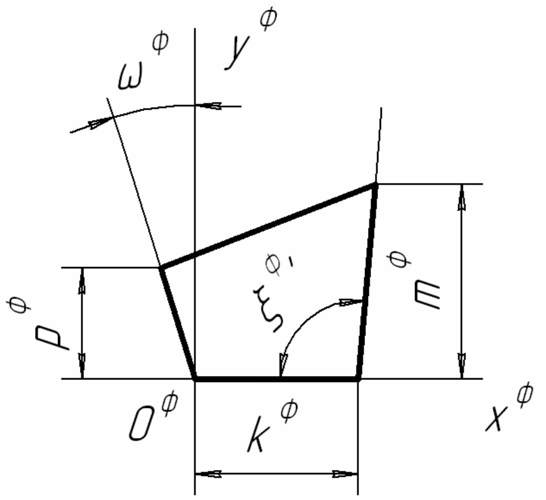

Рис. 6

Это число может быть уменьшено за счет геометрических условий положения упомянутых выше систем координат. При параметризации форм фигур можно считать, что эти две системы координат совпадают за счет выбора их с выполнением геометрических условий расположения, эквивалентным трем параметрам (на *рис. 6* такими условиями являются совпадение начала координат с вершиной фигуры и совпадение одной из осей координат со стороной фигур).

Заключая рассмотрение параметризации в пространстве $\boldsymbol{R}^2$, отметим, что до сих пор размерность параметризуемых фигур и размерность их изображений были одинаковы.

При параметризации фигур в трехмерном пространстве размерность параметризуемой фигуры не совпадает с размерностью изображения. Требуется операция отображения фигуры из трехмерного пространства в двумерное. Изображение фигуры будет обратимым, если на нём удается сохранить параметры и геометрические условия, формирующие фигуру. Часто это удается сделать не на одном изображении фигуры, а на нескольких. Полученный чертеж и является обратимым. В трехмерном пространстве система координат состоит из 3 плоскостей, пересекающихся в одной точке O – начале координат (*рис. 7*). Попарно плоскости координат пересекаются по трем прямым – осям координат. Оригиналы, помещенные в трехмерное пространство, могут пересекаться с плоскостями координат.

Фигура пересечения называется следом. Например, на *рис. 7* прямая L пересекает плоскости Oxy и Oxz соответственно в точках M и N, которые являются горизонтальным и фронтальным следами.

Эти следы задают прямую четырьмя параметрами. Отрезок $|BC|$ прямой L требует задания еще одного параметра положения (например, $|MB|$, а также параметра формы отрезка – его длины $|BC|$).

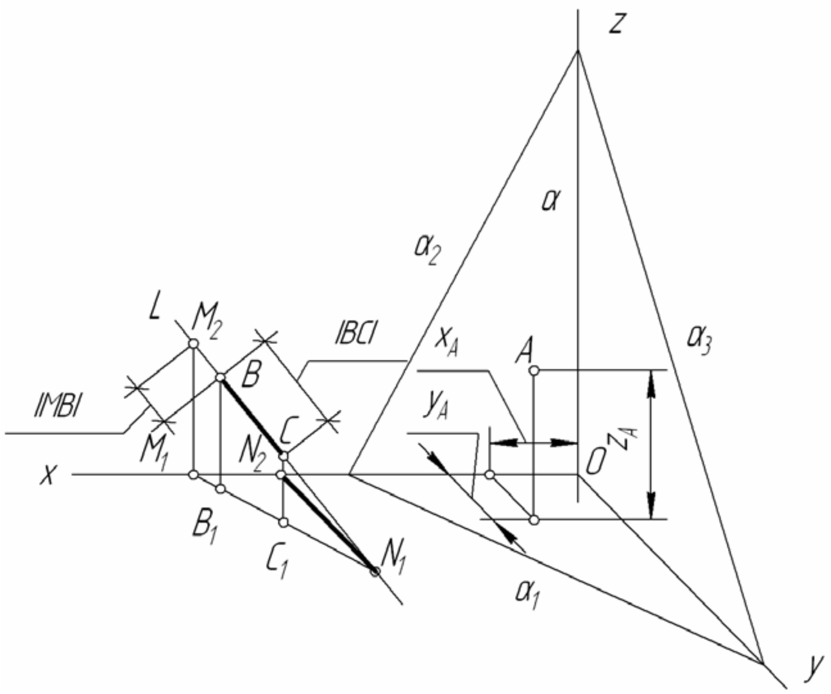

Рис. 7

Аналогично плоскость α может быть задана тремя параметрами, реализуемыми тремя точками пресечения плоскости с осями координат и, соответственно, следами – прямыми, соединяющими эти точки (*рис. 7*). Произвольная точка A задается тремя координатами. Линии, реализующие эти координаты, составляют ломаную x_A, y_A, z_A, называемую координатой ломаной.

По аналогии с пространством $\boldsymbol{R^2}$ можно определить максимально возможное количество параметров положения произвольной фи-гуры относительно произвольной системы координат.

На *рис. 8* условно изображена фигура Φ, форма которой параметризована в системе $O^{\Phi}x^{\Phi}y^{\Phi}z^{\Phi}$.

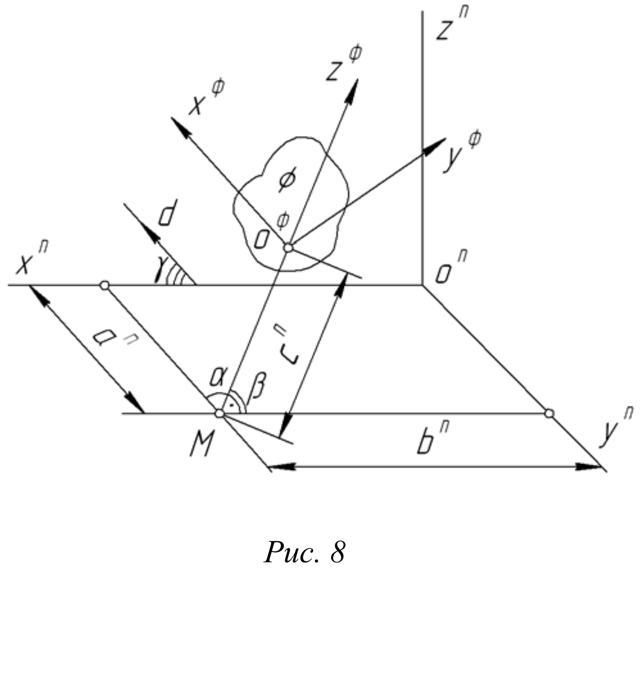

Рис. 8

Положение фигуры описывается шестью параметрами положения системы $O^{ф}x^{ф}y^{ф}z^{ф}$ относительно системы $O^{п}x^{п}y^{п}z^{п}$, в которой реализуются параметры положения $a^{п}$, $b^{п}$, $c^{п}$,α, β, γ ($O^{ф}x^{ф} \parallel d$; $d \wedge O^{п}x^{п} \supset \gamma$). Путем введения геометрических условий можно уменьшить количество параметров положения от шести до ноля. В последнем случае обе системы координат совпадают.

Для параметризации более сложных фигур необходимо выделять их определитель и его параметризовать. Определитель фигуры состоит из двух частей – *геометрической (ГЧО)* и *алгоритмической (АЧО)*. Поясним сказанное на простейшем примере.

Так у прямой линии ГЧО состоит из двух произвольных точек. АЧО включают операции с линейкой и карандашом. Сложнее выделить части определителя у поверхности. Для этого надо представить образование поверхности через конечный набор линий и точек.

Например, образование произвольной цилиндрической поверхности можно представить как непрерывное перемещение прямой линии L параллельно направлению ℓ с пересечением в каждой точке кривой N. При этом прямая L называется образующей, а прямая ℓ и кривая N – направляющими. Это решение не единственное, можно образовать цилиндр исходя из других соображений, например, поменять местами образующие и направляющие и т. д. Конечный набор образующих на поверхности называется ее каркасом.

Так каркас цилиндра, показанного на *рис. 9*, может быть образован конечным набором линий L либо линий N, либо теми и другими (сетчатый каркас).

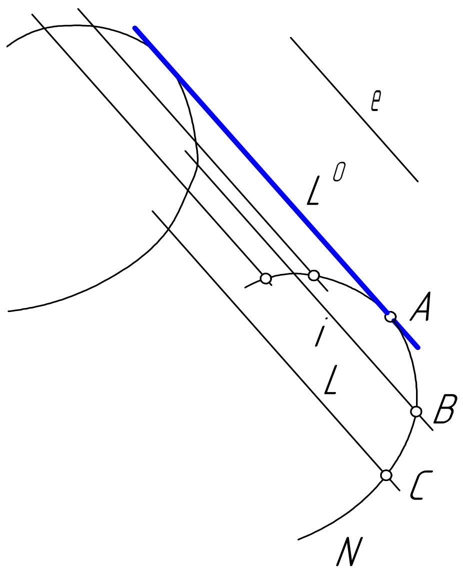

Рис. 9

На *рис. 10* показано образование конической поверхности. Здесь также легко можно выделить ГЧО и АЧО определителя поверхности конуса. Если параметризовать ГЧО фигуры и знать АЧО, тогда чертеж поверхности, снабженный размерами, реализующими параметры ГЧО, будет обратимым.

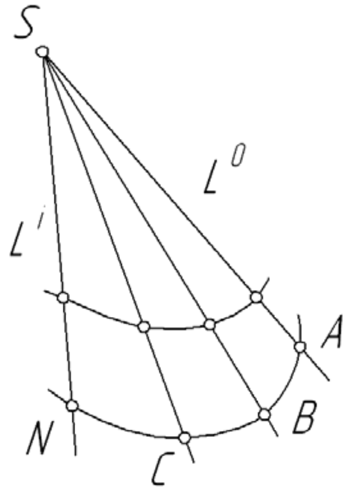

Рис. 10

На *рис. 11* показано выделение параметров простейших фигур в трехмерном пространстве.

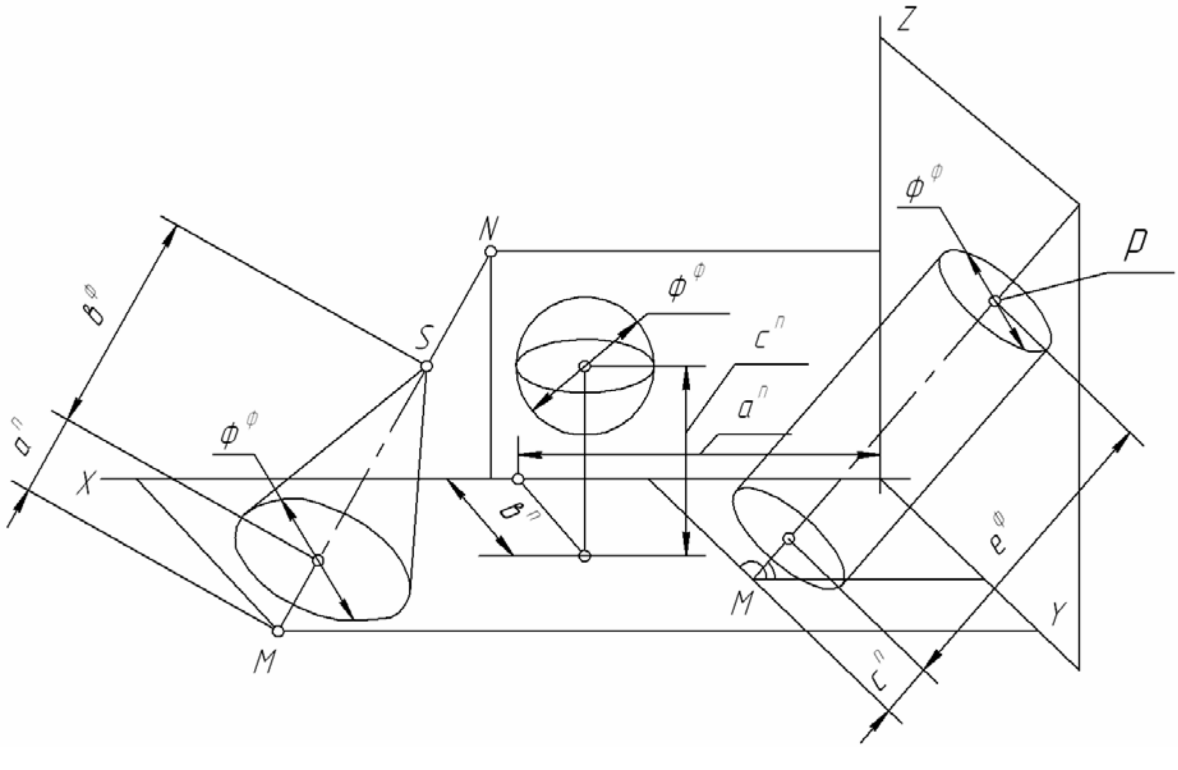

Рис. 11

Табл. 3 и 4 для трехмерного пространства аналогичны по структуре *табл. 1 и 2*.

Таблица 3

Таблица геометрических условий и эквивалентных им параметров в трехмерном пространстве

Геометрическое условие	**Параметр**
Принадлежность точки линии	2
Принадлежность точки плоскости	1
Перпендикулярность прямой и плоскости	2
Перпендикулярность плоскостей	1
Параллельность прямых	2
Параллельность плоскостей	2
Параллельность прямой плоскости	1
Касание фигур	1
Касание в заданной точке	3

Таблица 4

Таблица параметров в трехмерном пространстве

Наименование фигуры	K^f	K^p	$\sum K$
Точка	–	3	3
Прямая	–	4	4
Отрезок прямой	1	5	6
Плоскость	–	3	3
Многогранник с n-вершинами и треугольными гранями	$3n-6$	6	$3n$
Многогранник с n-вершинами и m-не треугольными гранями	$3n-6-\sum_{1}^{m} r_m$	6	$3n-\sum_{1}^{m} r_m$
Сфера	1	3	4
Цилиндр вращения бесконечный	1	4	5
Цилиндр вращения ограниченный	2	5	7
Конус вращения усеченный	3	5	8
Поверхность 2-го порядка	≥ 3	≥ 6	≥ 9

Рассмотрим практическое применение параметризации на одном из важных в инженерной графике примерах.

В ЕСКД одним из основных стандартов является ГОСТ 2.307-68, в котором рассматриваются правила нанесения размеров на чертежах. Одним из основных требований этого стандарта является п. 1.2 «Общее количество размеров на чертеже должно быть минимальным, но достаточным для изготовления и контроля изделия». Изложенные здесь сведения о параметрической теории позволяют сделать вполне определенным процесс нанесения размеров на чертеже и минимизацию их по количеству.

Пусть имеется плоская фигура (*рис. 12*). Требуется нанести на изображении минимальное количество размеров, необходимых для геометрического построения фигуры. Разобьем фигуру на простейшие фигуры, на *рис. 12* это части окружностей и прямых. На *рис. 12* окружности обозначены символом O_i, i = 1, 2, 3, ... , а прямые – символом $П_i$.

Отнесем фигуру к системе координат *Oxy*. Последнюю выберем так, чтобы не менее трех параметров были заменены геометрическими условиями.

Центр окружности *O1* совмещён с началом координат, что эквивалентно заданию двух параметров. Центр окружности *O3* совмещён с осью *Ox*, что эквивалентно одному параметру.

Осуществим параметризацию элементов фигуры, учитывая геометрические условия.

На *рис. 12* центры окружностей *O1* и *O3* заданы точкой *O* и размером *L1*. Прямая *П2* касается этих окружностей и не требует задания размеров. Далее, окружность *O5* имеет центр, заданный размерами *L2* и *L3* . Окружность *O4* касается окружностей *O3* и *O5*, и её центр определён этими условиями. Конечно, у всех окружностей должны быть заданы радиусы. Точку *O7* рассматриваем как окружность с радиусом равным нулю,

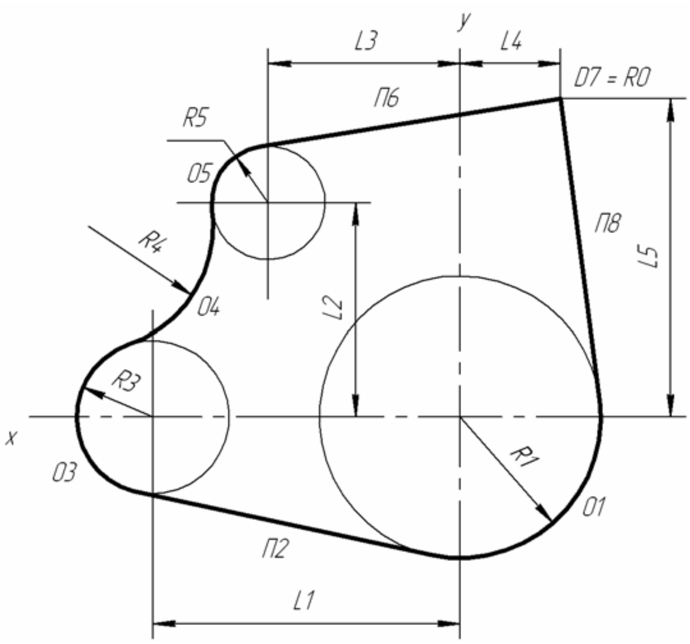

Рис. 12

тогда прямые *П6* и *П8* заданы прохождением через заданную точку *07* и касанием окружностей *05* и *01*. Задача решена.