ГЛАВА 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Числовые множества

1.1. Основные понятия теории множеств

В математике понятие ***множество*** используют для описания ***совокупности*** предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличать друг от друга и от предметов, не входящих в данную совокупность. Например, можно говорить о множестве книг в данной библиотеке, множестве вершин данного многоугольника, множестве всех звезд, входящих в созвездие Большой Медведицы и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а элементы множества – строчными буквами $a, b, c, \ldots$.

Факт принадлежности элемента a множеству A записывается:

$$a \in A,$$

а отрицание этого факта:

$$a \notin A.$$

Множество называется:

- ***конечным***, если оно содержит конечное число элементов;
- ***бесконечным***, если оно содержит бесконечное число элементов;
- ***пустым*** и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит ни одного элемента.

Множество можно задать либо ***перечислением*** всех его элементов:

$$A = \{a, b, c\},$$

либо указанием характеристического свойства его элементов:

- множество студентов АнГТУ;
- множество решений уравнения $x^2 - 1 = 0$, т.е. множество, состоящее из двух элементов: 1 и -1;
- множество всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $3 < x < 7$, записывается так:

$$X = \{x : 3 < x < 7\}.$$

1.2. Числовые множества

В математике (алгебре) чаще всего приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называются ***числовыми***.

<u>Определение 1.</u> Числа $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных, называются ***натуральными***.

Обозначаются ***натуральные числа*** буквой N, т.е.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Натуральные числа $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, противоположные им числа $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ и число 0 (нуль) образуют множество ***целых*** чисел. Обозначаются ***целые числа*** буквой Z:

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

<u>Определение 2.</u> Числа, которые можно представить в виде $\dfrac{m}{n}$, где m – целое число $(m \in Z)$, а n – натуральное число, называются ***рациональными числами***.

Обозначаются рациональные числа буквой Q.

Таким образом, ***рациональные числа***:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}.$$

Всякое ***рациональное число*** является либо целым, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью.

Например,

$$\frac{5}{1}=5,\ \frac{6}{2}=3,\ \frac{5}{4}=1{,}25,\ \frac{3}{10}=0{,}3,\ \frac{-3}{10}=-0{,}3,\ \frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0,(3).$$

Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются ***иррациональными числами. Иррациональные числа*** обозначаются буквой I. Это числа

$$\sqrt{2}=1{,}414211356\ldots;$$

$$\pi=3{,}14159265\ldots,$$

где $\pi=\dfrac{l}{d}$ – отношение длины (l) окружности к ее диаметру (d) и т.д.

Совокупность всех ***рациональных*** и ***иррациональных*** чисел называется множеством ***действительных*** (или ***вещественных***) ***чисел***. Обозначаются ***действительные числа*** буквой R.

Действительные числа можно изображать точками ***числовой оси***.

<u>Определение 3.</u> Числовой осью называется бесконечная прямая, на которой выбраны:

1) некоторая точка O, называемая началом отсчета,

2) положительное направление, которое указывается стрелкой,

3) масштаб для измерения длин.

Наряду с понятием числовая ось используют понятие координатная прямая.

Чаще всего числовую ось располагают горизонтально и положительное направлении выбирают слева направо (рис. 1).

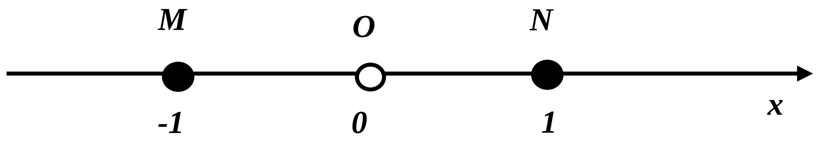


Рисунок 1

Точка ***O*** изображает число нуль. Очевидно, что каждое действительное число изображается определенной точкой числовой оси. Два различных действительных числа изображаются различными точками числовой оси. Например, точке ***M*** соответствует число -1. Число -1 называется координатой точки ***M*** и обозначается $M(-1)$. Рассуждая аналогично, получаем, что координата точки ***N*** равна 1, т.е. $N(1)$.

Таким образом, множество ***действительных чисел*** – это множество чисел $(-\infty,+\infty)$.

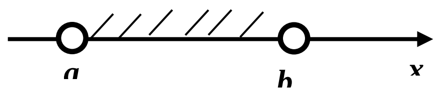
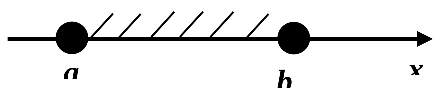
1.3. Числовые промежутки

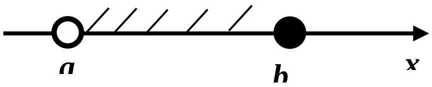
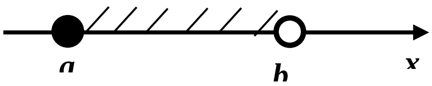
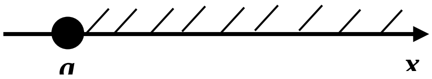
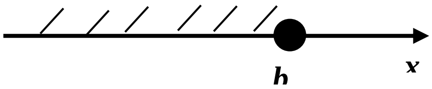
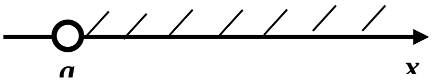
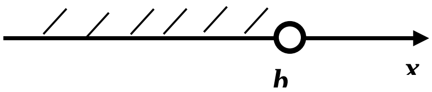
Возьмем два действительных числа a и b, такие, что $a<b$.

<u>Определение 4.</u> Множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам, называется ***числовым промежутком***.

Виды числовых промежутков представлены в таблице 1.

Таблица 1

Вид промежутка	**Геометрическое изображение**	**Обозначение**	**Запись с помощью неравенства**
Интервал (открытый промежуток)		$(a;b)$	$a<x<b$
Отрезок (закрытый промежуток)		$[a;b]$	$a\le x\le b$

Полуинтервал (открытый слева)		$(a;b]$	$a<x\le b$
Полуинтервал (открытый справа)		$[a;b)$	$a\le x<b$
Луч		$[a;+\infty)$	$x\ge a$
Луч		$(-\infty;b]$	$x\le b$
Открытый луч		$(a;+\infty)$	$x>a$
Открытый луч		$(-\infty;b)$	$x<b$

1.4. Модуль действительного числа

<u>Определение 5.</u> ***Модулем*** (***абсолютной величиной***) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям:

$$|x| = x, \quad \text{если} \quad x \ge 0;$$
$$|x| = -x, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Например,

$|2| = 2$, так как $2 > 0$;

$|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7$, так как $-3{,}7 < 0$;

$|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi - 3 > 0\ (\pi = 3{,}14\ldots)$.

Геометрически $|x|$ означает расстояние на координатной прямой от точки x до точки O (рис. 2).

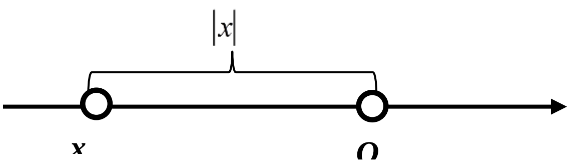


Рисунок 2

Свойства модулей:

1. $|x| \ge 0$.

2. $|x| = |-x|$.

3. $|x\,y| = |x| \cdot |y|$.

4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad y \ne 0$.

5. $|x|^2 = x^2$.

Если x и y – две точки координатной прямой, то ***расстояние*** между ними $\rho(x;y)$ выражается формулой:

$$\rho(x;y) = |x-y| \text{ (рис. 3).}$$

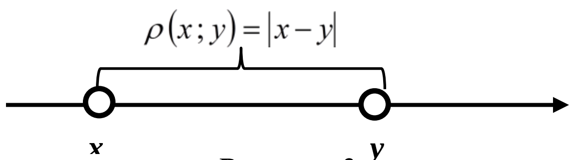


Рисунок 3

Например, $\rho(-2;5) = |-2-5| = |-7| = -(-7) = 7$; $\rho(1;10) = |1-10| = |-9| = -(-9) = 9$.

1.5. Правила действий над действительными числами

1. Сумма двух чисел одного знака есть число того же знака.

<u>Правило 1.</u> Чтобы найти сумму двух чисел одного знака, надо сложить модули слагаемых.

Например,

$$(+11) + (+9) = +20,$$
$$(-11) + (-9) = -20.$$

2. Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем.

<u>Правило 2.</u> Чтобы найти модуль суммы двух чисел с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и поставить знак большего модуля.

Например,

$$(+11) + (-9) = +(11-9) = 2,$$
$$(-11) + (+9) = -(11-9) = -2.$$

3. Разность двух чисел

<u>Правило 3.</u> Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например,

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20,$$
$$11 - (+9) = 11 + (-9) = +(11-9) = 2.$$

4. Произведение (частное) двух чисел одного знака есть число положительное, а произведение (частное) двух чисел разного знака есть число отрицательное.

<u>Правило 4.</u> Чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) модули данных чисел.

Например,

$$(-11)\cdot(-9) = +11\cdot 9 = 99,$$
$$(-36):9 = -\frac{36}{9} = -4.$$

Пример 1.

Вычислить:

1) $3{,}2 - 10 = 3{,}2 + (-10) = -(10 - 3{,}2) = -6{,}8$ – в данном примере рассматриваем разность двух чисел: применяем правило 3, а затем 2.

2) $-13{,}1 + 23{,}1 = +(23{,}1 - 13{,}1) = 10$ – в данном примере рассматриваем сумму двух чисел с разными знаками: применяем правило 2.

3) $-13{,}1-23{,}1=-13{,}1+(-23{,}1)=-(13{,}1+23{,}1)=-36{,}2$ – в данном примере рассматриваем разность двух чисел: применяем правило 3, а затем 1.

5. Правило раскрытия скобок

Правило 5. Если перед скобкой стоит знак «+», то, раскрывая скобки, нужно сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки.

Например,

$$2{,}3+(15{,}6-11)=2{,}3+15{,}6-11=17{,}9-11=6{,}9.$$

Правило 6. Если перед скобкой стоит знак «-», то, раскрывая скобки, нужно знаки слагаемых поменять на противоположные.

Например,

$$36{,}28-(-29{,}77+36{,}28)=36{,}28+29{,}77-36{,}28=(36{,}28-36{,}28)+29{,}77=29{,}77.$$