Числовые ряды

- Основные понятия
- Основные теоремы о сходящихся рядах
- Необходимый признак сходимости ряда
- Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами
- Знакочередующие ряды

Основные понятия

Пусть задана бесконечная числовая последовательность:

$u_{1,} u_{2,} u_3 \ldots u_n \ldots,$ где $u_n = f(n).$

Бесконечным числовым рядом называется выражение:

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n + \ \ldots$

члены ряда

общий член ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Сумму n первых членов ряда называют
n - ой частичной суммой ряда.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

Основные понятия

Ряд называется ***сходящимся*** если его n - я частичная сумма S_n, при неограниченном возрастании n , стремится к конечному пределу, т.е. если существует конечный предел.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

сумма ряда

Если $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

или не существует, то ряд называется ***расходящимся*** и суммы не имеет.

Основные понятия

Пример Рассмотрим ряд геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n + \ldots$$

знаменатель прогрессии

первый член прогрессии

n - ая частичная сумма ряда: $S_n = \dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

Рассмотрим отдельные случаи:

1 $|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$ - ряд сходится

2 $|q| > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ - ряд расходится

Основные понятия

3 $q = 1 \quad \Rightarrow \quad b + b + b + \ldots$

$S_n = b \cdot n \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} bn = \infty$ - ряд расходится

4 $q = -1 \quad \Rightarrow \quad b - b + b - b + \ldots$ - предел не существует, ряд расходится

Следовательно, ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n$ сходится при $|q| < 1$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

называемый гармоническим, расходится

Основные теоремы о сходящихся рядах

1. На сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов, т.е. если сходится ряд получившийся из данного ряда отбрасыванием нескольких его членов, то сходится сам данный ряд.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и сумма его равна S то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ также сходится и сумма его равна $C \cdot S$, где C - постоянная.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также сходится и сумма его равна S_1+S_2.

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема Если ряд сходится то его *n* - й член стремится к нулю, при *n* стремящимся к бесконечности.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ***, то ряд расходится***

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Ряд с положительными членами: $u_n > 0$ - для любого *n*

Признак Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Допустим существует предел:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k}$$

$k < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

$k > 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$k = 1 \Rightarrow$?

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots$$

$$u_n=\frac{n}{2^n}; \qquad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot n}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1 \quad \Rightarrow$$

ряд сходится

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признак Коши

Пусть дан ряд с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Допустим существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$$

$k < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

$k > 1 \Rightarrow$ ряд расходится

$k = 1 \Rightarrow$?

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n+1}\right)^n$

$$u_n = \left(\frac{n}{5n+1}\right)^n \qquad \sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{5n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{1}{n}} = \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow$$

ряд сходится

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Интегральный признак сходимости

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причем

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n$$

Пусть также $f(x)$ - непрерывная монотонно убывающая функция, такая что $f(n) = u_n$.

Тогда данный ряд и интеграл

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся и расходятся.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

Такой ряд называется ***обобщенный гармонический ряд***

Рассмотрим функцию: $f(x) = \frac{1}{x^k}$ при $x \geq 1.$

Эта функция монотонно убывает и непрерывна. Следовательно условие интегрального признака соблюдены.

$$f(n) = \frac{1}{n^k} = u_n$$

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим случай, когда $k \neq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-k}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-k}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{k-1}} - 1\right)$$

$= \dfrac{1}{k-1}$ - при $k > 1$ – ряд сходится

$= \infty$ - при $k < 1$ – ряд расходится

При $k = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$$

- ряд расходится

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Для этих рядов справедливо:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \le v_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \text{ - сходится} \end{array} \right. \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ также сходится}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \ge v_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \text{ - расходится} \end{array} \right. \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ также расходится}$$

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - ряд, который выбирается для сравнения и про который должно быть известно, сходится он или расходится.

Ряды, которые обычно выбираются для сравнения:

1. Ряд геометрической прогрессии: $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

   сходится при $|q| < 1$

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

   сходится при $k > 1$

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \qquad u_n=\frac{1}{n^n}$$

Выберем для сравнения ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ $\qquad v_n=\frac{1}{2^n}$

Ряд сходится, так как это геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q=\frac{1}{2}<1$$

$$\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}$$

Неравенство выполняется для всех членов ряда, начиная с третьего, значит ряд u_n также сходится по признаку сравнения.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{28} + \frac{1}{128} + \ldots \qquad u_n = \frac{1}{5^n+3}$$

Выберем для сравнения ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots \qquad v_n = \frac{1}{5^n}$

Ряд сходится, так как это геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q = \frac{1}{5} < 1$$

$$\frac{1}{5^n+3} < \frac{1}{5^n}$$

Неравенство выполняется для всех членов ряда, значит ряд u_n также сходится по признаку сравнения.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Второй признак сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Для этих рядов справедливо:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k \\ k \neq 0; \quad k \neq \infty \end{cases} \Rightarrow$$

Ряды u_n и v_n одновременно сходятся и расходятся.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

$u_n = \sin\frac{1}{n}$ Выберем для сравнения ряд: $v_n = \frac{1}{n}$

Ряд v_n - гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{n} = t; \quad n \to \infty \Rightarrow t \to 0\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow$$

ряд u_n – также расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Пример Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+5}$

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3+5} \qquad l = 3;\, m = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3-1 = 2$$

Выберем для сравнения ряд: $v_n = \frac{1}{n^2}$

Ряд v_n - обобщенный гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

сходится, так как $k = 2 > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^3+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2}{n^3+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n^2}} = 2 \quad \Rightarrow$$

ряд u_n – также сходится.

Знакопеременные ряды

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены называются ***знакопеременными***

Пусть дан знакопеременный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *(1)*

Рассмотрим также ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$ *(2)*

– ряд составлен из модулей всех членов ряда *(1)*.

Знакопеременные ряды

Определения

- Знакопеременный ряд *(1)* называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд *(4).*

- Ряд *(1)* называется ***условно сходящимся***, если он сам сходится, а ряд *(4),* расходится.

Знакочередующиеся ряды

Ряд называется ***знакочередующимся***, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \qquad (1)$$

положительные числа (модули членов ряда)

Достаточным признаком сходимости знакочередующегося ряда является **признак Лейбница**.

Теорема Знакочередующийся ряд *(1)* сходится если:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (3)$$

Знакочередующиеся ряды

Пример 1 Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Для этого ряда справедливо:

$$\left\{\begin{array}{l} 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$ ряд сходится.

Данный ряд сходится условно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

составленный из модулей членов ряда - расходится

Знакочередующиеся ряды

Пример 2 Исследовать ряд сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n^4+n-1}$$

Исследуем ряд на сходимость по признаку Лейбница:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{5} > \frac{2}{81} > \frac{3}{407} > \frac{4}{1283} > \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5n^4+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}} = \frac{0}{5} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ ряд сходится.