Долгов А.Н.

ОПТИКА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

АТОМНАЯ ФИЗИКА

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Москва 2009

УДК ??????
ББК ??????
Д ?????

Долгов А.Н. Оптика. Основы теории относительности. Атомная физика. Физика атомного ядра. – М.: НИЯУ МИФИ – 172 с.

Аннотация будет ???

ISBN ?????

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Геометрическая оптика 4
§ 1. Законы геометрической оптики (Введение) 4
§ 2. Прямолинейное распространение света (Задачи) 10
§ 3. Преломление света. Полное внутреннее отражение (Задачи) 19
§ 4. Тонкие линзы (Введение) 29
§ 5. Линзы (Задачи) 33

Глава 2. Физическая оптика 52
§ 6. Волновая оптика (Введение) 52
§ 7. Скорость света в среде (Задачи) 59
§ 8. Интерференция (Задачи) 62
§ 9. Дифракция (Задачи) 77
§ 10. Квантовая оптика (Введение) 84
§ 11. Фотоны (Задачи) 89
§ 12. Давление света (Задачи) 97
§ 13. Фотоэффект (Задачи) 102

Глава 3. Элементы теории относительности. Атомная физика. Физика атомного ядра 110
§ 14. Элементы теории относительности (Введение) 110
§ 15. Относительность времени и расстояния (Задачи) 115
§ 16. Кинетическая энергия и импульс релятивистской частицы (Задачи) 123
§ 17. Атомная физика (Введение) 127
§ 18. Атомная физика (Задачи) 131
§ 19. Физика атомного ядра (Введение) 146
§ 20. Строение атома (Задачи) 151
§ 21. Дефект массы (Задачи) 162

Глава 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Законы геометрической оптики. Световой луч. Прямолинейное распространение света. Обратимость хода светового луча. Законы отражения света. Относительный и абсолютный показатель преломления. Законы преломления света (законы Снеллиуса). Полное внутреннее отражение. Принцип Ферма. Изображение в оптической системе. Плоское зеркало.

Для описания распространения и взаимодействия электромагнитного излучения с веществом используют различные приближения, т.е. упрощенные, идеализированные теоретические представления: геометрической оптики, волновой оптики и квантовой оптики.

Приближение геометрической оптики используется в тех случаях, когда длина волны электромагнитного излучения мала по сравнению с характерными размерами тех областей, в которых исследуются свойства излучения и в которых изменяются характеристики среды. В этом случае электромагнитные волны можно приближенно считать плоскими и рассматривать их как совокупность световых лучей – линий, совпадающих с направлением распространения электромагнитной волны в каждой точке. Представления геометрической оптики справедливы, если можно пренебречь дифракцией электромагнитных волн. А поскольку все дифракционные явления ослабевают с уменьшением длины волны, то геометрическая оптика отвечает случаю малых длин волн $\lambda \to 0$.

В рамках приближения геометрической оптики могут быть поняты простейшие оптические явления, такие как возникновение теней и получение изображений в оптических приборах. В основе геометрической оптики лежат четыре закона, установленных опытным путем:

1. закон прямолинейного распространения света;
2. закон независимости световых пучков;
3. закон отражения света;
4. закон преломления света.

Согласно закону прямолинейного распространения света, световой луч в прозрачной однородной среде распространяется по прямой линии.

Закон независимости световых пучков состоит в том, что распространение всякого светового пучка в среде совершенно не зависит от того, есть в ней другие пучки света или нет, т.е. световой пучок, прошедший через какую-либо область пространства, выходит из нее таким же, независимо от того, заполнена она другой световой волной или нет. При наложении, пересечении нескольких световых пучков, они не искажают друг друга или, как принято говорить, они не возмущают друг друга.

На основе законов прямолинейного распространения света и независимости световых пучков и сложилось представление о световых лучах как о линиях, вдоль которых распространяется свет. В таком понимании луч является чисто математическим понятием. В физическом смысле под лучом понимают конечный достаточно узкий световой пучок.

Падая на поверхность какого-либо предмета, свет частично отражается. Остальная его часть либо поглощается предметом (и превращается в тепло), либо (если предмет прозрачен) проходит сквозь предмет. Согласно закону отражения (иногда говорят о законах отражения):

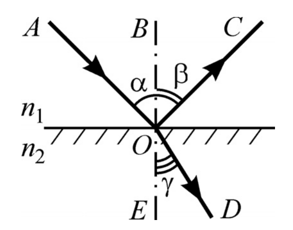

Рис. 1.1

1) падающий (AO), отраженный (OC) лучи и перпендикуляр к границе раздела двух сред (BE), восстановленный в точке падения луча (O), лежат в одной плоскости (эта плоскость называется плоскостью падения;

2) угол падения α (угол между перпендикуляром – нормалью – к поверхности и падающим лучом) равен углу отражения β (углу между перпендикуляром к поверхности и отраженным лучом, т.е. $\alpha = \beta$ (см. рис. 1.1);

Когда свет переходит из одной прозрачной среды в другую, причем свет падает под некоторым углом к поверхности раздела двух сред, то наблюдается явление преломления света. Согласно закону преломления (иногда говорят о законах преломления):

1) лучи падающий (AO), преломленный (OD) и перпендикуляр к границе раздела двух сред (BE), восстановленный в точке падения луча (O), лежат в одной плоскости;

2) отношение синусов углов падения α и преломления γ (угла между перпендикуляром к поверхности, разделяющей две среды, и отраженным лучом) есть величина постоянная для заданных сред и заданной длины

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}, \tag{1.1}$$

где n_{21} называется относительным показателем преломления второй среды относительно первой (см. рис. 1.1).

Отношение скорости света в вакууме ($c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с) к скорости света (v) в данной среде называют абсолютным или, просто, показателем преломления этой среды:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{1.2}$$

Среда называется однородной, если показатель преломления ее везде одинаков. Как показывает опыт (можно теоретически доказать в рамках волновой оптики) отношение (абсолютных) показателей преломления n_2 и n_1 двух сред, на границе раздела которых происходит преломление светового луча, равно относительному показателю преломления этих сред:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1.3}$$

Для запоминания, а в ряде случаев и для решения задач, математическое выражение закона преломления удобнее представить в виде:

$$n_1 \cdot \sin\varphi_1 = n_2 \cdot \sin\varphi_2, \tag{1.4}$$

где n_1, φ_1 и n_2, φ_2 – (абсолютный) показатель преломления и угол между перпендикуляром к границе раздела двух сред и световым лучом, в первой и второй среде, соответственно.

Из закона преломления следует, что если свет переходит из среды оптически менее плотной в среду оптически более плотную, т.е. $n_1 < n_2$, то $\alpha > \gamma$ и световой луч при пересечении границы раздела сред будет приближаться к нормали. Когда свет переходит их среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную, т.е. $n_1 > n_2$, то световой луч при пересечении границы раздела сред будет отклоняться от нормали и может оказаться, что при некотором угле падения $(\alpha_{кр.})$, который называют критическим углом падения (или предельным углом полного внутреннего отражения), будет выполнено условие:

$$\sin\gamma = \frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha_{кр.} = 1, \tag{1.5}$$

что означает для угла преломления $\gamma = \pi/2$, т.е. световой луч распространяется, не проникая во вторую среду. Если выполняется условие:

$$\alpha \geq \alpha_{кр.},$$

то преломленный луч отсутствует и весь свет отражается. Это явление получило название полного внутреннего отражения.

Если свет переходит из вещества с показателем преломления $n_1 = n$ в воздух, для которого $n_2 \cong 1$, то условие полного отражения примет вид

$$\sin\alpha_{кр.} = \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Световой луч обладает свойством обратимости хода. Если световой луч, испущенный из точки A, двигаясь в определенной среде, попадает в точку B, в которой его направление распространения изменяют на противоположное, то он вновь попадет в исходную точку A, пройдя по той же самой траектории.

Каждая точка S источника света в геометрической оптике считается центром расходящегося пучка лучей, который называется гомоцентрическим. Если после отражений и преломлений в различных средах пучок остается гомоцентрическим, то его центр S' называют изображением точки S в оптической системе. Изображение S' называют действительным, если в точке S' пересекаются сами лучи пучка, и мнимым, если в ней пересекаются продолжения этих лучей (в направлении, противоположном направлению распространения лучей).

Простейшая оптическая система – плоское зеркало. На рис. 1.2 показано, как формируется изображение плоским зеркалом. Рассмотрим два луча, выходящих из точки S, являющейся источником света, и попадающих в точки A и C зеркала. После отражения от зеркала эти лучи идут расходящимся пучком, и мы, видим изображение точки S' как точку пересечения за зеркалом продолжений этих лучей. Нетрудно увидеть, что точка S и ее мнимое изображение S' располагаются симметрично, относительно плоскости зеркала.

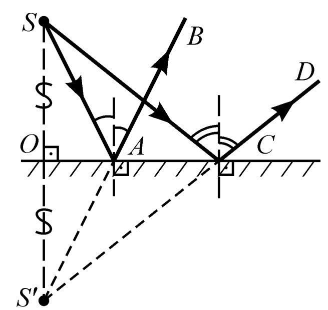

Рис. 1.2

Таким образом, для того, чтобы найти изображение точки (S) в плоском зеркале, достаточно на продолжении перпендикуляра (SO), опущенного из точки на зеркало, отложить за зеркалом в качестве продолжения такой же отрезок прямой (OS'). Геометрические размеры протяженного источника света и его мнимого изображения в плоском зеркале одинаковы.

Законы отражения и преломления света могут быть объединены в рамках принципа Ферма, который дает наглядное объяснение законам распространения света. Согласно принципу Ферма, свет выбирает из всех возможных путей, соединяющих две точки, тот путь, который требует наименьшего времени для его прохождения.

Покажем, что из принципа Ферма законы отражения и преломления вытекают как следствия.

Пусть луч света попал из точки A в точку B, отразившись от плоского зеркала в точке E. DE – нормаль к поверхности зеркала. Точки A и B лежат в плоскости XOY, плоскость зеркала совпадает с плоскостью XOZ. Среда однородная за пределами зеркала, и скорость света везде одинакова. Тогда условие минимальности времени прохождения пути равносильно условию минимальности самого пути. Длина ломаной линии AEB (см. рис. 1.3):

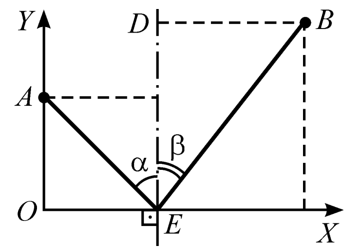

Рис. 1.3

$$L = \sqrt{x^2 + y_A^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}\ ,$$

где x – координата точки E, которую можно варьировать.

Функция $L_{(x)}$ сверху никак не ограничена, поэтому, если у нее имеется экстремум, то это минимум. Запишем условие экстремума через производную:

$$\frac{dL}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x_B-x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}=0,$$

$$\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}=\frac{x_B-x}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}},$$

а это и есть условие равенства углов падения и отражения, так как

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} \quad \text{и} \quad \sin\beta=\frac{x_B-x}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}.$$

Пусть теперь луч света попал из точки A в точку B и пересек при этом в точке E границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 (см. рис. 1.4). Граница раздела сред совпадает с плоскостью XOZ. Точки A и B лежат в плоскости XOY. Время распространения света вдоль ломаной AEB можно выразить следующим образом:

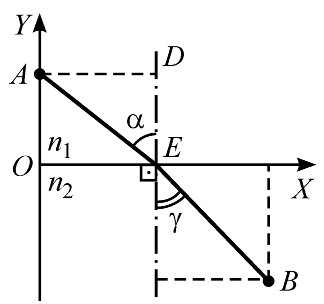

Рис. 1.4

$$t=\frac{\sqrt{x^2+y_A^2}}{c/n_1}+\frac{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}{c/n_2},$$

где c – скорость света в вакууме; x – координата точки E, которую можно варьировать. Функция $t_{(x)}$ сверху никак не ограничена, поэтому, если у нее имеется экстремум, то это минимум. Запишем условие экстремума через производную:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{n_1}{c}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}-\frac{n_2}{c}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x_B-x)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}=0,$$

$$\Rightarrow n_1\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}=n_2\cdot\frac{x_B-x}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}},$$

а это и есть соотношение для углов падения и преломления, так как

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x + y_A^2}} \quad \text{и} \quad \sin\gamma = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}.$$

§ 2. Прямолинейное распространение света. Отражение света. Плоское зеркало

<u>Задачи</u>

2.1. Источник света S находится над круглой непрозрачной пластинкой на расстоянии $a = 1$ м от нее (рис. 2.1). Расстояние от пластинки до экрана $b = 0{,}8$ м; а диаметр тени от пластинки на экране $d = 2{,}7$ м. Определить радиус пластинки r.

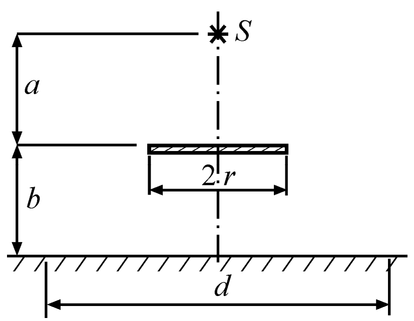

Рис. 2.1

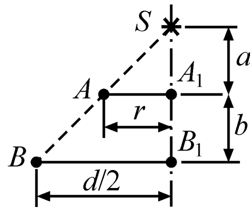

Рис. 2.2

<u>Решение.</u> На рис. 2.2 приведена схема образования тени на экране согласно закону прямолинейного распространения света. В силу подобия треугольников SAA_1 и SBB_1 можем записать соотношение

$$SA_1 : AA_1 = SB_1 : BB_1;$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{a+b}{d/2};$$

$$r = \frac{a \cdot d}{2(a+b)} = 0{,}75 \text{ м}.$$

2.2. На какой высоте H находится точечный источник света над горизонтальной поверхностью стола, если тень от вертикально поставленного на стол карандаша длиной $h = 15$ см оказалась равной $l = 10$ см? Расстояние от основания карандаша до основания перпендикуляра, опущенного из источника света на поверхность стола, $L = 90$ см.

Ответ: $H = \dfrac{h \cdot (l + L)}{l} = 150$ см.

2.3. Диаметр источника света $d = 20$ см, расстояние от него до экрана $S = 2$ м. На каком наименьшем расстоянии l от экрана нужно поместить мяч диаметром $d_1 = 8$ см, чтобы он не отбрасывал тени на экран, а давал только полутень? Прямая, проходящая через центры источника света и мяча, перпендикулярна плоскости экрана. Источник света имеет форму шара.

Указание. На рис. 2.3 представлена схема образования на экране области тени AB, т.е. области, в которую свет от источника не попадает. Полутень – область на экране, для которой световой поток от источника частично перекрыт мячом (на рис. 2.3 – AA_1 и BB_1).

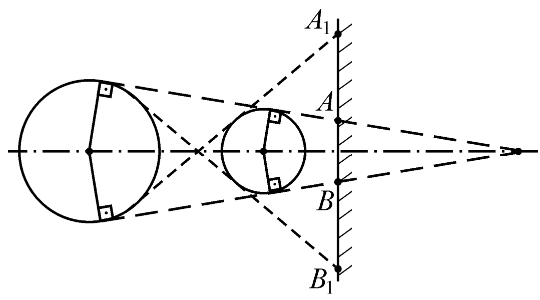

Рис. 2.3

Ответ: $l = \dfrac{S \cdot d_1}{d} = 80$ см.

2.4. Колышек высотой $h = 1$ м, поставленный вертикально вблизи уличного фонаря, отбрасывает тень длиной $l_1 = 0{,}8$ м. Если перенести колышек на расстояние $d = 1$ м дальше от фонаря (в той же плоскости), то он будет отбрасывать тень длиной $l_2 = 1{,}25$ м. На какой высоте H подвешен фонарь? Источник света можно считать точечным.

Ответ: $H = \dfrac{(d + l_2 - l_1) \cdot h}{l_2 - l_1} = 3{,}2$ м.

2.5. Плоское зеркало повернули вокруг оси, проходящей через точку падения на небо луча света и перпендикулярно плоскости падающего и отраженного лучей. На какой угол повернули зеркало, если отраженный от него луч повернулся на угол $\alpha = 42°$?

Решение. На рис. 2.4 представлена схема поворота отраженного луча при повороте зеркала в соответствии с законом отражения света: β – углы падения и отражения луча до поворота зеркала; φ – угол поворота зеркала; штрих-пунктирной линией показана нормаль к поверхности зеркала, проведенная в точку падения луча на поверхность.

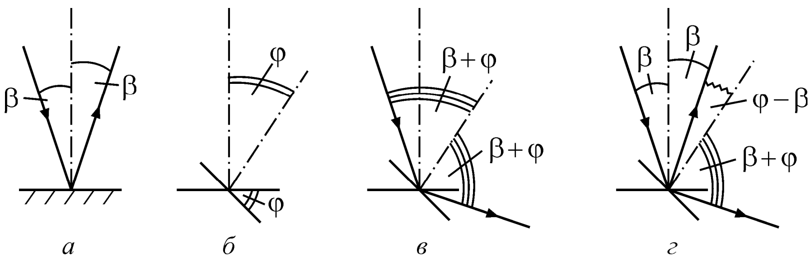

Рис. 2.4

Как следует из рис. 2.4, *г* угол поворота отраженного луча при повороте зеркала составляет

$$\alpha = (\varphi - \beta) + (\beta + \varphi) = 2\varphi$$

$$\Rightarrow \ \varphi = \alpha/2 = 21°.$$

2.6. Солнечный луч составляет с поверхностью Земли угол $\varphi = 40°$. Под каким углом к горизонту α следует расположить плоское зеркало, чтобы солнечный луч падал на дно глубокого колодца?

Ответ: $\alpha = 65°$.

2.7. Человек ростом $h = 175$ см, находится на расстоянии $l = 6$ м от столба высотой $H = 7$ м. На каком расстоянии от себя человек должен положить на землю маленькое плоское зеркало, чтобы увидеть в нем изображение верхушки столба?

Решение. Чтобы человек мог увидеть в зеркале отражение верхушки столба (точка C_1 на рис. 2.5), луч (отрезок C_1B), идущий из вершины столба к зеркалу, которое в силу его малости можно считать точечным объектом (точка B на рисунке), после отражения (отрезок BA_1) должен проходить через органы зрения человека (точка A_1). BD – нормаль к поверхности зеркала и одновременно к поверхности земли. Согласно закону отражения углы C_1BD и A_1BD равны, следовательно, равны углы A_1BA и C_1BC. Таким образом, прямоугольные треугольники AA_1B и CC_1B оказываются подобными:

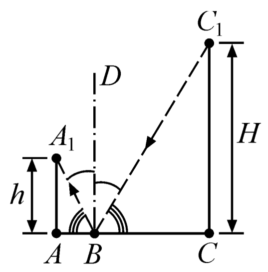

Рис. 2.5

$$A_1A : AB = C_1C : BC \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{x} = \frac{H}{e - x}, \quad x = |AB|$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{hl}{h + H} = 1{,}2 \text{ м.}$$

2.8. Человек ростом $H = 1{,}8$ м видит Луну по направлению, составляющему угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. На каком расстоянии от себя человек должен положить на землю маленькое плоское зеркало, чтобы в нем увидеть отражение Луны?

Ответ: $x = H \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1{,}04$ м.

2.9. Построить изображение отрезка прямой AB в плоском зеркале (рис. 2.6).

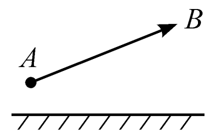

Рис. 2.6

<u>Указание.</u> Плоское зеркало дает неискаженные изображения предметов. Таким образом, изображение отрезка AB в зеркале будет представлять собой отрезок прямой, проходящей через изображения точек A и B.

2.10. Две лампочки находятся в точках A и B перед зеркалом, укрепленным на вертикальной стене. Построением показать, где расположен глаз человека, увидевшего в зеркале изображения лампочек совмещенными?

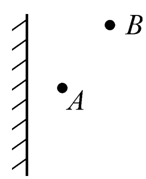

Рис. 2.7

2.11. Почему на поверхности водоема образуется лунная дорожка? Можно ли ее наблюдать на идеально гладкой поверхности воды? Почему она всегда направлена к наблюдателю?

Указание. Идеально гладкая поверхность воды представляет собой горизонтально расположенное плоское зеркало. При наличии небольшого волнения роль зеркал выполняют отдельные участки водной поверхности.

Поверхность воды хорошо отражает падающий на нее свет при малых углах между поверхностью и падающим лучом, т.е. при больших (близких к 90°) углах падения.

При наблюдении вдоль направления к Луне при условии, что угол между лучом зрения и поверхностью водоема мал, отдельные блики практически сливаются.

Руководствуясь выше изложенными соображениями, можно ответить на поставленные вопросы.

2.12. На поверхности плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определить площадь светового пятна, образованного на экране отраженными от зеркала лучами.

Ответ: 688 см^2.

2.13. Параллельный пучок лучей падает на полусферу, лежащую на плоском зеркале, под углом α к зеркалу. Определите размеры тени на вертикальном экране. Поверхность полусферы свет не отражает. Радиус полусферы равен R. Какую форму имеет тень?

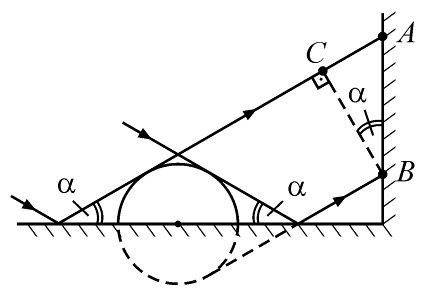

Рис. 2.8

Решение. Н рис. 2.8 показана схема формирования тени. Вертикальный размер тени на экране (длина отрезка AB) составляет $2R/\cos\alpha$ из рассмотрения треугольника ABC. Горизонтальный размер тени не превышает $2R$, как нетрудно догадаться. Тень имеет форму эллипса, вытянутого по вертикали.

2.14.* Солнечные лучи, проходя сквозь маленькие отверстия в листве, дают на поверхности земли светлые пятна в виде эллипсов одинаковой формы, но разных размеров. Большая ось самых крупных эллипсов $a = 16$ см, а малая ось $b = 12$ см. Какова высота дерева, если угловой размер солнечного диска $\alpha = 10^{-2}$ радиан?

Указание. Так как по условию задачи светлые пятна на земле имеют одинаковую форму, а отверстия, сквозь которые прошел образующий их свет, маленькие, то можно рассматривать указанные отверстия в качестве точечных источников света, испускающих лучи в пределах конуса с углом раствора равным α каждый, причем оси симметрии этих конусов параллельны друг другу. Самые крупные светлые пятна соответствуют отверстиям в листьях на вершине дерева.

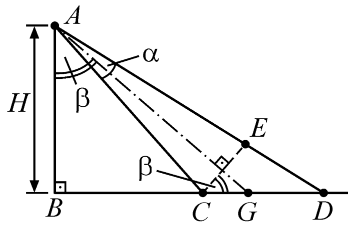

Рис. 2.9

На рис. 2.9 представлена схема формирования на поверхности земли светлых пятен эллиптической формы. Угол, который составляет с вертикалью ось симметрии конического пучка лучей, обозначен как β. Угол между образующими конуса *AC* и *AD* – угол раствора, равный $\alpha << 1$ радиан. По построению отрезок *CE* перпендикулярен оси симметрии конуса, следовательно углы *BAG* и *ECD* равны, как углы (оба острые) со взаимно перпендикулярными сторонами.

В силу того обстоятельства, что угол α – мал ($\alpha = 10^{-2}$ радиан << << 1 радиан), хорду *CE* можно аппроксимировать дугой окружности радиуса *AC*, т.е. с большой степенью точности заменить длину указанной дуги длиной хорды *CE* в выражении для величины плоского угла *CAE*, выраженной в радианах

$$\alpha \cong \frac{CE}{AC}.$$

Одновременно можно заметить, что в силу малости угла α, углы $BAC \cong BAG = \beta$, т.е. $H = AC \cdot \cos\beta$.

Из рассмотрения треугольника *CDE* следует, что $CE = CD \cdot \cos\beta$, где *CD* – большая ось самых крупных эллипсов. Нетрудно догадаться, что малая ось самых крупных эллипсов равна *CE*.

Ответ: $H \cong \dfrac{b^2}{\alpha \cdot a} \cong 9$ м.

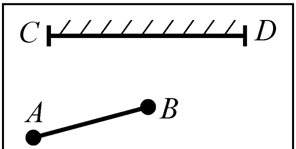

Рис. 2.10

2.15. Показать построением область пространства на плоскости чертежа, в котором изображение отрезка прямой AB в плоском зеркале CD будет видно полностью (см. рис. 2.10).

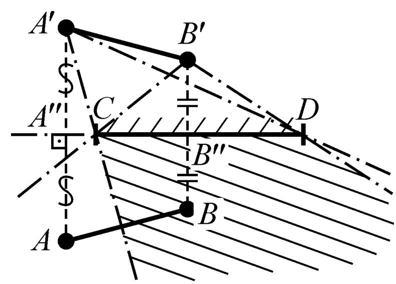

Рис. 2.11

Решение. На рис. 2.11 показаны все необходимые построения: $AA' \perp CD$, $BB' \perp CD$, $AA'' = A''A'$ и $BB'' = B''B'$, таким образом, отрезок $A'B'$ является изображением отрезка AB в плоском зеркале CD.

Прямые, проходящие через точки A' и C, A' и D, ограничивают область пространства, в которой будет видно изображение точки A отрезка AB.

Пересечение двух выше указанных областей пространства (на рис. 2.11 заштриховано) – это та область пространства, в которой будут видны одновременно изображения обоих концов отрезка и, следовательно, изображение отрезка AB полностью.

2.16. Какой минимальной высоты h должно быть вертикальное плоское зеркало, чтобы человек мог, не изменяя положение головы, видеть в нем себя в полный рост H? На каком расстоянии S от пола должен находится нижний край зеркала в этом случае? Зависит ли искомый размер зеркала от расстояния между зеркалом и человеком?

Ответ: $h = H/2$; $S = H/2$; не зависит.

2.17. В комнате длиной L и высотой H на стене висит плоское зеркало. Человек смотрит в него с расстояния l. Какова высота зеркала h, если человек видит противоположную стену во всю высоту? На каком расстоянии S от пола находится зеркало, если рост человека равен h_1?

Ответ: $h \geq \dfrac{Hl}{L+l}$; $S \geq \dfrac{h_1 L}{L+l}$.

2.18. Девочка приближается к зеркалу перпендикулярно его поверхности со скоростью $\upsilon = 0{,}5$ м/с. С какой скоростью изображение девочки приближается к зеркалу (υ_1) ? к девочке (υ_2) ?

Указание. Проделав необходимые построения можно убедиться в том, что насколько девочка за фиксированный интервал времени приблизилась к зеркалу, ровно на столько же приблизилось к зеркалу за тот же интервал времени ее изображение.

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon = 0{,}5$ м/с; $\upsilon_2 = 2\upsilon = 1{,}0$м/с.

2.19. Точка S движется со скоростью $\upsilon_1 = 3$ см/с параллельно поверхности плоского зеркала. Зеркало движется в направлении, перпендикулярном его поверхности, поступательно со скоростью $\upsilon_2 = 2$ см/с. С какой скоростью движется изображение точки S?

Указание. Необходимо воспользоваться принципом сложения скоростей в нерелятивистской механике. Скорость точки S есть результат векторного сложения скорости изображения точки S относительно зеркала и скорости зеркала относительно земли.

Ответ: $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 4\upsilon_2^2} = 5$ м/с.

2.20. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол $\alpha = 135°$. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью $\upsilon = 2$ м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

Ответ: Вертикально вверх с той же скоростью $\upsilon = 2$ м/с.

2.21. Маленькое плоское зеркало З расположено параллельно стене С (рис. 2.12). Свет от укрепленного на стене точечного источника S падает на зеркало и, отражаясь, дает на стене «зайчик». С какой скоростью υ будет двигаться «зайчик» по стене, если: а) приближать к ней зеркало со скоростью υ_1, б) перемещать зеркало параллельно стене со скоростью υ_2?

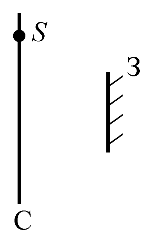

Рис. 2.12

Ответ: а) $\upsilon = 0$; б) $\upsilon = 2\upsilon_2$.

2.22.* Два зеркала образуют двугранный прямой угол. На систему зеркал падает луч, перпендикулярный ребру угла. Как изменится направление распространения света после отражения от двух зеркал?

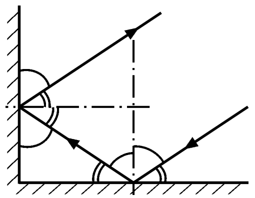
Рис. 2.13

Указание. Необходимо воспользоваться законом отражения света (см. рис. 2.13).

Ответ: Направление распространения света изменится на противоположное.

2.23.* Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha < \pi/2$. На одно из них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной ребру угла. Найти угол отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал.

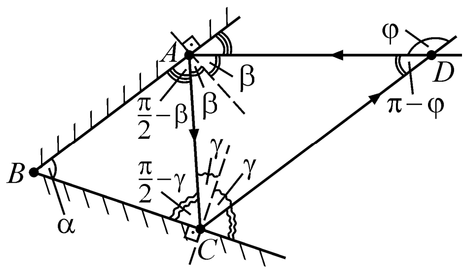

Рис. 2.14

Решение. Схема последовательного отражения падающего на систему из двух плоских зеркал луча показана на рис. 2.14 с учетом закона отражения, φ – искомый угол отклонения падающего луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал.

Рассмотрим треугольники ABC и ACD:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\alpha+\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)=\pi, \\ 2\beta+2\gamma+(\pi-\varphi)=\pi. \end{cases}$$

Выше приведенная система уравнений составлена на основании того обстоятельства, что сумма внутренних углов треугольника равна π радиан.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+\gamma \\ \varphi=2\beta+2(\beta+\gamma) \end{cases} \Rightarrow \varphi=2\alpha.$$

2.24.* Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha > \pi/2$. На одно из них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной ребру угла. Найти угол отклонения падающего луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал.

Ответ: $\varphi = 2\pi - 2\alpha$.

2.25.* Построить луч, который, выйдя из точки A, в результате последовательного отражения в двух взаимно перпендикулярных зеркалах, придет в точку B (рис. 2.15).

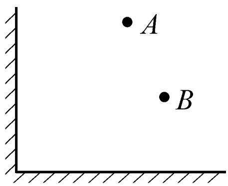

Рис. 2.15

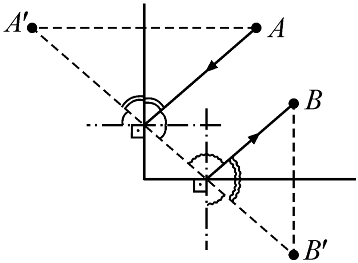

Рис. 2.16

Указание. Необходимо построением определить положение изображений точек A и B в указанных зеркалах (см. рис. 2.16) и указать траекторию луча, удовлетворяющую закону отражения.

§ 3. Преломление света. Полное внутреннее отражение

Задачи

3.1. Построить ход преломленного луча вплоть до выхода из кубика, составленного из двух призм (рис. 3.1), если:

$$n_0 < n_1 < n_2,$$

где n_0, n_1 и n_2 – показатели преломления окружающей среды и материала призм, соответственно.

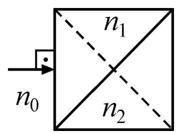

Рис. 3.1

Решение. Требуемое построение выполнено на рис. 3.2. Пунктирными линиями показаны продолжения падающих на границу раздела двух сред лучей, штрихпунктирными линиями указаны нормали к границе раздела сред.

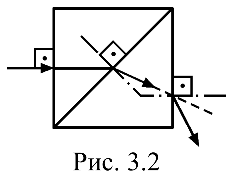

Рис. 3.2

Согласно закону преломления при нормальном падении луча (угол между лучом и нормалью, т.е. угол падения, равен нулю) преломленный луч является продолжением падающего луча, т.е. угол преломления равен нулю.

Так как синус угла для острых углов является монотонно возрастающей функцией (с возрастанием аргумента возрастает значение функции), то в соответствии с законом преломления при переходе луча из среды с меньшим показателем преломления в среду с бо́льшим показателем преломления величина угла между лучом и нормалью к границе раздела сред уменьшается, т.е. угол падения оказывается больше угла преломления. И наоборот, если световой луч проходит из среды с бо́льшим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления, то величина угла между лучом и нормалью к границе раздела сред возрастает, т.е. угол падения оказывается меньше угла преломления.

3.2. Построить ход преломленного луча вплоть до выхода из кубика, составленного из двух призм (рис. 3.1), если:

$$n_0 < n_2 < n_1,$$

где n_0, n_1 и n_2 – показатели преломления окружающей среды и материала призм, соответственно.

3.3. При падении луча на границу раздела двух оптических сред под углом $\alpha = 45°$ угол преломления $\beta = 60°$. Каков будет угол преломления δ, если угол падения $\gamma = 30°$ при распространении в том же направлении?

<u>Решение.</u> Согласно закону преломления на границе двух оптических сред с показателями преломления n_1 и n_2 можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta \\ n_1 \cdot \sin\gamma = n_2 \cdot \sin\delta \end{cases} \Rightarrow \quad \sin\delta = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \cong 0{,}61 \quad \Rightarrow \quad \sin\delta \cong 38°.$$

3.4. Луч падает на границу раздела двух оптических сред под углом $\alpha = 30°$. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$. Определить показатель преломления второй среды, если преломленный и отраженный луч взаимно перпендикулярны.

<u>Указание.</u> $\alpha + \beta = 90°$, где β – угол преломления.

<u>Ответ:</u> $n_2 = n_1 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cong 1{,}4.$

3.5. Световой луч падает на поверхность воды под углом $\alpha_1 = 40°$. Под каким углом он должен упасть на поверхность стекла, чтобы угол преломления остался таким же? Показатели преломления воды и стекла $n_в = 1,33$ и $n_с = 1,50$ соответственно.

Ответ: $\alpha_2 = 46°$.

3.6. Под каким углом должен падать луч света на поверхность материала с показателем преломления $n = 1,73$, чтобы угол преломления был в 2 раза меньше угла падения?

Ответ: $\alpha = 2\arccos\left(\frac{n}{2}\right) = 60°$.

3.7. Столб вбит в дно реки так, что часть столба высотой $h = 1,00$ м возвышается над водой. Найти длину тени столба на дне реки, если высота солнца над горизонтом $\gamma = 30°$, а глубина реки $H = 2,00$ м. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Решение: Луч *SO*, определяющий длину тени от столба, будет по условию проходить через его вершину *S* под углом γ к горизонту (рис. 3.3). Следовательно, угол падения этого луча будет равен $\alpha = 90° - \gamma = 60°$. На поверхности воды (на границе раздела двух оптических сред – воздуха и воды) в точке *O* этот луч преломится и в воду войдет под углом β, определяемым из закона преломления

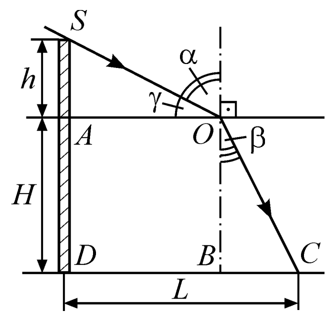

Рис. 3.3

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sin(90° - \gamma)}{n} = \frac{\cos\gamma}{n}.$$

Длина тени *L* от столба будет равна сумме отрезков *DB* и *BC*. Так как *DB* = *AO* длину отрезка *DB* найдем из треугольника *SAO*:

$$DB = AO = h \cdot \operatorname{ctg}\gamma\ .$$

Длину отрезка *BC* найдем из треугольника *OBC*:

$$BC = H \cdot \mathrm{tg}\beta = H \cdot \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = H \cdot \frac{\cos\gamma}{\sqrt{n^2-\cos^2\gamma}}.$$

Окончательно для длины тени от столба на дне реки имеем:

$$L = h \cdot \mathrm{ctg}\gamma + H \cdot \frac{\cos\gamma}{\sqrt{n^2-\cos^2\gamma}} = 3{,}45 \text{ м}.$$

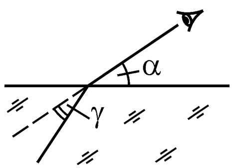

Рис. 3.4

3.8. Палка с изломом посередине погружена в пруд (рис. 3.4) так, что наблюдателю, находящемуся на берегу и смотрящему вдоль надводной части, она кажется прямой, составляющей угол $\cos = 30°$ с горизонтом. Какой угол излома γ имеет палка? Показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

Ответ: $\gamma = \arccos\left(\frac{\cos n}{n}\right) - \alpha \cong 20°.$

3.9. На дне водоема лежит небольшой камень. Мальчик хочет попасть в него концом палки. Прицеливаясь, мальчик держит палку в воздухе под углом $\alpha = 45°$ к поверхности воды. На каком расстоянии от камня воткнется палка в дно водоема, если его глубина $H = 50$ см? Показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

Ответ: $\Delta S = H \cdot \left(\mathrm{ctg}\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}\right) = 19$ см.

3.10. На пути параллельного пучка лучей поместили стеклянную призму с малым углом раствора граней $\alpha = 4°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Свет падает на призму под прямым углом к грани (рис. 3.5). Определить ширину темной полосы на экране Э, расположенном параллельно передней грани призмы на расстоянии $S = 10$ см от нее.

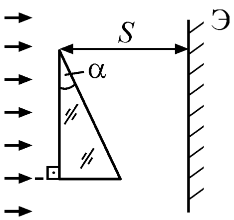

Рис. 3.5

Указание. Для малых углов $\alpha << 1$ радиан (1 рад. $\cong 57°$) с большой точностью выполняются равенства:

$$\sin\alpha \cong \mathrm{tg}\alpha \cong \alpha,$$

где угол α выражен в радианах. Таким образом, значения синусов и тангенсов малых углов можно заменить значением самих углов, выраженных в радианах.

Ответ: $\Delta l \cong (n-1)\cdot\alpha\cdot S = 3{,}5$ мм.

3.11. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $\alpha = 45°$. Определить толщину пластинки l, если луч при выходе из нее сместился на расстояние $d = 2{,}0$ см (рис. 3.6). Показатель преломления стекла равен 1,5.

Ответ: $l = d\cdot\dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha} = 5{,}3$ см.

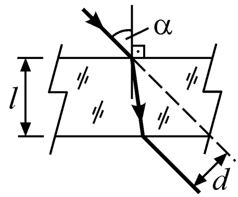

Рис. 3.6

3.12.* На стопку плоскопараллельных пластинок с различными показателями преломления падает луч под углом $\alpha = 60°$ (рис. 3.7) к нормали и преломляясь проходит сквозь всю стопку. Показатели преломления первой и последней пластинок в стопке равны $n_1 = 1$ и $n_2 = 4/3$. Определить угол β между нормалью и лучом в последней пластинке.

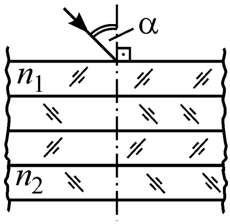

Рис. 3.7

Указание. Использовать закон преломления в виде

$$n_1\cdot\sin\varphi_1 = n_2\cdot\sin\varphi_2 .$$

Ответ: $\beta = 40°$.

3.13. На дне водоема глубиной H находится точечный источник света. На поверхности воды плавает непрозрачный диск, причем центр диска находится над источником? При каком минимальном радиусе диска ни один луч света не выйдет через поверхность воды из водоема? Дно водоема свет практически не отражает. Показатель преломления воды равен n.

Решение. Ни один луч света от источника S не покинет пределы водоема, если для луча SA, идущего от источника к краю диска, при пересечении поверхности воды угол преломления окажется равным 90°, так как любой луч SB, идущий от источника к точке поверхности воды B, лежащей за пределами диска, будет испытывать полное внутреннее отражение (см. рис. 3.8).

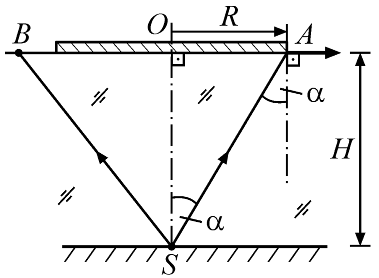

Рис. 3.8

При указанных условиях радиус диска R окажется минимальным необходимым.

Если угол падения луча SA на поверхность воды обозначить α, то согласно закону преломления можно будет записать соотношение:

$$n \cdot \sin\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{1}{n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}.$$

Далее рассмотрим треугольник SOA:

так как $SO = H$ и $OA = R$, то $\dfrac{R}{H} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

3.14. Тело в форме конуса с углом между осью и образующей $\alpha = 60°$ погружено целиком в прозрачную жидкость вершиной вниз так, что ось симметрии тела вертикальна. При этом боковую поверхность тела нельзя видеть ни из какой точки пространства над поверхностью жидкости. Чему равен показатель преломления жидкости?

Ответ: $n \geq 1{,}15$.

3.15. Широкий параллельный пучок световых лучей падает на плоское основание стеклянного полушара с показателем преломления $n = 1{,}41$ перпендикулярно плоскости основания. Каков максимальный угол отклонения прошедших через полушар лучей от их первоначального направления?

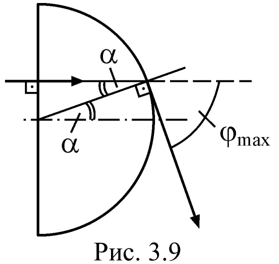

Рис. 3.9

Указание. Угол отклонения φ прошедшего через полушар луча от первоначального направления будет максимальным, если угол падения α на границу стекло-воздух окажется предельным углом внутреннего отражения, т.е. соответствующий ему угол преломления будет равен 90°.

Ответ: $\varphi_{max} = 90° - \arcsin\frac{1}{n} = 45°$.

3.16.* На полушар радиусом $r = 2{,}0$ см; изготовленный из стекла с показателем преломления $n = 1{,}4$; падает параллельный пучок лучей (рис. 3.10) перпендикулярно плоскости основания полушара. Определить радиус светлого пятна на экране Э, расположенном на расстоянии $L = 3{,}8$ см от центра полушара и параллельном основанию полушара.

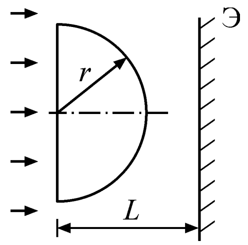

Рис. 3.10

Ответ: $R = \sqrt{n^2 - 1} \cdot L - n \cdot r \cong 1{,}0$ см.

3.17. Пучок длинных тонких нитей, выполненных из материала с показателем преломления $n = \sqrt{7}/2$ образует светопровод. В каждой из нитей свет распространяется, испытывая многократные полные отражения на боковой поверхности (см. рис. 3.11). Определите угол зрения такого световода (т.е. определите, под каким максимальным углом φ к оси нити может падать световой луч на торец, чтобы пройти по световоду без ослабления).

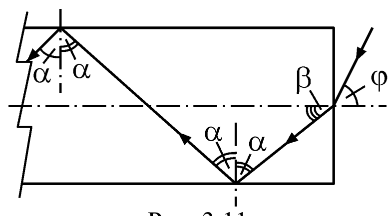

Рис. 3.11

Ответ: $\varphi_{max} = \arcsin\left(\sqrt{n^2 - 1}\right) = 60°$.

3.18.* Каким должен быть внешний радиус R изгиба световода толщиной l (рис. 3.12), чтобы свет, вошедший в световод перпендикулярно поперечному сечению, распространялся не выходя через боковую поверхность световода? Показатель преломления материала световода равен n.

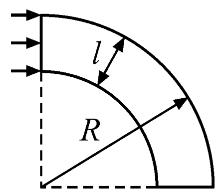

Рис. 3.12

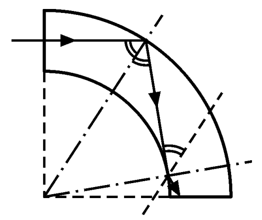

Рис. 3.13

Указание. Нетрудно увидеть из рис. 3.13, что при последующих отражениях от боковой поверхности световода происходит увеличение угла падения, что, в свою очередь, облегчает условия для полного внутреннего отражения.

Ответ: $R \ll \dfrac{nl}{n-1}$.

3.19. Определить кажущуюся глубину водоема h, если смотреть на него сверху, практически перпендикулярно к поверхности воды. Фактическая глубина водоема H, показатель преломления воды n.

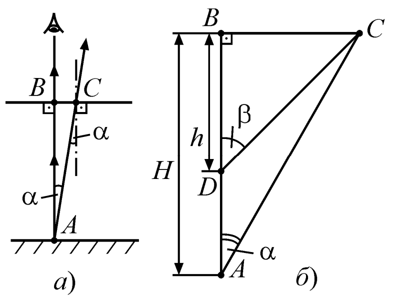

Рис. 3.14

Решение. Условие задачи означает, что в глаз наблюдателя попадают лучи света, распространяющиеся под малыми углами к перпендикуляру, восстановленном к поверхности воды, т.е. углы α, $\beta \ll 1$ радиан (см. рис. 3.14, *а*).

Для малых углов справедливы соотношения:

$$\sin\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha \cong \alpha,$$

$$\sin\beta \cong \operatorname{tg}\beta \cong \beta,$$

где α и β выражены в радианах.

Рис. 3.14, *б* демонстрирует схему формирования изображения точки A дна водоема в глазу наблюдателя. При этом луч AB распространяется по вертикали и не испытывает преломления на границе раздела двух сред: воды и воздуха, а луч AC испытывает преломление. Прямая CD является продолжением преломленного луча.

Рассмотрим треугольники BCD и BCA, и, принимая во внимание закон преломления, запишем следующие соотношения:

$$\begin{cases} n \cdot \sin\alpha = \sin\beta, \\ h \cdot \operatorname{tg}\beta = H \cdot \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Учитывая малость углов $\alpha - \beta$ можем привести указанные соотношения к виду:

$$\begin{cases} n \cdot \alpha = \beta, \\ h \cdot \beta = H \cdot \alpha \end{cases} \Rightarrow h = \frac{H}{n}.$$

3.20. Пловец, нырнувший в бассейн, смотрит из-под воды на лампу на потолке, находящуюся на расстоянии $h = 4{,}00$ м от поверхности воды практически над головой пловца. Каково кажущееся расстояние от поверхности воды до лампы? Показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

Ответ: кажущееся расстояние от поверхности воды до лампы составляет 5,32 м.

3.21.* В сосуд налиты две несмешивающиеся жидкости с показателями преломления $n_1 = 1{,}3$ и $n_2 = 1{,}5$. Сверху находится жидкость с показателем преломления n_1. Толщина слоя верхней жидкости $h_2 = 5{,}0$ см. На каком расстоянии от поверхности верхней жидкости будет казаться расположенным дно сосуда, если смотреть на него сверху вниз через обе жидкости?

Ответ: $h = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} \cong 5{,}6$ м.

3.22.* На высоте h от поверхности воды расположен точечный источник света. Где будет находится изображение этого источника, даваемое плоским горизонтальным зеркальным дном сосуда при наблюдении под малыми углами к вертикали, если толщина слоя воды равна d. Показатель преломления воды равен n.

Ответ: изображение будет находиться на расстоянии $2h + {}^{2d}\!/_{n}$ от источника.

3.23.* Между наблюдателем и точечным источником света помещают плоскопараллельную пластинку толщиной h с показателем преломления n. На какое расстояние Δx источник покажется приближенным к наблюдателю, если угол зрения с нормалью к поверхности пластинки считать малым?

Указание. Условие задачи подразумевает, что в глаз наблюдателя попадают лучи, составляющие малые углы с нормалью к поверхности пластинки.

Ответ: $\Delta x = \frac{h \cdot n}{n - 1}$.

3.24. Тонкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара, фокусируется в точке, отстоящей от центра шара на расстоянии, равном двум его радиусам. Определить показатель преломления стекла.

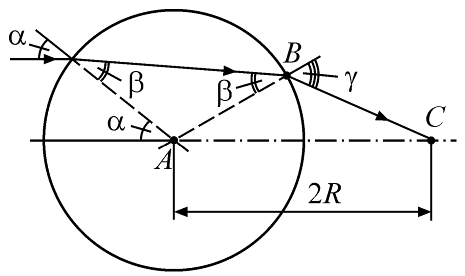

Рис. 3.15

Указание. Используя закон преломления с учетом малости рассматриваемых углов (пучок узкий, т.е. его диаметр много меньше радиуса шара) можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sin\alpha = n\cdot\sin\beta \\ n\sin\beta = \sin\gamma \end{cases} \quad \text{(см. рис. 3.15)}, \quad \Rightarrow \alpha = n\cdot\beta = \gamma .$$

Далее следует рассмотреть треугольник *ABC* и воспользоваться теоремой синусов.

Ответ: $n = 4/3$.

3.25. Световой луч падает по нормали на боковую грань прямой стеклянной призмы, поперечное сечение которой – равносторонний треугольник. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Определить угол φ между падающим и вышедшим из призмы лучами.

Ответ: $\varphi = 60°$.

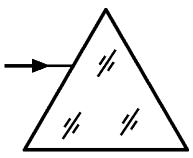
Рис. 3.16

3.26. Световой луч падает на одну из боковых граней прямой стеклянной призмы в плоскости, параллельной основаниям призмы, и параллельно другой боковой грани. Сечение призмы – равносторонний треугольник (рис. 3.16). Определить угол φ между падающим и вышедшим из призмы лучами. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Ответ: $\varphi \cong 47°$.

§ 4. Тонкие линзы. Построение изображений в тонких линзах. Формула тонкой линзы. Оптическая сила тонкой линзы

Линза – прозрачное осесимметричное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Прямая (ось симметрии), проходящая через центры сферических поверхностей, называется главной оптической осью. Линза считается тонкой (тонкая линза), если ее толщина много меньше, чем радиус ее поверхностей. Можно считать, что главная оптическая ось пересекает тонкую линзу в одной точке, называемой (оптическим) центром линзы. Прямые, проходящие через центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью, называются побочными оптическими осями.

Во всех оптических инструментах используются тонкие пучки (т.е. пучки малого по сравнению с радиусами сферических поверхностей линз диаметра, состоящие из практически параллельных лучей), идущие вблизи главной оптической оси системы. Такие пучки называются параксиальными.

Лучи параксиального светового пучка, распространяющегося параллельно главной оптической оси системы, пересекаются в точке, лежащей на этой оси и называемой фокусом линзы. У всякой тонкой линзы имеются два фокуса, лежащие по разные стороны от линзы. Расстояние от фокуса до центра тонкой линзы называется фокусным расстоянием. Фокусы равноудалены от центра линзы, если оптическая среда по обе стороны линзы одинакова. Плоскость, проведенная через фокус линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называется фокальной.

Лучи, проходящие через центр линзы, не преломляются. Лучи, падающие на линзу параллельно какой-либо побочной оптической оси, после преломления в линзе пересекаются в точке, лежащей в фокальной плоскости (в точке, в которой указанная побочная оптическая ось пересекает фокальную плоскость).

Тонкие линзы по своим свойствам делятся на собирающие и рассеивающие. Особенности прохождения лучей в собирающих, линзах показаны на рис. 4.1.

Луч *1–1′*, проходящий через центр тонкой линзы C, не преломляется. Луч *2–2′*, падающий параллельно главной оптической оси OO', после преломления пересекает главную оптическую ось в фокусе F. Если падающий луч *3–3′* проходит через фокус, то после преломления он распространяется параллельно главной оптической оси (рис. 4.1, *а*). Параллельные лучи *1–1′* и *4–4′* после преломления пересекаются в точке *A* в фокальной плоскости (рис. 4.1, *б*).

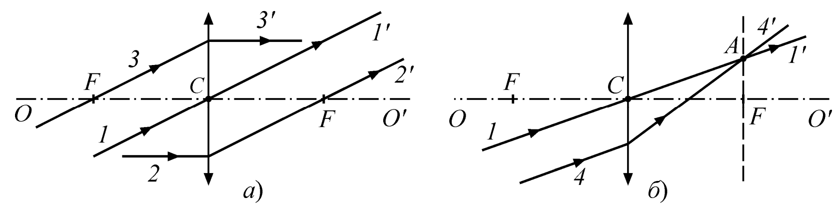

Рис. 4.1

Фокус, находящийся с той же стороны от собирающей линзы, что и падающий на нее световой пучок, называется передним, а тот, что находится с противоположной стороны, называется задним.

Особенности прохождения лучей в рассеивающих линзах показаны на рис. 4.2.

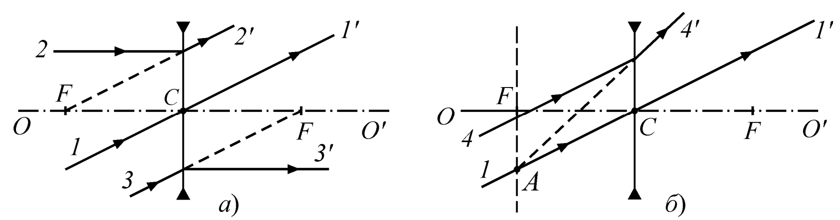

Рис. 4.2

Луч *1–1′*, проходящий через центр тонкой линзы *C*, не преломляется. Луч *2–2′*, падающий параллельно главной оптической оси *OO′*, после преломления распространяется таким образом, что его продолжение в противоположном распространению направлении пересекает фокус, лежащий перед линзой (задний фокус рассеивающей линзы). Если продолжение падающего луча *3–3′* в направлении распространения пересекает фокус, лежащий за линзой (передний фокус рассеивающей линзы), то после преломления луч распространяется параллельно главной оптической оси (рис. 4.2, *а*).

Параллельные лучи *1–1′* и *4–4′* после преломления распространяются таким образом, что их продолжение в противоположном распространению направлении пересекаются в точке A в фокальной плоскости перед линзой (задней фокальной плоскости).

Изображение S' источника света S, получаемое с помощью тонкой рассеивающей линзы, – всегда мнимое (рис. 4.3, *а*). Изображение, получаемое с помощью тонкой собирающей линзы, может быть как мнимым (рис. 4.3, *б*), так и действительным (рис. 4.3, *в*). Для построения изображения необходимо рассмотреть преломление в линзе гомоцентрического пучка лучей, используя свойства тонких линз. Например, в построениях, показанных на рис. 4.3, рассмотрен гомоцентрический пучок, образованный лучом *1–1′*, проходящим через центр линзы, и лучом *2–2′*, падающим на линзу параллельно главной оптической оси.

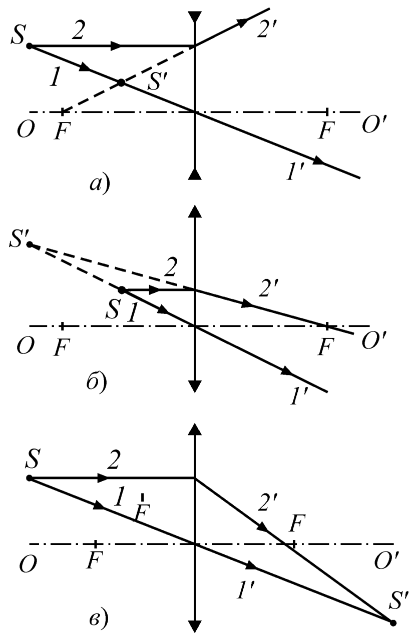

Рис. 4.3

Важное свойство тонкой линзы: изображением отрезка прямой линии является также отрезок прямой; отрезок прямой линии, перпендикулярный главной оптической оси, имеет в качестве изображения отрезок прямой линии также перпендикулярный главной оптической оси.

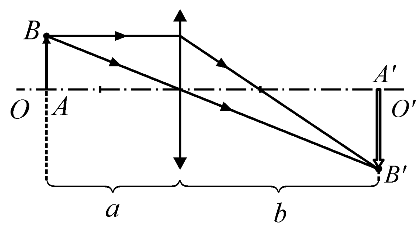

Рис. 4.4

Линейным (поперечным) увеличением тонкой линзы Г называется отношение:

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB}, \qquad (4.1)$$

где $A'B'$ – изображение отрезка AB, причем AB и $A'B'$ ортогональны главной оптической оси OO'.

По построению $\Gamma = {}^{b}\!/_{a}$, где a и b – расстояние от линзы до предмета (AB) и до его изображения $(A'B')$ соответственно.

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{f} = \pm\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}, \qquad (4.2)$$

где f – фокусное расстояние линзы. В левой части знак «+» берется для собирающей линзы и знак «–» для рассеивающей линзы. Первое слагаемое в правой части берется со знаком «+» в случае реального предмета (источника расходящегося пучка световых лучей) и знак «–» для мнимого источника, т.е. в случае сходящегося пучка (сформированного в некоторой оптической системе), лучи которого (точнее их продолжения) пересекаются за линзой на расстоянии a от нее (см. рис. 4.5).

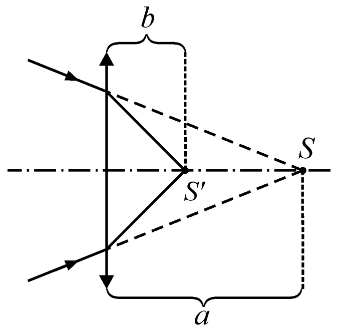

Рис. 4.5

Второе слагаемое в правой части берется со знаком «+», если изображение, формируемое линзой, – действительное и знак «–», если изображение – мнимое.

Величина, обратная фокусному расстоянию линзы:

$$D = \pm\frac{1}{f}, \qquad (4.3)$$

называется оптической силой линзы. Единица измерения оптической силы называется диоптрией (дптр). $[D] = \text{дптр} = \text{м}^{-1}$. Оптическая сила линзы положительна $D > 0$, если линза – собирающая, и отрицательная $D < 0$, если линза – рассеивающая.

Оптическую силу линзы можно рассчитать, зная ее геометрические характеристики, а также оптические свойства материала линзы и окружающей среды:

$$D = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \qquad (4.4)$$

где $n_{\text{л}}$ и $n_{\text{ср}}$ – показатели преломления, материала линзы и окружающей среды; R_1 и R_2 – алгебраические величины, равные по модулю радиусу соответствующей сферической поверхности линзы (нумерация идет в порядке пересечения поверхностей лучом): радиус поверхности берется со знаком «+», если по ходу распространения луча поверхность линзы – выпуклая и со знаком «–», если поверхность – вогнутая. Для луча, распространяющегося, например, слева направо, центр выпуклой сферической поверхности лежит справа от центра линзы, а центр вогнутой – слева. Для собирающей линзы формула дает $D > 0$, для рассеивающей – $D < 0$.

§ 5. Линзы

Задачи

5.1. Луч света падает на тонкую линзу в т. A под произвольным углом. Определить построением дальнейший ход луча, если известны положения фокусов линзы.

Рассмотреть два случая: а) линза собирающая; б) линза рассеивающая.

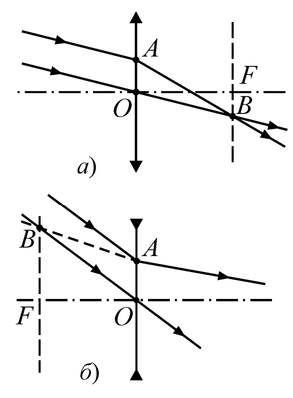

Рис. 5.1

Решение. Для построения хода луча надо воспользоваться свойством линзы собирать пучок параллельных лучей (или их продолжения) в одной точке на фокальной плоскости (рис. 5.1).

Проведем через центр линзы O прямую, параллельную падающему лучу, до ее пересечения в точке B с фокальной плоскостью линзы. Причем, если линза собирающая, то точка B лежит в фокальной плоскости за линзой (рис. 5.1, *а*); если линза рассеивающая, то точка B лежит в фокальной плоскости перед линзой (рис. 5.1, *б*).

Исходный луч (либо его продолжение после преломления в линзе) и луч *OB* должны пересекаться в фокальной плоскости, но луч *OB* проходит линзу не преломляясь и пересекает фокальную плоскость в точке *B*. Следовательно, исходный луч также должен попасть в точку *B*. Поэтому соединив точки *A* и *B* получим ответ на поставленный вопрос. В случае а) собирающей линзы через точку *B* пройдет сам исходный луч; в случае б) рассеивающей линзы через точку *B* пройдет продолжение исходного луча после преломления в линзе.

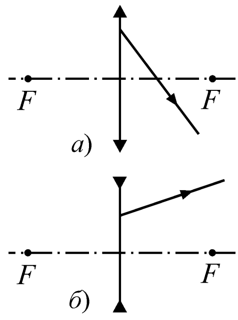

Рис. 5.2

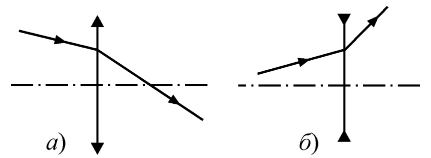

Рис. 5.3

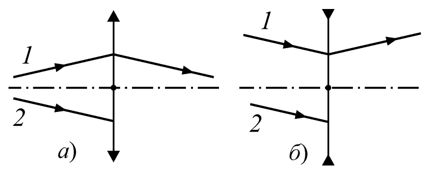

Рис. 5.4

5.2. На рис. 5.2 изображен ход светового луча после преломления в линзе. Найти построением ход луча до линзы. Положение фокусов известно.

Указание. Можно воспользоваться свойством обратимости световых лучей.

5.3. На рис. 5.3 изображен ход луча, проходящего через тонкую линзу. Построением найти положение фокусов линзы.

5.4. На рис. 5.4 показан ход луча *1* до и после прохождения линзы. Построением найти ход луча *2* после линзы.

5.5. Построить изображение отрезка прямой *AB*, параллельного главной оптической оси тонкой линзы (рис. 5.5). Положение фокусов задано.

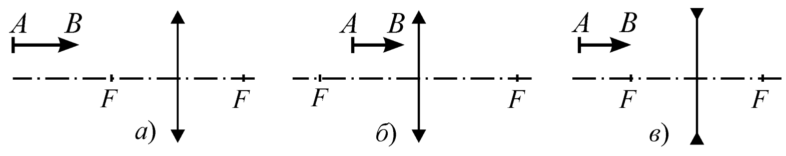

Рис. 5.5

Решение. Необходимо воспользоваться тем обстоятельством, что изображением отрезка прямой является также отрезок прямой. Следовательно, нам достаточно найти построением изображения концов отрезка A и B.

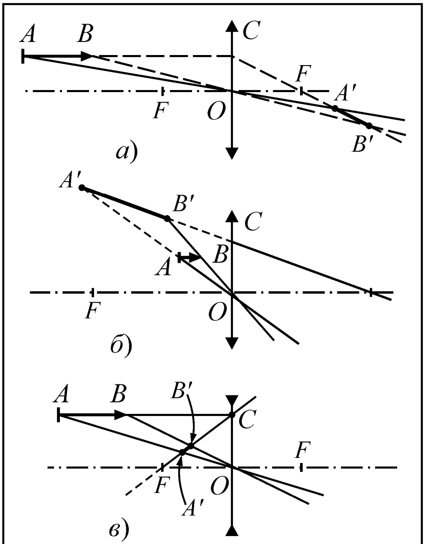

Рис. 5.6

Схема выполняемых построений показана на рис. 5.6. Проведен луч ABC, параллельный главной оптической оси до линзы и проходящий через фокус после преломления в линзе в случаях *а*) и *б*) для собирающей линзы, а в случае *в*) для рассеивающей линзы через фокус проходит продолжение преломленного луча. Т.е. в данном случае мы используем свойство линзы направлять луч, распространяющийся параллельно главной оптической оси до линзы, после ее прохождения таким образом, что луч, преломленный в собирающей линзе, пересекает фокус, расположенный за линзой, а продолжение луча, преломленного в рассеивающей линзе, пересекает фокус перед линзой. В случае *а*) изображение действительное, *б*) и *в*) – мнимое.

5.6. Построить изображения отрезков прямых AB и CD в тонких линзах (рис. 5.7). Положение фокусов задано.

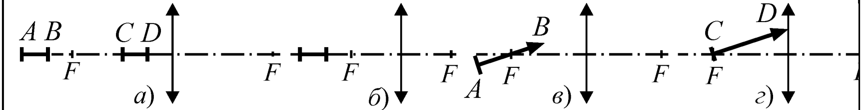

Рис. 5.7

5.7. На рис. 5.8 показаны главная оптическая ось тонкой линзы MN, предмет AB и его изображение $A'B'$. Определите графически положение линзы, собирающая это линза или рассеивающая, положение ее фокусов.

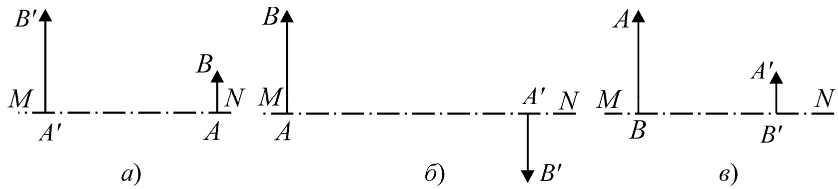

Рис. 5.8

5.8. На рис. 5.9 задано положение точечного источника S, его изображения в тонкой линзе S' и главная оптическая ось MN.

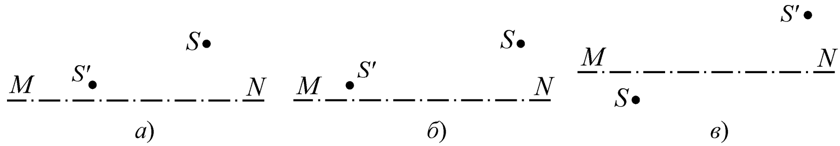

Рис. 5.9

Построением определить положение линзы и ее фокусов.

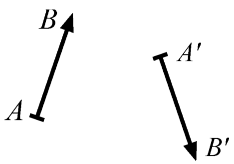

Рис. 5.10

5.9.* Задано положение предмета – отрезка прямой AB – и его изображения $A'B'$ в тонкой линзе (рис. 5.10).

Построением определить положение линзы, ее главной оптической оси и фокусов.

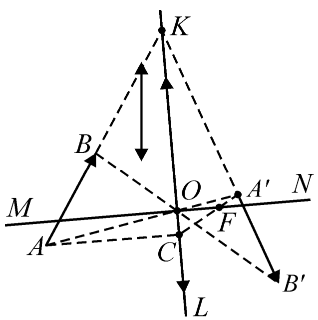

Рис. 5.11

Решение. Схема необходимых построений показана на рис. 5.11. Прямые AA' и BB' пересекаются в центре линзы O. Луч, идущий до линзы вдоль прямой AB после преломления в линзе должен идти вдоль прямой $A'B'$. Следовательно, точка K, лежащая на пересечении прямых AB и AB' принадлежит линзе (или прямой KL, идущей вдоль линзы). Очевидно, что линза – собирающая.

Главная оптическая ось MN линзы проходит через ее центр, точку O, перпендикулярно прямой KL.

Для нахождения одного из фокусов проводим луч AC параллельно главной оптической оси MN. После преломления он должен проходить через изображение точки A, т.е. точку A', и пересекать MN в фокусе F. Второй фокус нетрудно построить отложив на прямой MN отрезок, равный отрезку OF, но слева от точки O.

5.10.* Задано положение предмета – отрезка прямой AB – и его изображения в тонкой линзе $A'B'$ (рис. 5.12).

Построением определить положение линзы, ее главной оптической оси и фокусов.

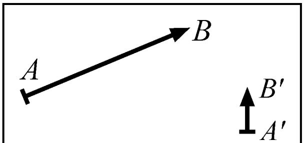

Рис. 5.12

5.11. Имеется точечный источник и его изображение в тонкой линзе. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из источника и его изображения на главную оптическую ось линзы, т.е. точками, принадлежащими этой оси, равно l.

Кроме того известно, что:

а) источник и его изображение лежат по одну сторону от главной оптической оси, расстояние от источника до главной оптической оси в 2 раза больше расстояния от изображения до главной оптической оси;

б) источник и его изображение лежат по одну сторону от главной оптической оси, расстояние от источника до главной оптической оси в 2 раза меньше расстояния от изображения до главной оптической оси;

в) источник и его изображение лежат по разные стороны от главной оптической оси, расстояние от источника до главной оптической оси в 2 раза больше расстояния от изображения до главной оптической оси.

Для каждого из указанных случаев определить фокусное расстояние линзы.

Ответ: а) $F = l$; б) $F = 2l$; в) $F = \frac{2}{9}l$.

5.12. Две линзы – собирающая с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см и рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = 10$ см – расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Линзы преобразуют параллельный пучок света, падающий вдоль главной

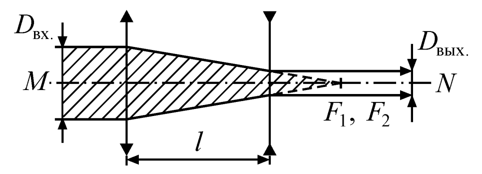

Рис. 5.13

оптической оси на собирающую линзу, в параллельный же пучок другого диаметра. Определить расстояние между линзами и отношение диаметров входящего и выходящего пучка.

Указание. Собирающая линза превращает параллельный пучок в сходящийся, лучи которого пересекаются в заднем фокусе линзы. Рассеивающая линза превращает сходящийся в ее переднем фокусе, который находится за линзой, пучок в параллельный пучок лучей (см. рис. 5.13, MN – главная оптическая ось).

Ответ: $l = F_1 - F_2 = 20$ см; $\dfrac{D_{вх.}}{D_{вых.}} = 3.$

5.13. Две линзы – рассеивающая с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и собирающая с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ см – расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Линзы преобразуют параллельный пучок света, падающий вдоль главной оптической оси на рассеивающую линзу, в параллельный же пучок другого диаметра. Определить расстояние между линзами и отношение диаметров входящего и выходящего пучка.

Ответ: $l = 30$ см; $\dfrac{D_{вх.}}{D_{вых.}} = 0{,}4.$

5.14. На собирающую линзу падает сходящийся пучок лучей. Определить фокусное расстояние линзы, если без линзы он сходится на расстоянии, которое в 2 раза больше и равно $l = 50$ см.

Решение. Рис. 5.14 иллюстрирует условие задачи. MN – главная оптическая ось, O – центр линзы; A – точка, в которой сходится пучок после преломления в линзе, B – точка, в которой сходится пучок без линзы.

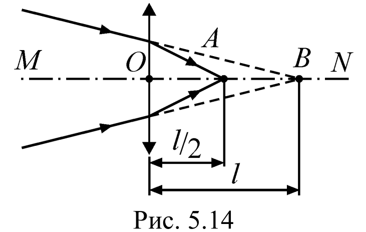

Рис. 5.14

Воспользуемся формулой тонкой линзы. Фигурирующая в условии задачи линза собирающая, поэтому соответствующее слагаемое, содержащее фокусное расстояние линзы, войдет в формулу со знаком «+». Источник в данном случае мнимый (точка *B*), поэтому расстояние от линзы до источника равное *l* войдет со знаком «–». Изображение (*A*) является действительным, так как формируется в результате схождения самих лучей пучка, а не пересечением их продолжений. Следовательно, расстояние от линзы до изображения войдет в формулу со знаком «+».

Итого имеем: $\dfrac{1}{F} = -\dfrac{1}{l} + \dfrac{2}{l} \Rightarrow F = \dfrac{l}{2}$.

5.15. С помощью тонких собирающей и рассеивающей линз с одинаковым по величине фокусными расстояниями $F = 20$ см получают параллельный пучок света. Точечный источник света S (см. рис. 5.15) находится на расстоянии $2F$ от собирающей линзы. На каком расстоянии от нее находится рассеивающая линза?

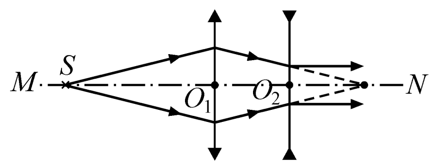

Рис. 5.15

Решение. Для того, чтобы после прохождения заданной оптической системы формировался параллельный пучок лучей, необходимо, чтобы изображение источника S, формируемое собирающей линзой в точке S_1 на главной оптическое оси MN (рис. 5.15), совпадало с передним фокусом рассеивающей линзы, который расположен за линзой.

Определим расстояние от собирающей линзы до формируемого ей изображения S_1 источника S для чего воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{SO_1} + \frac{1}{O_1S_1}, \quad \text{где} \quad SO_1 = 2F, \quad \Rightarrow O_1S_1 = 2F.$$

Таким образом:

$$O_1O_2 = O_1S_1 - O_2S_1 = 2F - F = F = 20 \text{ см}.$$

5.16. В фокусе рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см находится точечный источник света. На каком расстоянии от этой линзы надо поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $2F$, чтобы на выходе такой системы лучи были параллельны?

Ответ: на расстоянии $\frac{3}{2}F = 30$ см.

5.17. Перед тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 20$ см на ее главной оптической оси на расстоянии $2F$ находится точечный источник. На каком расстоянии от собирающей линзы между ней и источником необходимо разместить рассеивающую линзу с таким же по величине фокусным расстоянием и совпадающей главной оптической осью, чтобы получить на выходе параллельный пучок лучей.

Ответ: на расстоянии $\frac{3-\sqrt{5}}{2}F \cong 8$ см.

5.18. Автомобиль движется со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч на расстоянии $a = 500$ м поперек луча зрения фотографа. Фокусное расстояние объектива $F = 50$ см. Какова должна быть экспозиция, чтобы размытие изображения не превышало $\Delta x = 0{,}1$ мм?

Указание. В качестве предмета в данном случае следует рассматривать перемещение какой-либо точки автомобиля, а в качестве изображения предмета – перемещение изображения указанной точки, т.е. размытие. Экспозиция – время регистрации изображения. Объектив можно считать тонкой линзой.

Ответ: $t_{\text{эксп.}} = \frac{a \cdot F}{(a-F)\cdot \upsilon} \cong 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ с.

5.19. Расстояние между двумя источниками света $l = 24$ см. На каком расстоянии от источников следует поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см, чтобы изображения обоих источников оказались в одной точке?

Указание. Одно из изображений будет действительным, другое – мнимым.

Ответ: линзу следует поставить между источниками на расстоянии $\frac{l}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2F}{l}}\right) = 18$ см от одного и на расстоянии $\frac{l}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{2F}{l}}\right) = 6$ см от другого источника.

5.20. Точечный источник света находится на расстоянии $a = 40$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см на ее главной оптической оси. На каком расстоянии от линзы нужно установить экран, чтобы получить на нем световое пятно радиусом $r = 1$ см? Радиус линзы $R = 2$ см.

Указание. Схема формирования светового пятна на экране представлена на рис. 5.16. MN – главная оптическая ось, O – центр линзы, S и S' – источник и его изображение.

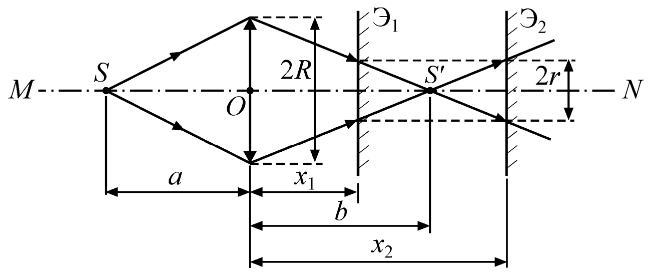

Рис. 5.16

Формирование светового пятна заданного радиуса возможно при двух положениях экрана.

Ответ: $x_1 = \dfrac{aF(R - r)}{R(a - F)} = 60$ см; $x_2 = \dfrac{aF(R + r)}{R(a - F)} = 180$ см.

5.21. Отрезок AB составляет угол α с главной оптической осью MN собирающей линзы, фокусное расстояние которой равно F. Расстояние от точки A до центра линзы равно $a > F$ (см. рис. 5.17).

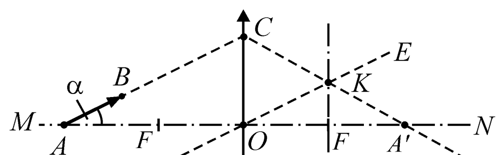

Рис. 5.17

Какой угол составляет с главной оптической осью изображение отрезка AB?

Решение. Проведем луч через точки A и B вплоть до пересечения с плоскостью линзы в точке C. Через центр линзы O проведем вспомогательный луч DE параллельно лучу AC, что позволит нам построить продолжение луча AC за линзой.

Падающие на линзу параллельные лучи AC и DE после прохождения линзы пересекаются в точке K на задней фокальной плоскости (рис. 5.17), причем луч DE, идущий через центр линзы O не испытывает преломления. Луч CK, так как он является продолжением за линзой луча AC, проходящего через точки A и B, проходит через точки A' и B', являющиеся изображением точек A и B. Следовательно, изображение отрезка AB лежит на луче CK, а искомым является угол $CA'O$. Обозначим величину указанного угла β.

Рассмотрим треугольники ACO и $A'CO$. Длину общей стороны треугольников OC можно выразить следующим образом:

$$OC = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = A'O \cdot \operatorname{tg}\beta .$$

Длина отрезка AO равна a по условию задачи, длину отрезка $A'O$ можно определить используя формулу тонкой линзы, учитывая, что длина отрезка $A'O$ – это расстояние от линзы до точки A', являющейся изображением точки A:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \text{ где } b = A'O \;\Rightarrow b = \frac{a \cdot F}{a - F}$$

$$a \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot F}{a - F} \cdot \operatorname{tg}\beta \;\Rightarrow\; \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{F}{a - F} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right).$$

5.22. Отрезок AB составляет угол α с главной оптической осью тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от точки A, лежащей на главной оптической оси, до центра линзы равно a. Точки A и B лежат по одну сторону от линзы.

Какой угол составляет с главной оптической осью изображение отрезка AB?

<u>Ответ:</u> $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{F + a}{a} \operatorname{tg}\alpha\right)$.

5.23. Отрезок длиной $l = 20$ мм лежит на главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его середина находится на двойном фокусном расстоянии от центра линзы. Фокусное расстояние линзы $F = 5$ см. Определить размер изображения отрезка.

<u>Указание.</u> Используя формулу тонкой линзы необходимо найти на каком расстоянии от линзы находятся концы изображения отрезка и затем рассчитать размер изображения.

<u>Ответ:</u> $l' = \frac{F^2 \cdot l}{F^2 - l^2/4} \cong 21$ мм.

5.24. Предмет в виде тонкого стержня расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его концы удалены от линзы на расстояния $\frac{3}{2}F$ и $\frac{5}{4}F$, где F – фокусное расстояние линзы. Во сколько раз длина изображения больше длины самого предмета?

Ответ: $\frac{l'}{l} = 8.$

5.25. Определить минимальное расстояние между точечным источником и его действительным изображением, формируемым тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием равным F.

Решение. Запишем формулу тонкой линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где a – расстояние от источника до линзы, b – расстояние от линзы до изображения источника. Введем обозначение $x = a + b$ для расстояния между источником и его изображением. Нетрудно убедиться, что источник должен находиться на главной оптической оси линзы, чтобы расстояние от него до изображения было минимальным.

Перепишем формулу тонкой линзы с учетом введенного обозначения и выразим расстояние между источником и его изображением как функцию параметра a:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{x-a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^2}{a-F}.$$

Исследуем полученную функцию на экстремумы, в области значений ее аргумента $F < a < +\infty$, соответствующей формированию действительного изображения используя производную:

$$\frac{dx}{da} = \frac{2a(a-F) - a^2}{a-F} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{экстр.}} = 2F.$$

В силу того обстоятельства, что при стремлении аргумента рассматриваемой функции к F и к $+\infty$, т.е. на краях указанной области, функция неограниченно возрастает, найденный экстремум является минимумом.

$$\Rightarrow \quad x_{\min} = x\left(a_{\text{экстр.}}\right) = 4F.$$

5.26. На каком расстоянии от тонкой линзы с оптической силой $D = 4$ дптр надо поместить предмет, чтобы его изображение получилось в $n = 4$ раза меньше предмета?

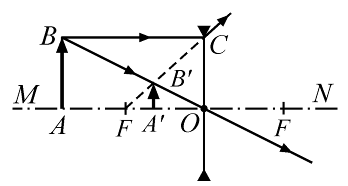

Рис. 5.18

Указание. В условии задачи идет речь об отношении поперечных размеров предмета и его изображения, т.е. задано отношение длин отрезков AB и $A'B'$ (см. рис. 5.18). Лучи BC, параллельный главной оптической оси MN, BO, проходящий через центр линзы, – вспомогательные при построении изображения.

Если ввести следующие обозначения: $AO = a$, $A'O = b$, $-\frac{1}{F} = D$, то можно условие задачи и формулу тонкой линзы записать в виде (изображение – мнимое):

$$\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{a}{b} = n \text{ из подобия треугольников } ABO \text{ и } A'B'O, \\ D = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{1-n}{D} = 0{,}75$ м.

5.27. Фокусное расстояние тонкой собирающей линзы $F =$ $= 30$ см. Расстояние от предмета до фокуса $l = 10$ см. Поперечный размер предмета $h = 5$ см. Каков поперечный размер изображения?

Указание. Необходимо рассмотреть два решения: а) предмет расположен между фокусом и линзой; б) предмет расположен от линзы на расстоянии большем фокусного.

Ответ: в обоих случаях $H = \frac{hF}{l} = 15$ см.

5.28.* Четкое изображение предмета на экране получается при двух положениях линзы. Расстояние между предметом и экраном $l = 2$ м, между двумя положениями линзы $\Delta l = 40$ см. Определить фокусное расстояние линзы.

Указание. В случае формирования действительного изображения тонкой собирающей линзой формула тонкой линзы симметрична относительно двух параметров: расстояния между предметом и линзой и расстояния между линзой и изображением предмета, т.е. если их поменять местами, точнее сказать взаимно поменять их величину, то уравнение останется в силе.

Ответ: $F = \dfrac{l^2 - \left(\Delta l^2\right)}{4l} = 48$ см.

5.29.* Предмет находится на расстоянии $l = 90$ см от экрана. Между предметом и экраном поместили тонкую линзу. При одном положении линзы на экране появляется увеличенное изображение предмета, при другом – уменьшенное. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что линейные размеры 1-го изображения в $n = 4$ раза больше линейных размеров 2-го.

Ответ: $F = \dfrac{\sqrt{n} \cdot l}{\left(\sqrt{n} + 1\right)^2} = 20$ см.

5.30.* Вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 5$ см ползет жук со скоростью $\upsilon = 1$ м/мин. С какой скоростью надо перемещать экран в момент времени, когда расстояние от жука до линзы равно $2F$, чтобы на нем оставалось четкое изображение жука?

Указание. Необходимо выразить зависимость расстояния от линзы до изображения как функцию расстояния от предмета (жука) до линзы. Затем следует взять производную от полученной функции по времени (как от сложной функции, так как расстояние между предметом и линзой зависит от времени) с учетом того обстоятельства, что производная по времени от расстояния между предметом и линзой по величине (по модулю) равна скорости предмета (жука), и подставить указанное значение расстояния между предметом и линзой.

Ответ. Необходимая в указанный момент времени скорость перемещения экрана составляет величину:

$$\upsilon'_{(a)} = \left|\frac{db}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{a \cdot F}{a - F}\right)\right| = \left|\frac{F^2 \cdot \dfrac{da}{dt}}{(a - F)^2}\right| = \frac{F^2 \cdot \upsilon}{(a - F)^2},$$

где a – расстояние между предметом и линзой, b – расстояние между линзой и изображением.

При $a = 2F$ получим:

$$\upsilon' = \upsilon = 1 \text{ м/мин.}$$

5.31. Точечный источник движется по окружности со скоростью $\upsilon = 2$ м/с в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси тонкой собирающей линзы, причем центр окружности лежит на указанной оси, а ее плоскость находится на расстоянии $l = 12$ см от линзы. Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Определить скорость изображения.

Ответ: $\upsilon' = \upsilon \cdot \dfrac{F}{F - l} = 5$ м/с.

5.32. Увеличение предмета тонкой собирающей линзой равно $n = 3$. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Определить расстояние между предметом и изображением.

Ответ: а) изображение действительное: $S = \dfrac{(n+1)^2}{n} \cdot F \cong 53$ см;

б) изображение мнимое: $S = \dfrac{(n-1)^2}{n} \cdot F \cong 13$ см.

5.33. С помощью тонкой линзы получено в $n = 1{,}5$ раза увеличенное действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на $\Delta l = 12$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

Ответ: $F = \dfrac{n \cdot l}{2} = 9$ см.

5.34. Расстояние от заднего фокуса тонкой линзы до действительного изображения в $\alpha = 9$ раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найти линейное увеличение.

Ответ: $\Gamma = \sqrt{\alpha} = 3$.

5.35. Слева от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см на расстоянии $F/2$ на главной оптической оси находится точечный источник света. Справа от линзы на таком же расстоянии находится плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси. Где соберет лучи эта система?

Решение. Собирающая линза, при прохождении через нее прямых лучей от источника S (рис. 5.19) формирует мнимое изображение S_1, расстояние от которого до зеркала можно рассчитать, используя формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F/2}-\frac{1}{S_1D} \quad \Rightarrow \quad S_1O=F\ .$$

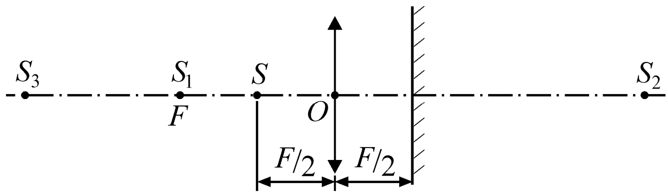

Рис. 5.19

Пучок лучей от источника после линзы будет распространяться таким образом, как если бы он был испущен источником, находящимся в точке S_1. Следовательно, падающий на зеркало расходящийся пучок лучей при отражении породит так же гомоцентрический пучок с центром в точке S_2, где находится мнимое изображение точки S_1, даваемое зеркалом, причем с учетом правил построения изображений в плоском зеркале расстояние от точки S_2 до зеркала равно расстоянию от зеркала до точки S_1, т.е. расстояние от точки S_2 до линзы оказывается равным $S_2O=\frac{3}{2}F+\frac{1}{2}F=2F$.

Пучок, падающий на линзу после отражения от плоского зеркала, будет собран в некоторой точке S_3, положение которого можно найти с помощью формулы тонкой линзы (мы ищем изображение точки S_2, формируемое линзой):

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{S_2O}+\frac{1}{S_3O} \ \Rightarrow\ \frac{1}{F}=\frac{1}{2F}+\frac{1}{S_3O} \ \Rightarrow S_3O=2F=100\text{ см.}$$

5.36. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее главной оптической оси. За линзой перпендикулярно оси размещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, после вторичного прохождения через линзу стали параллельными? Фокусное расстояние линзы равно $F=50$ см.

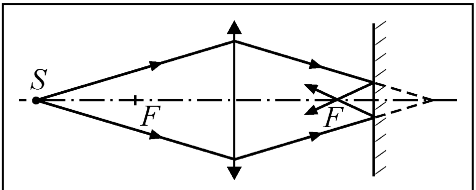

Рис. 5.20

Указание. Схема формирования параллельного пучка лучей на выходе из заданной оптической системы показана на рис. 5.20.

Ответ. На расстоянии 75 см от линзы.

5.37. Плоскую поверхность тонкой плосковыпуклой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 24$ см посеребрили. На линзу падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси линзы (рис. 5.21). В какой точке пересекутся эти лучи.

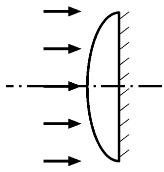
Рис. 5.21

Указание. Посеребренная поверхность линзы приобретает свойства плоского зеркала, расположенного вплотную к линзе.

Ответ. Лучи пересекутся на расстоянии $l = 12$ см слева от линзы (см. рис. 5.21).

5.38. Тонкая собирающая линза обладает в воздухе фокусным расстоянием $F = 10$ см. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, составляет $n_1 = 1{,}50$. Линзу и точечный источник света, находящийся на ее главной оптической оси на расстоянии $a = 2F$ поместили в воду. Где будет находиться изображение источника? Показатель преломления воды $n_2 = 1{,}33$.

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей оптическую силу тонкой линзы:

$$D = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср.}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

где $n_{\text{л}}$ и $n_{\text{ср.}}$ – показатели преломления материала линзы и окружающей среды, соответственно; R_1 и R_2 – радиусы сферических поверхностей, ограничивающих тело линзы.

Так как при помещении линзы в иную среду ее форма и размеры не изменяются, то можно записать, что

$$D = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср.}}} - 1\right)\cdot\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Согласно условию задачи $D > 0$ в воздухе, а так как $n_{л} > n_{ср.}$ в этом случае, то $\alpha > 0$.

При помещении линзы в воду условие $n_{л} > n_{ср.}$ так же выполняется, следовательно линза остается собирающей. Расчитаем фокусное расстояние F' линзы в воде, с этой целью запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F} = (n_1 - 1) \cdot \alpha, \\ \dfrac{1}{F'} = \left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1 \right) \cdot \alpha, \end{cases}$$

решая которую получаем:

$$F' = F \cdot \frac{(n_1 - 1) n_2}{n_1 - n_2} = 4F.$$

Так как расстояние от источника до линзы оказывается меньше ее фокусного расстояния в воде, то изображение будет мнимым.

Далее воспользуемся формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{a \cdot F'}{F' - a} = \frac{2F \cdot 4F}{4F - 2F} = 4F = 40 \text{ см}.$$

5.39. Тонкая собирающая линза обладает в воздухе фокусным расстоянием $F = 5{,}0$ см. Показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, составляет $n_1 = 1{,}40$. Линзу и точечный источник света, находящийся на ее главной оптической оси, поместили в воду. Показатель преломления воды $n_2 = 1{,}33$. На каком расстоянии от линзы надо поместить источник, чтобы получить параллельный пучок лучей после линзы?

Ответ: на расстоянии $a = 40$ см от линзы.

5.40. Тонкая рассеивающая линза обладает в воздухе фокусным расстоянием $F = 10$ см. Показатель преломления материала, из которого изготовлена линза, составляет $n_1 = 1{,}20$. Линзу и точечный источник света, находящийся на ее главной оптической оси, поместили в жидкость с показателем преломления $n_2 = 1{,}50$. На каком расстоянии от линзы сформируется изображение, если расстояние между линзой и источником $a = 2F$?

Указание. Линза в жидкости станет собирающей, так как $\frac{n_л}{n_{ср.}} - 1 = \frac{n_1}{n_2} - 1 < 0$!

Ответ: $b = \frac{2F \cdot F'}{2F - F'} = 20$ см, где $F' = F \cdot \frac{(n_1 - 1)n_2}{n_2 - n_1}$.

5.41.* Полая двояковыпуклая стеклянная линза помещена в воду. Внутри полости линзы находится воздух, стенки – тонкие. Найти длину изображения стрелки, расположенной на главной оптической оси линзы вплотную к линзе, если длина самой стрелки равна фокусному расстоянию линзы F в воде.

Указание. Линза в воде является рассеивающей!

Ответ: длина изображения равна $F/2$.

5.42. На поверхности жидкости, налитой в цилиндрический сосуд, плавает тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием в воздухе равным F (рис. 5.22). Найти высоту h жидкости в сосуде, если изображение точечного источника S, расположенного на расстоянии l от линзы на ее главной оптической оси, находится на дне сосуда. Показатель преломления жидкости равен n. Расстояние l много больше диаметра сосуда.

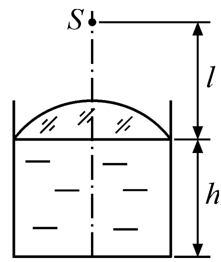

Рис. 5.22

Решение. На рис. 5.23 показана схема формирования изображения S' источника S. α и β – углы падения и преломления, соответственно, луча, пересекающего границу раздела линза – жидкость.

В силу того обстоятельства, что расстояние l много больше диаметра сосуда, углы α и β можно считать малыми. Следовательно, используя закон преломления светового луча на границе раздела двух сред и тригонометрические соотношения в треугольниках ABC и SBC на рис. 5.23, можем записать:

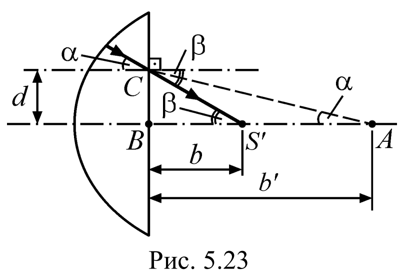

Рис. 5.23

$$\begin{cases} n_л \cdot \sin\alpha = n \cdot \sin\beta \\ d/b = \operatorname{tg}\beta \\ d/b' = \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_л \cdot \alpha = n\beta \\ d = \mathrm{b} \cdot \beta \\ d = \mathrm{b}' \cdot \alpha \end{cases} \Rightarrow b = b' \cdot \frac{n}{n_л},$$

где n и $n_л$ – *показатели* преломления жидкости и материала линзы, соответственно.

Из последнего выражения видно, что, если изображение S' источника S формируется в воде и параметр «b» принимает значение равное h согласно условию задачи, то при формировании изображения в воздухе расстояние «b» между линзой и изображением окажется равным h/n.

При формировании изображения в воздухе мы имеем право записать уравнение тонкой линзы в виде:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \text{где} \quad a = l, \quad b = \frac{h}{n}. \quad \Rightarrow h = \frac{hFl}{l - F}.$$

5.43.* Полая двояковыгнутая тонкостенная стеклянная линза помещена в воду на глубину h так, что ее главная оптическая ось перпендикулярна поверхности воды. Внутри полости линзы находится воздух. Снизу на линзу направлен узкий параллельный пучок света. Пучок распространяется вдоль главной оптической оси. Найти расстояние от линзы до точки пространства, в которой соберутся лучи света. Фокусное расстояние линзы в воде равно F, причем $F > h$. Показатель преломления воды равен n. Считать, что углы между лучами и главной оптической осью малы.

Ответ: $l = F/n + h \cdot \left(1 - 1/n\right)$.

§ 6. Волновая оптика. Интерференция света. Когерентные источники. Принцип Гюйгенса – Френеля. Условия интерференционного максимума и минимума. Опыт Юнга. Дифракция. Дифракционная решетка. Дисперсия света.

Если характерные свойства среды изменяются на расстояниях порядка длины волны излучения, то необходимо принимать во внимание его волновые свойства. Поскольку электрическое и магнитное поля обладают энергией, то электромагнитная волна, в частности свет, переносит энергию в направлении своего распространения. Энергия, переносимая волной в единицу времени через поверхность единичной площади, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, называется интенсивностью волны.

Когерентными называются волны одинаковой частоты, разность фаз которых остается все время постоянной. Источники таких волн также называются когерентными (т.е. согласованными). При наложении некогерентных световых волн происходит только усиление света, т.е. сложение интенсивностей этих волн. Результатом наложения когерентных волн является интерференция, при этом становится возможным наблюдение интерференционной картины, т.е. устойчивого перераспределения интенсивности света в пространстве, например, в виде чередующихся темных и светлых полос, концентрических темных и светлых колец.

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления, т.е. создающие их волны поляризованы в одной плоскости:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= E_{m1} \cdot \cos(\omega t + \alpha_1), \\ E_2(t) &= E_{m2} \cdot \cos(\omega t + \alpha_2), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где E_1 и E_2 – напряженность электрического поля, создаваемого волной в рассматриваемой точке пространства (точнее проекция вектора напряженности на ось, лежащую в плоскости поляризации и перпендикулярную направлению распространения волны). Параметр E можно представить как проекцию вектора длиной, равной амплитуде колебания E_m, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг точки, проходящей через начало вектора, тогда фаза колебания $(\omega t + \alpha)$ будет равна значению угла между вектором и осью, на которую проецируется вектор. Воспользуемся указанной аналогией для сложения гармонических колебаний одного направления. При сложении векторов их проекции так же складываются. Следовательно, сложение двух гармонических колебаний мы можем рассматривать как проецирование вектора, являющегося суммой двух векторов, изображающих складываемые колебания. Так как угловая скорость складываемых векторов одинакова (совпадают частоты складываемых колебаний), то угол между складываемыми векторами сохраняется постоянным.

Из построений, приведенных на рис. 6.1, используя теорему косинусов, получим:

$$E_m^2 = E_{m1}^2 + E_{m2}^2 - 2E_{m1} \cdot E_{m2} \cdot \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$
$$= E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + 2E_{m1} \cdot E_{m2} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$$
$$= E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + 2E_{m1} \cdot E_{m2} \cdot \cos\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ – разность фаз складываемых колебаний.

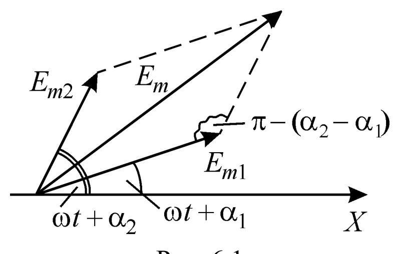

Рис. 6.1

Интенсивность волны, или другими словами плотность потока энергии излучения, можно представить как произведение плотности электромагнитной энергии на скорость распространения волны. Плотность энергии электрического поля пропорциональна квадрату напряженности поля. Плотность энергии магнитного поля пропорциональна квадрату магнитной индукции. Плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотностей энергий электрического и магнитного полей. В волне напряженность электрического поля пропорциональна магнитной индукции $E \sim B$, следовательно интенсивность волны пропорциональна квадрату напряженности электрического поля $I \sim E^2$. Суммируя выше изложенное можем записать для интенсивности волны, полученной путем сложения двух электромагнитных волн:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\Delta\varphi, \qquad (6.3)$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз колебаний, возбуждаемых в заданной точке пространства каждой из складываемых волн в отдельности.

Если волны некогерентны, то разность фаз $\Delta\varphi$ возбужденных колебаний хаотически меняется и среднее значение третьего слагаемого справа оказывается равным нулю, а результирующая наблюдаемая интенсивность оказывается равной сумме интенсивности складываемых волн (время, за которое скачком изменяется фаза возбуждаемых независимым источником света колебаний в заданной точке пространства, очень мало и составляет примерно 10^{-8} с).

Если же волны когерентны, то $\Delta\varphi = \text{const}$ и интенсивность света, наблюдаемая в заданной точке пространства может оказаться как больше, так и меньше суммы интенсивностей складываемых волн. В частности, если интенсивности складываемых волн равны, то интенсивность результирующей волны при $\cos\Delta\varphi = -1$ будет равна нулю, а при $\cos\Delta\varphi = 1$ будет в два раза превышать сумму интенсивностей складываемых волн.

Наблюдать интерференцию света, используя два независимых источника, невозможно, так как нет путей сделать их излучение когерентным. Единственная возможность получения двух когерентных световых волн – это расщепление волны от одного источника на две когерентные. По сути, в этом решении проблемы получения когерентных волн заложен принцип Гюйгенса – Френеля, который утверждает, что каждая точка среды, до которой дошла волна, становится самостоятельным источником вторичных волн; новый фронт волны образуется в результате интерференции вторичных волн.

Введем понятие оптической длины пути – это произведение $n \cdot l$ показателя преломления среды n на геометрическую длину пути. Разность δ оптических путей двух лучей (т.е. плоских волн), испущенных двумя источниками, называется оптической разностью хода:

$$\delta = n_2 l_2 - n_1 l_1. \qquad (6.4)$$

Если лучи испущены одним источником, то:

$$\frac{\delta}{c} = \frac{l_2}{c/n_2} - \frac{l_1}{c/n_1} = t_2 - t_1 = \Delta t \,, \tag{6.5}$$

где c – скорость света в вакууме, Δt – разность времени прохождения волнами пути от источника до точки их наложения. Тогда разность фаз колебаний, возбуждаемых этими волнами в точке их наложения, составит:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \frac{\omega \cdot \delta}{c} = \frac{2\pi\nu\delta}{\lambda\nu} = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} \,, \tag{6.6}$$

где λ – длина волны в вакууме.

Условие (максимального) усиления волн от двух когерентных источников (условие интерференционного максимума):

$$\cos\Delta\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = 2\pi k \,, \quad \text{где} \quad k = 0,\; \pm 1,\; \pm 2\ldots,$$

$$\Rightarrow\; \delta = k\lambda \,. \tag{6.7}$$

Условие (максимального) ослабления двух волн от двух когерентных источников (условие интерференционного максимума):

$$\cos\Delta\varphi = -1 \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = \pi \cdot (2k+1),$$

$$\Rightarrow\; \delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \,. \tag{6.8}$$

Примером использования метода расщепления волны от одного источника на две когерентные волны служит опыт Юнга. Схема опыта приведена на рис. 6.2. Свет от протяженного источника падает на диафрагму D_1, в которой сделано отверстие A в виде щели. Свет от освещенной щели A падает на диафрагму D_2, в которой сделаны две узкие щели B и C. Так как щели B и C располагаются симметрично относительно щели A, то свет от щели A до них доходит одновременно. Щели B и C являются когерентными источниками света. От них свет падает на экран Э. В середине экрана в области наложения волн относительно высокой интенсивности EK наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся темных и светлых (радужных) полос. К краям интерференционная картина размывается и пропадает, т.е. освещенность экрана делается однородной (без светлых и темных полос). Контрастность интерференционной картины повышается при помещении перед щелью A цветного светофильтра, который резко сужает диапазон длин волн формирующего интерференционную картину света.

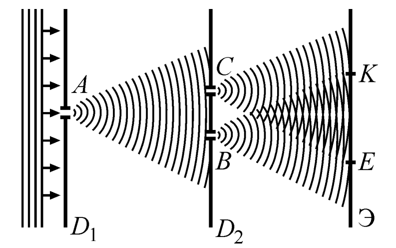

Рис. 6.2

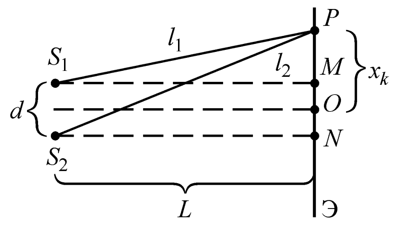

Рис. 6.3

На практике интерференционные полосы наблюдаются только в небольшой области экрана, так называемом поле интерференции. Рассмотрим схему опыта Юнга и наблюдаемую картину интерференции немного подробнее. Пусть среда между щелями B и C однородная с показателем преломления равным n. Щели B и C выступают в роли практически точечных когерентных источников S_1 и S_2 (см. рис. 6.3). Расстояние между щелями d для получения картины интерференции приходится делать много меньше расстояния между второй диафрагмой и экраном L. Пусть в некоторой точке экрана P наблюдается максимум освещенности, т.е. выполняется условие интерференционного максимума:

$$nl_2 - nl_1 = k\lambda, \quad \text{где} \quad k = 0,\ 1,\ 2... \tag{6.9}$$

Применим теорему Пифагора к треугольникам S_1MP и S_2NP, учтем, что $MO = NO = d/2$:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= L^2 + \left(x_k - d/2\right)^2, \\ l_2^2 &= L^2 + \left(x_k + d/2\right)^2, \end{aligned} \tag{6.10}$$

где x_k – расстояние от точки наблюдения P до центра экрана O.

$$\Rightarrow\ l_2^2 - l_1^2 = 2dx_k\ \Rightarrow\ \left(l_2 - l_1\right)\left(l_2 + l_1\right) = 2dx_k$$

Используя условия $d \ll L$ и $x_k \ll L$, получим:

$$l_2 + l_1 \simeq 2L\,. \tag{6.11}$$

Кроме того, из условия интерференционного максимума имеем:

$$l_2 - l_1 = \frac{k\lambda}{n}, \tag{6.12}$$

следовательно:

$$\frac{k\lambda}{n}\cdot 2L = 2dx_k\,, \tag{6.13}$$

$$\Rightarrow\ x_k = k\cdot\frac{L\lambda}{nd}, \tag{6.14}$$

т.е. нашли расстояние от центра светлой полосы до центра экрана. Можно отметить, что $\dfrac{\lambda}{n}$ – это длина волны света в среде с показателем преломления n (напомним, что в данном случае λ – длина волны и света в вакууме).

Отсюда находим расстояние между серединами соседних светлых полос:

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda L}{nd}\,. \tag{6.15}$$

Нетрудно убедиться, что расстояние между серединами соседних темных полос, т.е. между точками экрана, в которых выполняется условие интерференционного минимума, оказывается точно таким же.

Расстояние между соседними максимумами или минимумами интерференционной картины, обычно, называют шириной интерференционной полосы (иногда, расстоянием между интерференционными полосами).

Наряду с интерференцией другим известным явлением, обусловленным волновой природой света, является дифракция, под которой понимают огибание волнами препятствий и проникновение в «область тени» (в этих случаях, обычно, говорят об «области геометрической тени»), т.е. отклонение света от прямолинейного распространения. Качественно поведение света в этом случае может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса – Френеля.

Устройство, состоящее их большого числа регулярно расположенных щелей, получило название дифракционной решетки. По принципу Гюйгенса – Френеля каждая щель при падении на решетку световой волны является источником когерентных вторичных волн, способных интерферировать друг с другом.

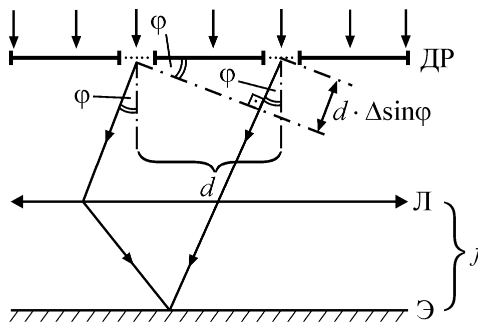

Рис. 6.4

Если на дифракционную решетку ДР перпендикулярно к ней падает пучок параллельных лучей света (плоская световая волна), то под углом дифракции φ на экране Э, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы Л, будет наблюдаться интерференционная картина (см. рис. 6.4). Интерференционные максимумы при дифракции на решетке будут наблюдаться под углами дифракции φ, удовлетворяющими условию:

$$d \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda, \tag{6.16}$$

где $k = 0,\ 1,\ 2...$ называется порядком максимума или порядком спектра, d называется постоянной (периодом) дифракционной решетки.

Если свет, падающий на дифракционную решетку, не монохроматичен, то во всех порядках, кроме $k = 0$, для каждой длины волны максимумы будут возникать под своим углом дифракции. Картину, получаемую при разложении света на составляющие, соответствующие различным длинам волн, называют спектром. Поэтому дифракционную решетку часто называют спектральным прибором.

Еще одно явление, характерное для волн – это дисперсия – зависимость скорости распространения волн в среде от их частоты или длины волны. Для света – это зависимость показателя преломления от частоты или длины волны.

§ 7. Скорость света в среде

Задачи

7.1. Луч света переходит из воздуха в стекло. На сколько процентов при этом изменится скорость света? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Решение. Скорость света в воздухе практически равна скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Скорость света в стекле составит $\upsilon = c/n$, таким образом искомая величина:

$$\frac{c-\upsilon}{c} = 1 - \frac{1}{n} = 0{,}33 = 33\,\%.$$

7.2. При переходе светового луча из воздуха в некоторое вещество скорость света изменяется на $k = 20\,\%$. Определить показатель преломления этого вещества.

Ответ: $n = \dfrac{1}{1-k} = 1{,}25.$

7.3. Луч света проходит через слой воды в некоторое вещество. Определить абсолютный показатель преломления этого вещества, если скорость света в этом веществе на $\Delta\upsilon = 10^8$ м/с меньше, чем в воде. Показатель преломления для воды $n_1 = 1{,}33$. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $n_2 = \dfrac{n_1 \cdot c}{c - n_1 \cdot \Delta\upsilon} = 2{,}4.$

7.4. В сосуд налиты скипидар и вода, которые образуют несмешивающиеся слои. Найти отношение толщины слоев жидкостей, если время прохождения света в них одинаково. Свет падает перпендикулярно границам раздела сред. Показатели преломления воды и скипидара $n_1 = 1{,}33$ и $n_2 = 1{,}47$, соответственно.

Ответ: $h_1/h_2 \cong 1{,}11.$

7.5. Пучок света падает нормально на флинтглассовую пластинку, поверх которой налито масло. Толщина слоя масла в 2 раза меньше толщины пластины. Найти отношение времени распространения света в пластине и в масле. Показатели преломления масла и флинтгласса $n_1 = 1{,}50$ и $n_2 = 1{,}80$, соответственно.

Ответ: $t_2 / t_1 = 2{,}4.$

7.6. Луч света падает на поверхность раздела двух сред под углом $\alpha = 60°$. Определить угол преломления β, если скорость света в первой среде $\upsilon_1 = 2{,}50 \cdot 10^8$ м/с^2, а во второй среде $\upsilon_2 = 2{,}14 \cdot 10^8$ м/с^2.

Решение. Так как скорость света в среде может быть выражена следующим образом $\upsilon = c/n$, где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды, то закон преломления на границе раздела двух сред можно записать как

$$\frac{c}{\upsilon_1} \cdot \sin\alpha = \frac{c}{\upsilon_2} \cdot \sin\beta\,,$$

$$\Rightarrow\ \beta = \arcsin\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \cdot \sin\alpha\right) \cong 48°.$$

7.7. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\alpha = 30°$. Скорость распространения света в первой среде $\upsilon_1 = 1{,}25 \cdot 10^8$ м/с. Определить показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

Ответ: $n_1 = \dfrac{c}{\upsilon_1} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cong 1{,}4.$

7.8. Для полного внутреннего отражения необходимо, чтобы световой луч падал на границу раздела среда – вакуум под углом не менее $\alpha = 60°$. Определить скорость света в данной среде и ее показатель преломления.

Ответ: $n = \dfrac{1}{\sin\alpha} \cong 1{,}15$; $\upsilon = c \cdot \sin\alpha \cong 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

7.9. Определить предельный угол полного внутреннего отражения для границы раздела скипидар – воздух и скорости распространения света в скипидаре, если известно, что при угле падения света из воздуха $\alpha = 45°$ угол преломления $\beta = 30°$.

Ответ: $\upsilon = c \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cong 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с; $\varphi_{\text{пред.}} = \arcsin\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = 45°$.

7.10. Точечный источник света находится на дне широкого сосуда с жидкостью. Толщина слоя жидкости $h = 30$ см, показатель преломления $n = 5/4$. Определить минимальное и максимальное время, которое свет, идущий от источника и выходящий из жидкости в воздух, затрачивает на прохождение слоя жидкости.

Указание. Необходимо учесть эффект полного внутреннего отражения. Наибольшее время затрачивается, если луч света распространяется от источника к поверхности жидкости под углом, близким к предельному углу падения (практически совпадающим с ним).

Ответ: $t_{\min} = \dfrac{h \cdot n}{c} = 1{,}25 \cdot 10^{-9}$ с; $t_{\max} = \dfrac{h \cdot n^2}{\sqrt{n^2 - 1} \cdot c} \cong 2{,}08 \cdot 10^{-9}$ с.

7.11. Какой частоты колебания соответствуют наиболее длинноволновой красной части $(\lambda_{\max} = 0{,}76 \text{ мкм})$ и наиболее коротковолновой фиолетовой части $(\lambda_{\min} = 0{,}40 \text{ мкм})$ видимого спектра?

Решение. Скорость волны в среде, длина волны и частота колебаний связаны между собой соотношением:

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu .$$

В условии задачи речь идет о электромагнитных волнах, распространяющихся в вакууме. Поэтому красной границе видимого спектра соответствует частота колебаний:

$$\nu_{\text{кр.гр.}} = \nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = 3{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Гц};$$

фиолетовой границе видимого спектра:

$$\nu_{\text{ф.гр.}} = \nu_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} = 7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

7.12. Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе $\lambda_0 = 0{,}70$ мкм. Какой будет длина волны этого света в воде? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Какой цвет видит человек, открывший глаза под водой?

Ответ: $\lambda \cong 0{,}53$ мкм; человек видит красный цвет, поскольку цветовое восприятие человеческого глаза определяется частотой регистрируемого глазом излучения.

7.13. Определить показатель преломления среды, если известно, что свет с частотой $\nu = 4{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц имеет в ней длину волны $\lambda = 0{,}51$ мкм.

Ответ: $n \cong 1{,}33$.

7.14. Два световых луча одинаковой длины волны распространяются один – в вакууме, другой – в стекле. На сколько отличаются их частоты, если частота света в вакууме $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц? Показатель преломления стекла $n = 1{,}33$.

Ответ: $\Delta\nu = \dfrac{(n-1)\nu}{n} = 2 \cdot 10^{14}$ Гц.

7.15. Два световых луча одинаковой длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м распространяются один – в воде, другой – в скипидаре. На сколько отличается частоты света этих лучей? Показатели преломления воды и скипидара $n_1 = 1{,}33$ и $n_2 = 1{,}47$, соответственно.

Ответ: $\Delta\nu = \dfrac{c(n_2 - n_1)}{\lambda \cdot n_1 \cdot n_2} \cong 4{,}2 \cdot 10^{3}$ Гц.

7.16. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}50$ мкм падает нормально на стеклянную пластинку толщиной $h = 0{,}20$ мм, находящуюся в воздухе. Сколько длин волн укладывается на длине пластинки? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Указание. Учесть, что свет распространяется в среде с отличным от единицы показателем преломления.

Ответ: $N = \dfrac{n \cdot h}{\lambda_0} = 600$.

§ 8. Интерференция

Задачи

8.1. На пути одного из параллельных световых лучей поместили нормально ему, плоскопараллельную пластинку толщиной $h = 10$ мкм из вещества с показателем преломления $n = 1{,}2$. Какую оптическую разность хода вносит пластинка? Какую разность фаз вносит пластинка? Длина волны излучения в вакууме составляет $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Решение. Оптическая длина пути луча в пластинке

$$l_1 = n \cdot h;$$

оптическая длина пути второго луча, не пересекающего пластинку, на том же участке (имеется в виду, что он распространяется в вакууме или среде, имеющей показатель преломления близкий к единице)

$$l_2 = h.$$

$$\Rightarrow \ \Delta l = l_1 - l_2 = h(n-1) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = 8\pi \text{ рад.}$$

8.2. Два интерферирующих луча монохроматического света с длиной волны в вакууме $\lambda = 0{,}5$ мкм распространяются в кюветах длиной $S = 10$ см каждая, один – в воздухе, другой – в аммиаке. Показатели преломления воздуха и аммиака $n_{\text{в}} = 1{,}00027$ и $n_{\text{а}} = 1{,}00038$, соответственно. Определить возникающую оптическую разность хода лучей и разность фаз колебаний.

Ответ: $\Delta l = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ м; $\Delta\varphi = 44\pi$.

8.4.* На пути одного из параллельных световых лучей поместили плоскопараллельную пластинку толщиной $h = 10$ мкм из вещества с показателем преломления $n = 1{,}4$. Угол падения луча на пластинку $\alpha = 45°$. Какую оптическую разность хода вносит пластинка? Какую разность фаз вносит пластинка? Длина волны излучения в вакууме $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Решение. Искомая оптическая разность хода (см. рис. 8.1)

$$\Delta l = AC \cdot n + CD - AE,$$

ACD – траектория распространения луча с учетом преломления на границах пластинки, AE – траектория того же луча в случае, когда пластинка отсутствует, и преломление не происходит.

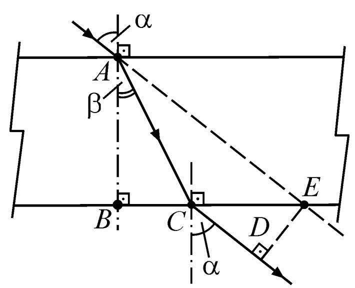

Рис. 8.1

С учетом того обстоятельства, что $AB = h$, используя закон преломления можно записать:

$AE = \dfrac{AB}{\cos\alpha} = \dfrac{h}{\cos\alpha}$ из треугольника ABE,

$AC = \dfrac{AB}{\cos\beta} = \dfrac{h}{\cos\beta}$ из треугольника ABC,

$CD = CE \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = CE \cdot \sin\alpha$ из треугольника CDE,

$CE = BE - CE = h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - h \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ из треугольников ABE и ABC,

$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$.

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{n^2 h}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} + \frac{h \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{h \cdot \sin^2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} + \frac{h}{\cos\alpha} =$$

$$= h\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \cong 5 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta l}{\lambda} \cong 20\pi \text{ рад.}$$

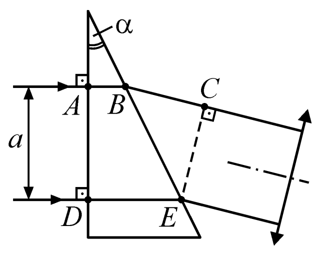

Рис. 8.2

8.5.* Два параллельных монохроматических луча падают нормально на грань стеклянной призмы и выходят из нее параллельно главной оптической оси тонкой линзы, поставленной на пути лучей с целью наблюдения в фокальной плоскости линзы картины интерференции. Какую оптическую разность хода имеют лучи, падающие на линзу, если при попадании на призму их оптическая разность хода была равна нулю. Расстояние между лучами, падающими на призму, равно a, преломляющий угол призмы (угол раствора граней) равен α, показатель преломления стекла равен n.

Указание. Искомая оптическая разность хода лучей $\Delta l = = AB \cdot n + BC - DE \cdot n$ (см. рис. 8.2).

Ответ: $\Delta l = 0$.

8.6. Два когерентных световых луча достигают некоторой точки с разностью хода $\Delta l = 2$ мкм. Что произойдет в этой точке – усиление или ослабление света – если свет: а) красного цвета (λ = 760 нм); б) желтого цвета (λ = 580 нм); в) фиолетового цвета (λ = 400 нм)?

Решение. В условии задачи подразумевается, что электромагнитная волна в обоих лучах плоскополяризована, и плоскости поляризации совпадают.

В точке наблюдения интенсивность результирующей волны связана с интенсивностями складываемых волн соотношением:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\Delta\varphi ,$$

где $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda}$ – разность фаз складываемых колебаний в точке наблюдения.

Интенсивность результирующей волны необходимо сравнивать с суммой интенсивностей складываемых волн, так как при сложении волн от некогерентных источников, когда интерференционная картина отсутствует, интенсивности складываемых волн суммируются, т.е. третье слагаемое в выше приведенном соотношении отсутствует.

Таким образом, ответ на вопрос, что происходит при сложении световых волн – усиление или ослабление света – зависит от знака $\cos\Delta\varphi$: при $\cos\Delta\varphi < 0$ происходит ослабление света, при $\cos\Delta\varphi > 0$ – усиление. Следует принимать во внимание в расчетах, что в силу периодичности функции косинуса имеет место упрощающее выражение:

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha, \text{ где } k \text{ – целое число.}$$

а) $\Delta\varphi = 1,26\pi + 4\pi \Rightarrow \cos\Delta\varphi = -0,68 \Rightarrow$ ослабление света;

б) $\Delta\varphi = 0,9\pi + 6\pi \Rightarrow \cos\Delta\varphi = -0,95 \Rightarrow$ ослабление света;

в) $\Delta\varphi = 10\pi \Rightarrow \cos\Delta\varphi = 1 \Rightarrow$ усиление света.

8.7. Оптическая разность хода волн от двух когерентных источников в некоторой точке пространства $\Delta l = 0,872$ мкм. Каков будет результат интерференции в этой точке, если длина волны будет равна: а) $\lambda = 581$ нм; б) $\lambda = 436$ нм; в) $\lambda = 698$ нм.

Ответ: а) $\cos\Delta\varphi = -1 \Rightarrow$ интерференционный минимум интенсивности света;

б) $\cos\Delta\varphi = +1 \Rightarrow$ интерференционный максимум интенсивности света;

в) $\cos\Delta\varphi = 0 \Rightarrow$ интенсивность света в точке наблюдения равна сумме интенсивностей складываемых волн;

$\Delta\varphi$ – разность фаз результирующих колебаний электромагнитного поля в точке наблюдения.

8.8. Световые волны от двух когерентных источников с длиной волны $\lambda = 400$ нм приходят в одну и ту же точку пространства, имея разность хода: а) $\Delta l = 2{,}0$ мкм; б) $\Delta l = 2{,}2$ мкм. Каков будет результат интерференции?

<u>Ответ:</u> а) интерференционный максимум;
б) интерференционный минимум.

8.9. Найти все длины волн видимого света ($0{,}38$ мкм $< \lambda <$ $< 0{,}76$ мкм), которые будут: а) максимально усилены; б) максимально ослаблены при оптической разности хода интерферирующих волн от когерентных источников $\Delta l = 1{,}80$ мкм.

<u>Указание.</u> Найти величину отношения $\Delta l / \lambda$ для краев рассматриваемого спектрального интервала:

$$2{,}4 < \Delta l / \lambda < 4{,}7 .$$

Максимальное усиление света (интерференционный максимум) наблюдается при условии

$$\Delta l / \lambda = k ,$$

максимальное ослабление света (интерференционный минимум) наблюдается при условии

$$\Delta l / \lambda = k + 1/2 , \quad \text{где } k \text{ – целое число.}$$

<u>Ответ:</u> а) $\lambda_1 = 0{,}45$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}60$ мкм;
б) $\lambda_1 = 0{,}40$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}51$ мкм; $\lambda_3 = 0{,}72$ мкм.

8.10. На диафрагму D падает параллельный монохроматический световой поток с длиной волны $\lambda = 560$ нм. В диафрагме имеются две узкие параллельные щели на расстоянии $d = 10^{-4}$ м одна от другой (рис. 8.3). На расстоянии $l = 1$ м от диафрагмы параллельно ей располагается экран Э. Определить расстояние между соседними интерференционными максимумами (ширину интерференционной полосы) на экране.

Решение. Согласно принципу Гюйгенса щели являются источниками, и за ними свет распространяется во всех направлениях. Так как излучение этих источников получено путем выделения из одной волны, то они являются когерентными источниками, а способ наблюдения интерференции – аналогичен опыту Юнга. Таким образом мы можем воспользоваться расчетными соотношениями, полученными для опыта Юнга, например, для ширины интерференционной полосы:

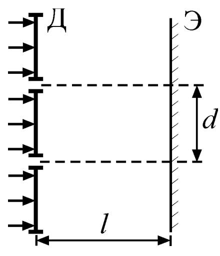

Рис. 8.3

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot l}{d} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

8.11. От двух когерентных источников красного света получили на экране интерференционную картину. Как изменится картина интерференции, если воспользоваться источниками фиолетового света?

Ответ: интерференционные полосы станут уже.

8.12. Как изменится интерференционная картина от двух когерентных источников на экране, если не изменяя других условий опыта: а) удалить источники от экрана; б) сблизить источники света?

Ответ: а) интерференционные полосы станут шире; б) интерференционные полосы станут шире.

8.13. От двух когерентных источников наблюдают интерференцию света на экране в воздухе. Как изменится картина интерференции, если наблюдения производить в воде, сохраняя все остальные условия опыта неизменными? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

Ответ: Ширина интерференционных полос уменьшится в $n = 1,33$ раза.

8.14. Два когерентных источника S_1 и S_2 (рис. 8.4) испускают монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На каком расстоянии от точки O будет находится первый максимум освещенности на экране AB, параллельном прямой

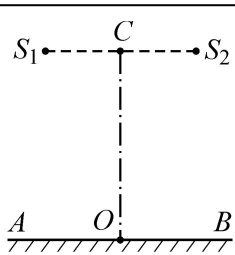

Рис. 8.4

S_1S_2, если $OC = 4$ м, $S_1S_2 = 1$ мм. $S_1C = CS_2$, CO перпендикулярно AB.

<u>Указание.</u> Для волн, идущих от источников S_1 и S_2 в точку O оптическая разность хода равна нулю, следовательно, в точке O на экране будет наблюдаться интерференционный максимум освещенности (так называемый нулевой максимум).

<u>Ответ:</u> на расстоянии равном $\dfrac{\lambda \cdot OC}{S_1S_2} = 2{,}4$ мм.

8.15. Расстояние на экране между двумя соседними максимумами освещенности $a = 1{,}2$ мм. Определить длину волны света, излучаемого когерентными источниками S_1 и S_2, если $S_1S_2 = b = 1$ мм, $OC = L = 2$ м (см. рис. 8.4).

<u>Ответ:</u> $\lambda = \dfrac{a \cdot b}{L} = 0{,}6$ мкм.

8.16. Два когерентных источника S_1 и S_2, излучающих свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, находятся на расстоянии $d = 2$ мм друг от друга (рис. 8.5). Параллельно линии, соединяющей источники, расположен экран на расстоянии $L = 2$ м от них. Что будет наблюдаться в точке A экрана: минимум или максимум освещенности?

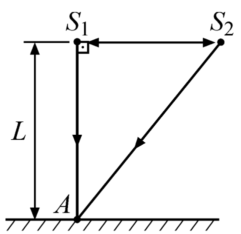

Рис. 8.5

<u>Решение.</u> Разность хода лучей, идущих от источников S_1 и S_2 в некоторую точку на экране, в опыте Юнга (при условии $d << L$) может быть выражена следующим образом:

$$\Delta l = \frac{xd}{L},$$

где x – координата точки на экране, отсчитанная от центра интерференционной картины, т.е. нулевого максимума освещенности (точка O на рис. 8.4) в направлении, параллельном прямой S_1S_2.

В данном случае координата точки A составляет:

$$x = \frac{d}{2} \;\Rightarrow\; \Delta l = \frac{d^2}{2L}.$$

Рассчитаем величину параметра $\Delta l/\lambda$. Если окажется, что $\Delta l/\lambda = k$, где k – целое число, то для точки A выполняется условие интерференционного максимума. Если $\Delta l/\lambda = k + 1/2$, то интерференционного минимума.

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{d^2}{2\lambda L} = 2,$$

$\Rightarrow$ в точке A будет наблюдаться максимум освещенности.

8.17. На диафрагму с двумя узкими щелями, находящимися на расстоянии $d = 2{,}5$ мм, падает по нормали к ней монохроматический свет. Интерференционная картина образуется на экране, отстоящем от диафрагмы на расстоянии $L = 100$ см и параллельном ей. Куда и на какое расстояние сместятся интерференционные полосы, если одну из щелей закрыть стеклянной пластинкой толщиной $b = 10$ мкм? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Указание. Достаточно определить перемещение нулевого интерференционного максимума, который образуется при сложении волн от двух источников, каковыми являются щели в диафрагме, обладающих оптической разностью хода равной нулю. Так как ширина интерференционной картины всегда много меньше расстояния от источников света до экрана, то можно принять, что световые лучи, идущие от щели к экрану через стеклянную пластинку и дающие вклад в формирование интерференционной картины, падают на поверхность пластинки практически нормально.

Если обозначить S_1 и S_2, l_1 и l_2 геометрическую длину пути и оптическую длину пути лучей от соответствующей щели, то для определения смещения нулевого максимума можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} l_1 = (S_1 - b) + bn \\ l_2 = S_2 \\ S_2 - S_1 = \dfrac{x_{\text{см.}} \cdot L}{d} \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_{\text{см.}} = \frac{(n-1)bL}{d} = 2 \text{ мм.}$$

Ответ: интерференционные полосы сместятся в сторону щели, закрытой стеклянной пластинкой.

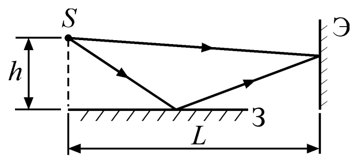

Рис. 8.6

8.18. Опыт Ллойда состоит в получении на экране Э интерференционной картины от точечного монохроматического источника S при наложении прямых и отраженных тот зеркала З лучей (рис. 8.6). Определить ширину интерференционной полосы на экране, если длина волны света $\lambda = 0{,}7$ мкм, расстояние от источника света до плоскости зеркала $h = 1$ мм, до экрана $L = 4$ м.

Указание. Интерференционную картину на экране можно рассматривать как результат сложения волн от двух точечных когерентных источников – действительного и его мнимого изображения в зеркале.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{\lambda L}{2h} = 1{,}4$ мм.

8.19.* Пучок параллельных монохроматических световых лучей падает перпендикулярно на основание стеклянной равнобедренной призмы с малым углом преломления $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ рад. Размер основания призмы $2a = 3$ см (рис. 8.7). Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. На каком максимальном расстоянии от призмы можно будет наблюдать интерференционную картину? Какова максимально возможная ширина интерференционной картины на экране, параллельном основанию призмы? Какова ширина интерференционных полос? Длина волны света $\lambda = 0{,}6$ мкм.

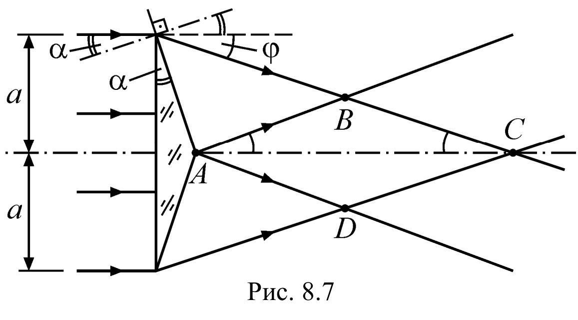

Рис. 8.7

Решение. Преломление исходного пучка света в двух половинах призмы приведет к формированию за ней двух пересекающихся пучков параллельных световых лучей. В области пересечения указанных пучков $ABCD$ (см. рис. 8.7) можно наблюдать картину интерференции, так как в этой области происходит сложение двух когерентных волн, образованных путем деления одной и той же исходной волны.

Максимальное расстояние от призмы, на котором еще возможно наблюдение картины интерференции равно длине отрезка AC. В силу малой толщины линзы и малости угла φ отклонения лучей линзой от первоначального направления:

$$\frac{a}{AC} = \operatorname{tg}\varphi \cong \varphi \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{a}{\varphi}.$$

Запишем закон преломления для луча, выходящего из призмы, и воспользуемся малостью углов падения и преломления:

$$n \cdot \sin\alpha = \sin(\alpha + \varphi) \quad \Rightarrow \quad n \cdot \alpha = \alpha + \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad AC = \frac{a}{\alpha(n-1)} = 0{,}6 \text{ м}.$$

Максимально возможная ширина интерференционной картины достигается на середине отрезка AC, так как треугольник ABC – равнобедренный, и равна длине отрезка BD:

$$BD = a = 1{,}5 \text{ см}.$$

Для вычисления ширины интерференционной полосы воспользуемся расчетными параметрами схемы Юнга. В силу того обстоятельства, что ширина интерференционной картины всегда много меньше расстояния от экрана, на котором она наблюдается, до источников когерентного излучения, можно считать, что угол между лучами, идущими от источников в одну точку на экране:

$$\Theta \cong \frac{d}{L},$$

где d – расстояние между источниками, L – расстояние от источников до экрана.

Ширина интерференционной полосы в схеме Юнга может быть, таким образом, представлена как:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\Theta}.$$

Полученное выражение мы можем использовать для расчета ширины интерференционной полосы в области пересечения двух пучков параллельных лучей света в случае малого угла между направлениями распространения пучков, так как пучок параллельных лучей может рассматриваться как излучение очень удаленного точечного источника.

В нашем случае:

$$\Theta = 2\varphi \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} = 12 \text{ мкм.}$$

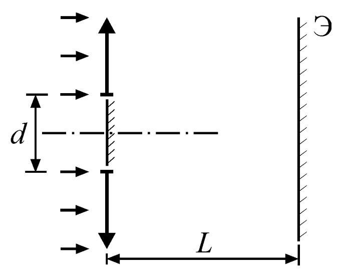

Рис. 8.8

8.20* Тонкую собирающую линзу диаметром $D = 5$ см с фокусным расстоянием $F = 50$ см разрезали по диаметру пополам и раздвинули на расстояние $d = 1$ см. На половинки линзы падает пучок монохроматического света от удаленного источника, параллельный главной оптической оси. На каком расстоянии L от линзы надо размещать экран Э, параллельный линзе (рис. 8.8), чтобы наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

Ответ: $L > L_{\min} = F \cdot \dfrac{D+d}{D} = 60$ см.

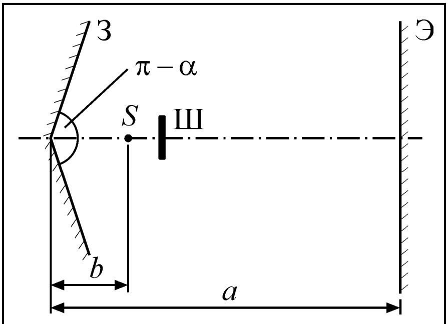

Рис. 8.9

8.21.* Два плоских зеркала образуют между собой угол $\pi - \alpha$, где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад. На биссектрисе угла на равных расстояниях от зеркал расположен точечный монохроматический источник света S (рис. 8.9). Определить ширину интерференционных полос на экране Э, расположенном на расстоянии $a = 200$ см от точки пересечения зеркал. Длина световой волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Расстояние от точки пересечения зеркала до источника $b = 20$ см. Ширма Ш препятствует непосредственному падению света от источника S на экран.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{\lambda(a+b)}{2\alpha b} = 0{,}55$ мм.

8.22. Два когерентных источника испускают электромагнитные волны синфазно, т.е. фазы испускаемых волн совпадают. Расстояние между источниками $d = \lambda$, где λ – длина волны испускаемого излучения (рис. 8.10). Определить направления, в которых можно наблюдать интерференционный максимум. Направление задается углом Θ, который отсчитывается от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точки наблюдения много больше расстояния d.

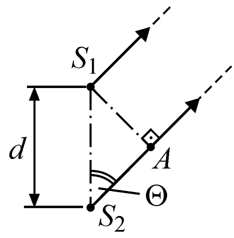

Рис. 8.10

Решение. В силу удаленности точки наблюдения от источников мы можем считать лучи, проведенные от источников к точке наблюдения параллельными. Если опустить перпендикуляр S_1A к прямой S_2A, то отрезок S_2O будет определять оптическую разность хода лучей, идущих от источников в точку наблюдения:

$$S_2A = \Delta l = S_1S_2 \cdot \cos\Theta = d \cdot \cos\Theta \text{ из треугольника } S_1S_2A.$$

Условие интерференционного максимума запишем следующим образом:

$$\Delta l = d\cos\Theta = k\lambda, \text{ где } k \text{ – целое число.}$$

$$\Rightarrow \cos\Theta = -1,\ 0,\ +1 \ \Rightarrow \ \Theta = \pi,\ \frac{\pi}{2},\ 0.$$

8.23. Два когерентных источника испускают электромагнитные волны синфазно. Расстояние между источниками $d = \lambda$, где λ – длина волны испускаемого излучения (рис. 8.1). Определить направления, в которых можно наблюдать интерференционный минимум. Направление задается углом Θ, который отсчитывается от линии, соединяющей источники. Расстояние от источников до точки наблюдения много больше расстояния d.

Ответ: $\Theta = \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{2}{3}\pi.$

8.24.* Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, изготовленная из материала с показателем преломления $n = 1{,}54$, чтобы при ее освещенности красным светом с длиной волны $\lambda = 750$ нм она в отраженном свете на воздухе казалась: а) красной; б) черной? Свет падает перпендикулярно к поверхности пластинки.

Решение. При наблюдении в отраженном свете будет оказывать влияние интерференция. световых волн, отраженных от двух границ пластинки. Для ответа на поставленный вопрос достаточно рассмотреть результаты сложения двух волн, появляющихся в результате однократного отражения, так как при отражении света, падающего перпендикулярно к границе раздела двух оптически прозрачных сред, интенсивность отраженной волны много меньше интенсивности падающей волны.

Первая из указанных волн появляется в результате отражения от лицевой (по отношению к наблюдателю) поверхности пластинки, т.е. **происходит отражение от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной** (показатель преломления материала пластинки больше показателя преломления воздуха). **Поэтому фаза волны претерпевает изменение на π рад (!!!)**, что равносильно увеличению оптической длины пути на $\Delta l_1 = \dfrac{\lambda}{2}$, где λ – длина волны света в вакууме.

Вторая из указанных волн появляется в результате отражения от задней поверхности пластинки, т.е. происходит отражение от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной. В этом случае изменения фазы волны не происходит. Проходя сквозь пластинку (дважды) вторая волна получает увеличение оптической длины пути на $\Delta l_2 = 2dn$, где d – толщина пластинки, по сравнению с первой волной. Таким образом, оптическая разность хода двух волн, определяющая их разность фаз в области интерференции, составляет

$$\Delta l = \Delta l_2 - \Delta l_1 = 2dn - \frac{\lambda}{2}.$$

Для того, чтобы в отраженном свете пластинка имела ярко выраженную красную окраску, необходимо выполнение условия интерференционного максимума при сложении двух отраженных волн:

$$\Delta l = k\lambda, \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2...$$

$$\Rightarrow\ 2dn = \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ \text{а) } d_{\min} = \frac{\lambda}{yn} = 0{,}12 \text{ мкм.}$$

Пластика будет казаться черной в отраженном свете, если для тех же волн будет выполняться условие интерференционного минимума:

$$\Delta l = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2...$$

$$\Rightarrow\ 2dn = \lambda(k+1)\ \Rightarrow\ \text{б) } d_{\min} = \frac{\lambda}{2n} = 0{,}24 \text{ мкм.}$$

Может оказаться, что явление интерференции способно привести к нарушению закона сохранения энергии, однако, это не так. Скрупулезный расчет показывает, что механизм интерференции, например, в рассматриваемом случае приводя к увеличению интенсивности отраженной волны, одновременно приводит к уменьшению интенсивности волны, прошедшей через пластинку, и наоборот уменьшение интенсивности отраженной волны сопровождается увеличением интенсивности волны, прошедшей через пластинку, причем сумма интенсивностей отраженной и прошедшей волн остается постоянной и равной интенсивности падающей волны.

8.25. Тонкая пленка толщиной $d = 0{,}5$ мкм, находящаяся в воздухе, освещается желтым светом с длиной волны $\lambda = 590$ нм. Какого цвета будет казаться эта пленка в отраженном свете, если показатель преломления вещества пленки $n = 1{,}48$, а свет падает перпендикулярно к поверхности пленки?

<u>Ответ:</u> в отраженном свете пленка будет казаться черной.

8.26. Белый свет падает на стеклянную пластинку толщиной $d = 0{,}4$ мкм, находящуюся в воздухе. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Свет с какими длинами волн, лежащими в пределах видимого спектра (400 нм $\le \lambda \le$ 760 нм): а) наиболее усиливается в отраженном пучке; б) наиболее ослабляется в отраженном пучке?

<u>Решение.</u> а) Запишем условие интерференционного максимума при сложении волн, возникающих в результате отражения света от двух поверхностей пластинки – лицевой и задней:

$$2dn - \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2...$$

$$\Rightarrow \; k = \frac{2dn}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$k_{\max} \le \frac{2dn}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{2} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = 2\,;$$

$$k_{\min} \ge \frac{2dn}{\lambda_{\max}} - \frac{1}{2} = 1{,}1 \quad \Rightarrow \quad k_{\min} = 2\,,$$

где $\lambda_{\min} = 0{,}40$ мкм и $\lambda_{\max} = 0{,}76$ мкм – границы указанного спектрального интервала.

Таким образом, условию наибольшего усиления света, т.е. условию интерференционного максимума, в отраженном пучке удовлетворяет единственная длина волны:

$$\lambda = \frac{2dn}{k_{\max}} = \frac{2dn}{k_{\min}} = 0{,}48 \text{ мкм.}$$

б) Запишем условие интерференционного минимума при сложении двух волн, образующихся в результате отражения света от лицевой и задней поверхностей пластинки:

$$2dn - \frac{\lambda}{2} = \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right), \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2...$$

$$\Rightarrow \; k = \frac{2dn}{\lambda} - 1$$

$$k_{\max} \le \frac{2dn}{\lambda_{\min}} - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = 2\,;$$

$$k_{\min} \ge \frac{2dn}{\lambda_{\max}} - 1 = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad k_{\min} = 1\,.$$

Таким образом, условию наибольшего ослабления света, т.е. условию интерференционного минимума в отраженном пучке удовлетворяют две длины волны:

$$\lambda_1 = \frac{2dn}{k_{\min} + 1} = 0{,}60 \text{ мкм;} \qquad \lambda_2 = \frac{2dn}{k_{\max} + 1} = 0{,}40 \text{ мкм.}$$

8.27. Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхности стекла последнее покрывают тонким слоем вещества, у которого показатель преломления меньше, чем у стекла (так называемое антибликовое покрытие). Тонкую пленку толщиной

$d = 0{,}80$ мкм из вещества с показателем преломления $n = 1{,}30$ нанесли на толстую стеклянную пластину. Показатель преломления стекла $n_{\text{ст.}} = 1{,}50$. С какой длиной волны для света видимого диапазона отражение будет наименьшим? Свет падает на пленку перпендикулярно к ее поверхности. Видимая часть спектра лежит в пределах 0,40 мкм $\le \lambda \le$ 0,76 мкм.

Указание. Большая толщина стеклянной пластины означает, что волна, появляющаяся в результате отражения от задней поверхности этой пластины не будет при сложении с двумя волнами, появляющимися при отражении от поверхностей пленки, создавать картину интерференции, так как она потеряет свойство когерентности по отношению к двум вышеупомянутым волнам.

Необходимо учесть, что отражение от поверхностей пленки – это отражение на границе раздела среды менее оптически плотной и более оптически плотной, т.е. условия отражения одинаковы на обеих границах раздела.

Ответ: $\lambda_1 = 0{,}46$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}59$ мкм.

§ 9. Дифракция. Дифракционная решетка. Дисперсия.

Задачи

9.1. Почему нельзя получит четкое изображение частицы размером 0,3 мкм в оптическом микроскопе?

Ответ. Размер частицы оказывается одного порядка с длиной волны света в оптическом диапазоне 0,40 мкм $\le \lambda \le$ 0,76 мкм. В этом случае изображение формируется не по законам геометрической оптики, а согласно принципу Гюйгенса – Френеля, происходит отклонение от прямолинейного распространения света, огибание светом препятствий. Из-за этого изображение получается «размытым».

9.2. Почему в центральной части спектра, полученного на экране при освещении дифракционной решетки белым светом, всегда наблюдается белая полоса?

Ответ. Для всех длин волн соблюдается условие максимума освещенности.

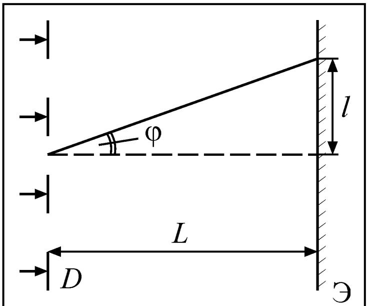

Рис. 9.1

9.3. При наблюдении через дифракционную решетку D красный край спектра первого порядка виден на расстоянии $l = 3{,}5$ см от середины экрана (рис. 9.1). Расстояние от дифракционной решетки до экрана $L = 50$ см. Период решетки $d = 10$ мкм. Определить длину волны красного цвета.

Решение. Уравнение дифракционной решетки, выражающее положение максимумов

$$d \cdot \sin\varphi = k\lambda\ ,$$

где φ – угол дифракции, k – порядок спектра; в соответствии с условиями задачи приобретает вид:

$$d \cdot \frac{l}{\sqrt{L^2 + l^2}} = \lambda$$

$\Rightarrow\ \ \lambda \cong 0{,}70$ мкм.

9.4. Дифракционную решетку, на каждый миллиметр которой нанесено $n = 75$ штрихов, освещают монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. При этом на экране видны светлые полосы на равных расстояниях друг от друга. Расстояние от середины центральной светлой полосы на экране до середины второй полосы, отсчитанной после центральной (т.е. центральную не считают), равно $h = 1{,}25$ см. Определить расстояние от решетки до экрана.

Ответ: $L = h \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{k\lambda}\right)^2 - 1} \cong \frac{hd}{k\lambda} \cong 17$ см.

9.5. Дифракционная решетка содержит 100 штрихов на 1 мм. Найти длину волны монохроматического света, падающего на решетку по нормали, если угол между направлениями, для которых наблюдаются максимумы первого порядка, составляет $\alpha = 8°$.

Ответ: $\lambda = d \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cong \frac{d \cdot \alpha}{2} \cong 0{,}70$ мкм.

9.6. Определить угол отклонения (угол дифракции) лучей красного цвета $\lambda = 0{,}7$ мкм в спектре первого порядка, полученном с помощью дифракционной решетки, период которой $d = 0{,}02$ мм. Свет падает на решетку по нормалям.

Ответ: $\varphi = \arcsin\dfrac{\lambda}{d} \cong 2$ угл. град.

9.7. При помощи дифракционной решетки с периодом $d = 0{,}022$ мм получен первый дифракционный максимум на расстоянии $l_1 = 3{,}6$ см от центрального максимума и на расстоянии $l_2 = 1{,}8$ м от решетки. Найти длину световой волны.

Ответ: $\lambda = \dfrac{d l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \cong \dfrac{d l_1}{l_2} \cong 0{,}44$ мкм.

9.8. Найти период решетки, если дифракционный максимум первого порядка получен на расстоянии $l_1 = 2{,}43$ см от середины центрального максимума, а расстояние от дифракционной решетки до экрана $l_2 = 1{,}00$ м. Решетка освещена светом с длиной волны $\lambda = 486$ нм, падающим на решетку по нормали.

Ответ: $d = \dfrac{\lambda\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1} \cong \dfrac{\lambda l_2}{l_1} \cong 2 \cdot 10^{-5}$ м.

9.9. Какова ширина спектра первого порядка, полученного на экране, отстоящем на расстоянии $L = 3$ м от дифракционной решетки с периодом $d = 0{,}01$ мм? Длины волн спектра заключены в пределах от $\lambda_1 = 0{,}38$ мкм до $\lambda_2 = 0{,}76$ мкм.

Ответ: $\Delta h = L\left(\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{d^2 - \lambda_2^2}} - \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{d^2 - \lambda_1^2}}\right) \cong \dfrac{L(\lambda_2 - \lambda_1)}{d} \cong 11$ см.

9.10. При освещении дифракционной решетки светом с длиной волны $\lambda_1 = 590$ нм спектр третьего порядка виден под углом $\alpha_1 = 10°12'$. Определить длину волны λ_2 линии, для которой спектр второго порядка будет виден под углом $\alpha_2 = 6°18'$ (угол дифракции).

Ответ: $\lambda_2 = \lambda_1 = \dfrac{3\sin\alpha_2}{2\sin\alpha_1} \cong 550$ нм.

9.11. Определить длину волны λ_2 для линии в дифракционном спектре третьего порядка, совпадающей с изображением линии спектра четвертого порядка, у которой длина волны $\lambda_1 = 490$ нм.

Ответ: $\lambda_2 = 653$ нм.

9.12. Какой наибольший порядок спектра можно наблюдать с помощью дифракционной решетки, имеющей $N = 500$ штрихов на расстоянии $\Delta l = 1$ мм, при освещении ее светом с длиной волны $\lambda = 720$ нм?

Решение. Запишем уравнение дифракционной решетки и воспользуемся ограниченностью функции синуса:

$$\begin{cases} s \cdot \sin\varphi = k\lambda, \quad \text{где } d = \dfrac{\Delta l}{N}; \\ \sin\varphi < 1, \quad \text{так как углы дифракции, при которых можно} \\ \qquad\qquad \text{наблюдать спектр на экране } \varphi < 90°. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k < \frac{d}{\lambda} \cong 2{,}8 \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = 2.$$

9.13. Для излучения некоторой длины волны дифракционный максимум первого порядка наблюдается под углом $\varphi_1 = 8{,}5°$. Какой угол дифракции соответствует последнему максимуму для той же длины волны?

Указание. Необходимо использовать уравнение дифракционной решетки и условие ограниченности функции синуса:

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi_1 = \lambda, \\ d \cdot \sin\varphi_{\max} = k_{\max} \cdot \lambda, \\ \sin\varphi_{\max} < 1. \end{cases}$$

Ответ: $\varphi_{\max} = 62{,}5°$.

9.14. На дифракционную решетку, имеющую период $d =$ $= 4 \cdot 10^{-4}$ см, нормально падает монохроматическое излучение. Определить длину волны, если угол между спектрами второго и третьего порядка $\alpha = 2°30'$. Углы отклонения считать малыми.

Ответ: $\lambda = \alpha \cdot d \cong 0{,}175$ мкм.

9.15. При падении на дифракционную решетку монохроматического света первый дифракционный максимум наблюдается под углом дифракции $\varphi_1 = 6{,}9°$, а последний – под углом $\varphi_п = 74°$. Чему равен максимальный порядок спектра решетки для длины волны падающего света?

Ответ: $K_{max} = 8$.

9.16.* Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2{,}2$ мкм, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядков $\Delta\varphi = 15°$.

Указание. Использовать уравнение дифракционной решетки и формулы тригонометрических преобразований:

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi = \lambda, \\ d \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) = 2\lambda, \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi \cdot \cos\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi \cdot \cos\varphi, \\ \mathrm{ctg}^2\varphi + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda = \dfrac{d \cdot \sin\Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4\cos\Delta\varphi}} \cong 0{,}53$ мкм.

9.17. На дифракционную решетку нормально падает свет от разрядной трубки. Какова должна быть постоянная решетки, чтобы в направлении $\varphi = 41°$ совпадали максимумы линий $\lambda_1 = 656{,}3$ нм и $\lambda_2 = 410{,}2$ нм? Известно, что максимальный порядок спектра данной решетки в области видимого света $400 \text{ нм} \le \lambda \le 760 \text{ нм}$ $k_{max} = 12$.

Решение. Запишем уравнение дифракционной решетки для обеих приведенных длин волн:

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi = k_1\lambda_1 \\ d \cdot \sin\varphi = k_2\lambda_2 \end{cases}, \text{ где } d \text{ – период решетки.}$$

$\Rightarrow \dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1{,}6 = \dfrac{16}{10} = \dfrac{8}{5}$, в общем случае можем представить отношение k_2/k_1 следующим образом:

$$k_1 = 5m\,,\quad k_2 = 8m\,,\quad \text{где}\quad m = 1,\,2,\,3...$$

Принимая во внимание, что k_{max} = 12, приходим к выводу:

$$m = 1 \quad \text{и} \quad k_1 = 5\,,\quad k_2 = 8\,.$$

$$\Rightarrow\quad d = \frac{k_1\lambda_1}{\sin\varphi} = \frac{k_2\lambda_2}{\sin\varphi} = 5{,}0 \text{ мкм.}$$

9.18.* Свет с длиной волны $\lambda = 535$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти период решетки, если одному из максимумов соответствует угол дифракции $\varphi = 35°$, а наибольший порядок спектра $k_{\,max} = 5$.

Указание. Используя уравнение дифракционной решетки можем записать:

$$\begin{cases} d\cdot\sin\varphi = k\cdot\lambda \\ d\cdot\sin\varphi_{max} = k_{max}\cdot\lambda \end{cases},\quad \text{где } d \text{ – период решетки.}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_{max} = \frac{k_{max}\cdot\sin\varphi}{k} =$$

$$= \begin{cases} k = 3 \;\Rightarrow\; \sin\varphi_{max} = 0{,}957 \;\Rightarrow\; d = \dfrac{k_{max}\cdot\lambda}{\sin\varphi_{max}} = 2{,}80 \text{ мкм;} \\ k = 4 \;\Rightarrow\; \sin\varphi_{max} = 0{,}718 \;\Rightarrow\; d = 3{,}73 \text{ мкм;} \\ k = 5 \;\Rightarrow\; \sin\varphi_{max} = 0{,}574 \;\Rightarrow\; d = 4{,}66 \text{ мкм.} \end{cases}$$

Далее, зная длину волны света, необходимо для найденных возможных значений периода решетки рассчитать соответствующий максимальный порядок спектра и сравнить его с $k_{max} = 5$, приведенным в условии задачи.

Ответ: $d = 2{,}80$ мкм.

9.19. В водоем на некоторую глубину помещен точечный источник белого света. Показатель преломления для красных лучей $n_к = 1{,}335$, а для фиолетовых $n_ф = 1{,}335$. Вычислить отношение радиусов кругов, в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей из воды в воздух.

Ответ: $\dfrac{R_к}{R_ф} = \sqrt{\dfrac{n_ф^2 - 1}{n_к^2 - 1}} \cong 1{,}01.$

9.20. Луч белого света падает под углом $\alpha = 60°$ на плоскопараллельную пластинку. Крайние красный и фиолетовый лучи светового пучка, выходящего на противоположной грани пластинки, отстоят друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0{,}3$ мм. Определить толщину пластинки, если показатель преломления стекла для красных и фиолетовых лучей, соответствующих границам видимого диапазона равны $n_{к} = 1{,}51$ и $n_{ф} = 1{,}53$, соответственно.

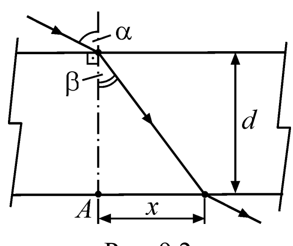

Рис. 9.2

Решение. Определим расстояние x от точки A на грани пластины до точки выхода светового луча из пластины (см. рис. 9.2):

$$\begin{cases} \sin\alpha = n\cdot\sin\beta \\ \dfrac{x}{d} = \operatorname{tg}\beta \end{cases} \Rightarrow \quad x = d\cdot\frac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = d\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{h_{к}^2-\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{h_{ф}^2-\sin^2\alpha}}\right);$$

$$d = \frac{\Delta x}{\sin\alpha\left(\dfrac{1}{\sqrt{h_{к}^2-\sin^2\alpha}} - \dfrac{1}{\sqrt{h_{ф}^2-\sin^2\alpha}}\right)} \cong 22 \text{ мм}.$$

9.21.* На стеклянную призму, находящуюся в воздухе, падает тонкий луч света под углом $\alpha = 30°$. Преломляющий угол призмы $\theta = 45°$ (см. рис. 9.3). Определить угол $\Delta\varphi$ между крайними лучами спектра при выходе из призмы, если показатели преломления стекла для крайних лучей видимого спектра $n_{к} = 1{,}62$ и $n_{ф} = 1{,}67$.

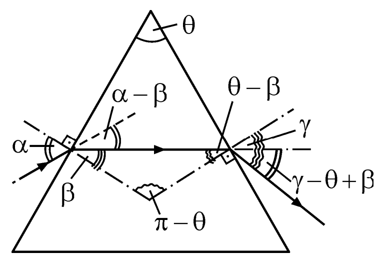

Рис. 9.3

Указание. Как следует из чертежа на рис. 9.3 угол поворота направления распространения луча в результате прохождения через призму:

$$\varphi = (\alpha - \beta) + (\gamma - \theta + \beta) = \alpha + \gamma - \theta .$$

Таким образом, угол $\Delta\varphi = \varphi_ф - \varphi_к = \gamma_ф - \gamma_к$.

Ответ: $\Delta\varphi \simeq 2{,}3°$.

9.22. Линза изготовлена из стекла, показатель преломления которого для красных лучей $n_к = 1{,}50$; а для фиолетовых – $n_ф = 1{,}52$. Радиусы кривизны обеих поверхностей линзы (радиусы сферических поверхностей) одинаковы и составляют $R = 1{,}00$ м. Определить расстояние между фокусами линзы для красных и фиолетовых лучей. Линза находится в воздухе.

Ответ: $\Delta F = \dfrac{R \cdot \left(n_ф - n_к\right)}{2\left(n_к - 1\right)\left(n_ф - 1\right)} \cong 3{,}8$ см.

§ 10. Квантовая оптика. Фотоны. Давление света. Фотоэффект

Электромагнитные волны, в частности свет, излучаются и поглощаются веществом в виде отдельных порций, энергия которых зависит от частоты:

$$E = h\nu. \tag{10.1}$$

Коэффициент пропорциональности h получил название постоянной Планка. Он вычислен на основе экспериментальных данных и равен

$$h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Порция света оказывается очень похожей на то, что принято называть частицей. Свойства света, обнаруживаемые при излучении и поглощении, называются корпускулярными. Сама же световая частица была названа фотоном или квантом (порцией) электромагнитного излучения. Энергию фотона часто выражают не через частоту ν, а через циклическую частоту $\omega = 2\pi\nu$. При этом в качестве коэффициента пропорциональности вместо величины h используют величину $\hbar = h/2\pi$ (читается: аш с чертой), которая так же именуется постоянной Планка и равна

$$\hbar = 1{,}0545726 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

тогда энергия фотона выражается как $E = h\nu = \hbar\omega$.

Согласно теории относительности энергия всегда связана с массой соотношением $E = mc^2$. Так как энергия фотона равна $h\nu$, то следовательно, его масса m получается равной

$$m = \frac{h\nu}{c^2}, \tag{10.2}$$

где $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Так как фотон существует только в движении со скоростью света, то у него нет массы покоя. В этом заключается принципиальное отличие фотона от обычных частиц вещества. Как объект, обладающий массой, фотон должен подчиняться законам гравитации, т.е. тяготеть к другим массивным объектам. В частности, при движении вблизи поверхности Земли вверх по вертикали фотон затрачивает часть своей энергии на совершение работы против силы тяжести:

$$\Delta E = A = mgl = h\nu gl/c^2, \tag{10.3}$$

где l – пройденный путь, что приведет к уменьшению его частоты на величину:

$$\Delta\nu = \nu gl/c^2. \tag{10.4}$$

По известной массе и скорости фотона можно найти его импульс:

$$P = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{10.5}$$

Направлен импульс фотона по световому лучу. Из наличия у фотона импульса вытекает, что свет, падающий на поверхность какого-либо тела, должен оказывать на эту поверхность давление и действовать на тело с силой, равной импульсу, сообщаемому фотонами телу в единицу времени, в полном соответствии со вторым законом Ньютона в импульсной форме.

Фотоэлектрический эффект или фотоэффект (внешний) – испускание электронов веществом под действием света. Прибор для наблюдения фотоэффекта схематически изображен на рис. 10.1. Металлические электроды – анод и катод – помещены в откачанный

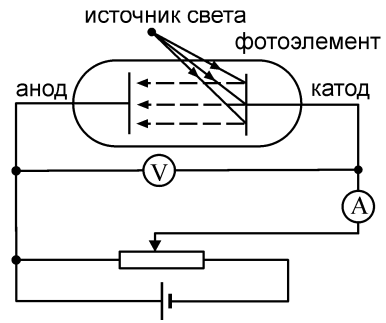

Рис. 10.1

до глубокого вакуума корпус и вместе с ним образуют фотоэлемент или вакуумный фотодиод. Электроды соединены через реостат с источником э.д.с., что позволяет регулировать напряжение на электродах. Для измерения тока в цепи и напряжения на электродах в электрическую схему включены амперметр и вольтметр. Свет, проходя через стеклянный корпус прибора (или специальное стеклянное окно в корпусе прибора), падает на катод. В результате в цепи возникает ток, получивший название фототока (катод часто называют фотокатодом). Возникновение фототока объясняется тем, что под воздействием света с поверхности катода вылетают электроны (фотоэлектроны), которые под действием электрического поля (ускоряющего) движутся к аноду. Опытным путем установлено, что фототок не подчиняется закону Ома. На рис. 10.2 изображен характерный вид графика зависимости фототока от напряжения между электродами при неизменной освещенности. Эту зависимость называют вольтамперной характеристикой фотоэлемента (вакуумного фотодиода). Отрицательные значения прикладываемого напряжения соответствуют ситуации, когда электрическое поле не ускоряет, а тормозит фотоэлектроны, т.е. освещаемый электрод по существу является анодом.

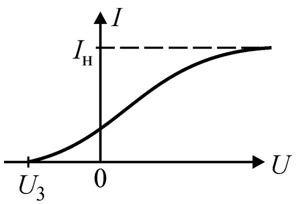

Рис. 10.2

Пологий ход кривой указывает на то, что фотоэлектроны вылетают с поверхности катода с различными по величине скоростями. Часть электронов, соответствующих силе тока при $U = 0$, обладает скоростями, достаточными для того, чтобы долететь до анода без помощи ускоряющего электрического поля между электродами. Для того, чтобы такие электроны не долетели до анода, т.е. для обращения силы тока в нуль, нужно поменять полярность источника э.д.с. В этом случае между электродами возникнет тормозящее электрическое поле. Напряжение $U_з$, при котором $I = 0$, называют задерживающим или запирающим. Фотоэлектроны, обладающие при вылете из катода наибольшим значением скорости υ_{max} оказываются не в состоянии преодолеть расстояние до анода, если кинетическая энергия, которой они изначально обладают, будет без остатка затрачена на работу против сил поля:

$$\frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = -\mathrm{e}U_з, \tag{10.6}$$

здесь е – величина (модуль) заряда электрона, в правой части равенства стоит знак «–», так как $U_з < 0$.

При некотором напряжении между электродами фототок достигает своего максимального значения $I_н$, называемого током насыщения, при котором все испущенные катодом электроны попадают на анод. Следовательно сила тока насыщения $I_н$ определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света.

Экспериментально установлены следующие законы фотоэффекта:

1. Количество электронов, выбиваемых светом с поверхности металла в единицу времени, прямо пропорционально интенсивности света (т.е. $I_н$ пропорционален интенсивности света при неизменном спектре излучения).

2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности (т.е. $|U_з|$ линейно возрастает с частотой света).

3. Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта, т.е.минимальная частота света $\nu_{кр.}$ (или максимальная длина волны $\lambda_{кр.}$), при которой еще возможен фотоэффект (при $\nu < \nu_{кр.}$ или $\lambda > \lambda_{кр.}$ фотоэффект невозможен).

Лишь первый из этих законов может быть объяснен на основе волновой теории света, а два других противоречат ей и могут быть поняты лишь в рамках квантовых представлений. Исходя из квантовых представлений, Эйнштейн предположил, что при фотоэффекте электроны поглощают энергию света квантами $h\nu$. Поглощая фотон и приобретая всю его энергию, электрон совершает работу выхода A (против сил, удерживающих его внутри вещества) и покидает металл. Если электрон находится не у самой поверхности, то часть энергии может быть потеряна вследствие столкновений в веществе. Остаток энергии образует кинетическую энергию электрона, покинувшего вещество. Применяя закон сохранения энергии, Эйнштейн получил уравнение для фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}. \tag{10.7}$$

Теория Эйнштейна так объясняет законы фотоэффекта:

1. Интенсивность света пропорциональна количеству излучаемых в единицу времени фотонов, и чем больше поток фотонов падает на поверхность металла, тем больше рождается фотоэлектронов (следует отметить, что далеко не все падающие фотоны отдают свою энергию фотоэлектронам, основная доля световой энергии затрачивается на нагрев вещества, поглощающего свет).

2. Зависимость кинетической энергии электронов от частоты падающего света следует из уравнения Эйнштейна:

$$\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = h\nu - A. \tag{10.8}$$

3. Их этого же уравнения следует и существование красной границы фотоэффекта:

$$\upsilon_{\max} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \nu_{\text{кр.}} = \frac{A}{h}, \quad \lambda_{\text{кр.}} = \frac{c}{\nu_{\text{кр.}}} = \frac{hc}{A}. \tag{10.9}$$

Эффектом, обратным по отношению к фотоэффекту, является испускание излучения в рентгеновской трубке при торможении ускоренных электрическим полем электронов в веществе анода (антикатода). При этом максимальная энергия испускаемого фотона равна кинетической энергии электрона:

$$h\nu_{\max} = \mathrm{e}U,$$

где e – заряд электрона, U – напряжение на трубке.

В оптике, атомной и ядерной физике энергию (энергию фотона, энергию фотоэлектрона, работу выхода и т.д.) принято выражать в электрон-вольтах (сокращенно: эВ). 1 эВ равен энергии, приобретаемой электроном при прохождении разности потенциалов в 1 В.

$$1\ \text{эВ} \cong 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

§ 11. Фотоны

Задачи

11.1. Найти массу фотона, энергию фотона и импульс фотона для: а) красных лучей с длиной волны $\lambda_1 = 7200$ Å; б) рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda_2 = 25$ Å; в) гамма-лучей с длиной волны $\lambda_3 = 1,24 \cdot 10^{-3}$ Å. Постоянная Планка $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Решение. Начнем с вычисления энергии фотона:

$$E_ф = \frac{hc}{\lambda} = \begin{cases} 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,7 \text{ эВ}, \\ 8,0 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 0,50 \text{ кэВ}, \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 10 \text{ МэВ}. \end{cases}$$

Далее вычислим импульс фотона и его массу:

$$P_ф = \frac{E_ф}{c} = \begin{cases} 0,93 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \\ 2,7 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \\ 5,3 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \end{cases}, \qquad m_ф = \frac{E_ф}{c^2} = \begin{cases} 3,1 \cdot 10^{-36} \text{ кг} \\ 0,89 \cdot 10^{-33} \text{ кг} \\ 1,8 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \end{cases},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

11.2. Энергия фотона $E_ф = 4,14$ эВ. Найти длину волны, которая ему соответствует.

Ответ: $\lambda = 3,0 \cdot 10^{-7}$ м = 0,3 мкм.

11.3. Определить импульс фотона с энергией $E_ф = 1,2 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Ответ: $P_ф = 4 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с.

11.4. Масса фотона $m_ф = 1,66 \cdot 10^{-35}$ кг. Какова соответствующая ему длина волны?

Ответ: $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-7}$ м.

11.5. Во сколько раз энергия фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda_1 = 1$ Å больше энергии фотона видимого света с длиной волны $\lambda_2 = 0,4$ мкм?

Ответ: $E_{ф1}/E_{ф2} = 4 \cdot 10^3$.

11.6. Во сколько раз отличаются энергии фотонов, которые соответствуют частоты $\nu_1 = 5 \cdot 10^{15}$ Гц и $\nu_2 = 1{,}5 \cdot 10^{16}$ Гц?

Ответ: $E_{ф2}/E_{ф1} = 3$.

11.7. Импульсы фотонов $P_1 = 4 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с и $P_2 = 1 \cdot 10^{-21}$ кг·м/с. Во сколько раз отличаются соответствующие им длины волн?

Ответ: $\lambda_1/\lambda_2 = 2{,}5$.

11.8. Найти импульс фотона, энергия которого равна энергии покоя электрона. Масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $P_ф = 2{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

11.9. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы его энергия была равна энергии фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 1{,}24$ пм. Заряд электрона $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение: $e \cdot U = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \dfrac{hc}{\lambda e} = 1{,}0 \cdot 10^6$ В.

11.10. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 600$ нм?

Указание. Как покажет результат расчета, электрон – нерелятивистский, т.е. его скорость много меньше скорости света в вакууме. Поэтому можно импульс электрона записать, используя формулу из классической физики.

Ответ: $\upsilon \cong 1{,}2 \cdot 10^3$ м/с.

11.11. Найти массу фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре $t = 20$ °C. Скорость молекулы равна среднеквадратичной скорости. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/моль·К.

Решение:
$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{N_A}\right)\cdot\dfrac{\upsilon^2_{\text{ср.кв.}}}{2}=\dfrac{3}{2}kT \\ m_{\text{ф}}=E_{\text{ф}}/c^2 \\ P_{\text{ф}}=E_{\text{ф}}/c \\ P_{\text{ф}}=\left(\dfrac{M}{N_A}\right)\cdot\upsilon_{\text{ср.кв.}} \end{cases},$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура газа, $\dfrac{M}{N_A}$ – масса молекулы.

Универсальная газовая постоянная и постоянная Больцмана связаны соотношением:

$$k=R/N_A .$$

$$\Rightarrow\ m_{\text{ф}}=\frac{\sqrt{3RMT}}{N_A\cdot c}\cong 2{,}1\cdot10^{-32}\ \text{кг}.$$

11.12. Какова длина волны фотона, энергия которого равна средней кинетической энергии молекулы идеального одноатомного газа при температуре $T=300$ К? Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $\lambda=\dfrac{2hc}{3kT}\cong 3{,}2\cdot10^{-5}$ м.

11.13. Найти абсолютный показатель преломления среды, в которой свет с энергией фотона $E_{\text{ф}}=4{,}4\cdot10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda=3\cdot10^{-5}$ см.

Ответ: $n=\dfrac{hc}{\lambda E_{\text{ф}}}=1{,}5.$

11.14. Фотон с энергией $E_{\text{ф}}=6$ кэВ сталкивается с покоящимся электроном. Найти кинетическую энергию, приобретенную электроном, если в результате столкновения длина волны фотона изменилась на $y=20$ %. Считать, что скорость электрона много меньше скорости света в вакууме.

Указание. Выполняется закон сохранения энергии.

Ответ: $E_e = \dfrac{E_ф \cdot y}{1+y} = 1$ кэВ.

11.15.* Фотон с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$ м сталкивается с первоначально покоившимся электроном и рассеивается под прямым углом к первоначальному направлению своего движения. Какую скорость приобрел электрон в результате столкновения? Скорость электрона много меньше скорости света в вакууме. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Решение. Введем систему координат. Ось OX направим вдоль направления первоначального движения фотона, а ось OY – вдоль направления его движения после рассеяния. Обозначим угол между осью OX и вектором скорости электрона как α. Используя законы сохранения импульса и энергии запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P_ф = \dfrac{h}{\lambda} \\ OX: \quad P_ф = m\nu\cos\alpha \\ OY: \quad O = P'_ф - m\nu\sin\alpha \\ P_ф \cdot c = P'_ф \cdot c + \dfrac{m\nu^2}{2} \end{cases},$$

где $P_ф$ и $P'_ф$ – импульс фотона до и после рассеяния.

Из второго и третьего уравнений системы получаем новое уравнение:

$$P_ф^2 + P_ф'^2 = m^2\nu^2.$$

$P'_ф$ выразим из последнего уравнения системы и подставим во вновь полученное:

$$P_ф^2 + P_ф^2 - \frac{m\nu^2}{c}P_ф + \frac{m^2\nu^2}{4c^2} = m^2\nu^2.$$

Так как согласно условию $\frac{v}{c} << 1$, то слагаемым $\frac{m^2 v^2}{4c^2} = \frac{m^2 v^2}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$ пренебрежем по сравнению с $m^2 v^2$.

$$\Rightarrow \quad v^2 = +\frac{2cP_ф}{m\left(P_ф + mc\right)}.$$

Окончательно для скорости электрона получим:

$$v = \frac{h}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2c}{m\left(\frac{h}{\lambda} + mc\right)}} \cong 2,6 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

11.6. Фотон, которому соответствует длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$ м, претерпевает столкновение с покоящимся электроном и рассеивается назад. Какую скорость приобретает электрон? Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная Планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с. Скорость электрона много меньше скорости света в вакууме.

<u>Ответ:</u> $v \cong \frac{2h}{\lambda m} = 3 \cdot 10^6$ м/с.

11.7. Сколько фотонов с длиной волны $\lambda = 4500$ Å содержит импульс монохроматического излучения с энергией $E = 6{,}62 \cdot 10^{-18}$ Дж? Постоянная Планка $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

<u>Ответ:</u> $N_ф = \frac{E}{hc/\lambda} = 15.$

11.8. Источник монохроматического света мощностью $P = 40$ Вт испускает $n = 1{,}2 \cdot 10^{20}$ фотонов в секунду. Определить длину волны излучения.

<u>Ответ:</u> $\lambda = \frac{nhc}{P} \cong 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ м.

11.9. Радиопередатчик мощностью $P = 1$ МВт излучает на частоте $v = 1$ МГц. Какова энергия в электрон-вольтах каждого излучаемого кванта? Сколько квантов излучается за каждый период колебаний электромагнитного поля?

Ответ: $E_ф \cong 4 \cdot 10^{-9}$ эВ; $n = \dfrac{P}{h\nu^2} \cong 1,5 \cdot 10^{28}$ квантов.

11.20. Под каким напряжением работает рентгеновская трубка, если самые жесткие лучи в рентгеновском спектре этой трубки имеют частоту $\nu = 10^8$ Гц? Заряд электрона $\text{e} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Максимальная энергия фотонов в излучении рентгеновской трубки определяется энергией ускоренных в электрическом поле электронов:

$$\text{e}U = h\nu,$$

где e – заряд электрона, U – напряжение на трубке.

$$\Rightarrow \quad U = \frac{h\nu}{\text{e}} \cong 4,1 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

11.21. Рентгеновская трубка излучает ежесекундно $N = 2 \cdot 10^{13}$ фотонов с длиной волны, соответствует средней энергии фотонов, $\lambda = 10^{-10}$ м. Определить КПД трубки, если при напряжении $U = 50$ кВ сила тока $T = 10^{-3}$ А.

Ответ: $y = \dfrac{Nhc}{UI\lambda} = 8 \cdot 10^{-4}$.

11.22. Капля воды массой $m = 0{,}2$ г нагревается светом с длиной волны $\lambda = 5500$ Å. Какое количество фотонов поглощает вода ежесекундно если быстрота нагрева капли $\Delta T / \Delta t = 5$ К/с? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, постоянная Планка $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $\upsilon_{св.} = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $N = \dfrac{c_в \cdot m \cdot \lambda}{h\upsilon_{св.}} \cdot \dfrac{\Delta T}{\Delta t} \cong 1,2 \cdot 10^{19}$ с$^{-1}$.

11.23. Воду, объем которой $V = 0{,}2$ мл, нагревают светом с длиной волны $\lambda = 0{,}75$ мкм. Ежесекундно вода поглощает $N = 10^{10}$ фотонов. Определить скорость нагрева воды, считая, что вся полученная энергия идет на ее нагрев. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{hN\upsilon_{св.}}{c_в \cdot \rho \cdot V \cdot \lambda} \cong 3,1 \cdot 10^{-9}$ к/с.

11.24. Рубиновый лазер дает импульс монохроматического излучения с длиной волны $\lambda = 6943$ Å. Определить концентрацию фотонов в пучке, если мощность излучения лазера $P = 2$ МВт, а площадь сечения луча $S = 4 \cdot 10^{-4}$ м^2. Постоянная Планка $h = 6,626$ Дж · с.

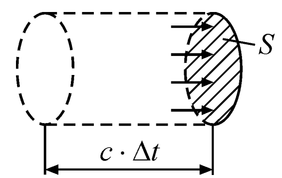

Рис. 11.1

Решение. Рассмотрим количество фотонов, которое за интервал времени Δt пересекают сечение (поперечное) пучка. За время Δt до указанного сечения успеют долететь фотоны, которые в начале этого интервала находились на расстоянии не более $c \cdot \Delta t$, где c – скорость света, от сечения. Т.е. за время Δt указанное сечение пучка пересекут фотоны, которые заключены в начальный момент в пределах цилиндра площадью основания S и высотой $c \cdot \Delta t$ (см. рис. 11.1).

Таким образом, количество фотонов, которые за интервал времени Δt пересекут выделенное сечение пучка составляет:

$$\Delta N = Sc\Delta t \cdot n,$$

где n – концентрация фотонов в рассмотренном цилиндре, т.е. в пучке.

За время Δt фотоны перенесут через сечение пучка количество энергии:

$$\Delta E = \Delta N \cdot \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc^2 Sn}{\lambda} \Delta t .$$

Если за время Δt мощность излучения лазера не изменяется, то отношение $\Delta E / \Delta t$ равно мощности излучения:

$$P = \frac{hc^2 Sn}{\lambda},$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{P\lambda}{hc^2 S} \cong 5,8 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

11.25. Сколько гамма-квантов падает ежесекундно на поверхность, которую облучают гамма-лучами мощностью $P = 0,001$ Вт и длиной волны $\lambda = 10^{-14}$ м?

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{P\lambda}{hc} \simeq 5 \cdot 10^{7}$ с$^{-1}$.

11.26. Мощность точечного источника монохроматического излучения с длиной волны $\lambda = 1$ мкм составляет $P = 100$ Вт. Определить число фотонов, падающих за $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1$ см^2, расположенную перпендикулярно лучам на расстоянии $R = 10$ м. Источник излучает равномерно по всем направлениям (изотропный источник).

Указание. Предполагается, что среда, окружающая источник, излучения не поглощает. Следовательно, количество фотонов, испущенных источником за какой-либо промежуток времени, равно количеству фотонов, пересекающих поверхность сферы радиусом R, центр которой совпадает с источником, за тот же промежуток времени.

В силу изотропности источника, количество фотонов, падающих на поверхность малой по сравнению с поверхностью сферы площади S, пропорционально площади выделенной поверхности.

Ответ: $\Delta N = \dfrac{\lambda PSt}{4\pi R^2 hc} \simeq 4 \cdot 10^{13}$.

11.27.* Луч лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм имеет вид конуса с углом при вершине $\alpha = 10^{-4}$ рад. Оптическая мощность излучения $P = 3$ мВт. На каком максимальном расстоянии наблюдатель сможет увидеть луч лазера, если глаз воспринимает свет при условии, что на сетчатку падает $n = 100$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d = 0{,}5$ см.

Указание. Диаметр поперечного сечения луча лазера на расстоянии R можно рассчитать в силу малости угла α следующим образом:

$$D = R \cdot \alpha .$$

Ответ: $R_{\max} = \sqrt{\dfrac{\lambda P d^2}{\alpha^2 hcn}} \simeq 5 \cdot 10^6$ м.

11.28.* Лазер испускает излучение с длиной волны $\lambda = 1{,}06$ мкм вертикально вверх. Каково будет изменение длины волны излучения на высоте $l = 100$ км над поверхностью Земли. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Воздействием атмосферы пренебречь.

Ответ: $\Delta\lambda = \lambda \cdot \dfrac{gl}{c^2} \simeq 10^{-11}$ мкм.

§ 12. Давление света

Задачи

12.1. Фотон частоты ν падает под углом α на зеркальную поверхность. Какой импульс P получает поверхность при отражении от нее фотона?

Решение. Предполагается, что зеркало является достаточно массивным телом и его скорость после взаимодействия с фотоном можно полагать очень малой. В условии задачи нет никаких указаний на присутствие внешних воздействий на фотон и зеркало, следовательно, система является замкнутой с точки зрения рассмотрения импульса системы, т.е. ее импульс сохраняется. С точки зрения энергии – внешние воздействия отсутствуют, зеркальная поверхность не изменяет энергии фотона за счет поглощения и как физическое тело, можно сказать, не приобретает в результате взаимодействия с фотоном кинетической энергии, т.е. энергия фотона остается неизменной.

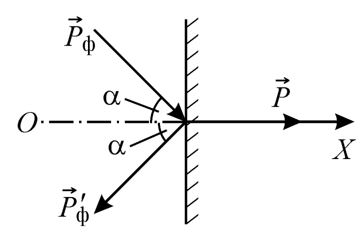

Рис. 12.1

Таким образом, перед нами оказывается задача, совершенно аналогичная задаче механики об абсолютно упругом столкновении тела с массивной поверхностью. При этом, если вспомнить, угол падения тела на поверхность равен углу отражения, т.е. точно также как и при отражении света

Запишем уравнение, выражающее закон сохранения импульса в проекциях на ось OX, ортогональную зеркальной поверхности (см. рис. 12.1). С учетом сохранения энергии фотона

$$E_ф = h\nu$$

будет сохраняться по величине и модуль его импульса

$$P_ф = \frac{h\nu}{c}.$$

С учетом выше указанного:

$$OX: \quad \frac{h\nu}{c}\cdot\cos\alpha = \frac{h\nu}{c}\cos(\pi-\alpha) + P$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2h\nu \cos\alpha}{c},$$

где c – скорость света в вакууме.

Вернемся теперь к вопросу о том, почему мы учли приращение импульса зеркальной поверхности, но не стали учитывать приращение ее кинетической энергии. Основанием могут служить следующие рассуждения. Приобретаемый зеркальной поверхностью импульс пропорционален скорости поверхности, и приобретаемая кинетическая энергия – квадрату скорости. Поэтому при стремлении скорости зеркальной поверхности к нулю неучет ее кинетической энергии в законе сохранения энергии приводит к много меньшей относительной погрешности в расчетах, чем неучет ее импульса в законе сохранения импульса. В тоже время, становится осуществим сам расчет в условиях данной задачи.

12.2. Фотон с энергией $E_{\text{ф}} = 6$ эВ падает нормально на зеркальную поверхность и отражается. Какой импульс получила зеркальная поверхность?

Ответ: $P = 6{,}4 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

12.3. Перпендикулярно поверхности площадью $S = 100\ \text{см}^2$ ежеминутно падает $W = 63$ Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью все лучи: а) отражает; б) поглощает.

Решение. Импульс, получаемый поверхностью в единицу времени, составляет:

а) $\frac{\Delta P}{\Delta t} = 2\frac{W}{c \cdot t}$; б) $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{W}{c \cdot t}$.

В случае б) при полном поглощении излучения поверхностью она, согласно закону сохранения импульса, приобретает импульс падающего на нее излучения.

В соответствии со вторым законом Ньютона в импульсной форме, скорость приобретения телом импульса равна силе, действующей на тело:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F = P_{\text{давл.}} \cdot S$$

$$\Rightarrow \text{ а) } P_{\text{давл.}} = \frac{2W}{cSt} \cong 6{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ Па;}$$

$$\text{б) } P_{\text{давл.}} = \frac{W}{cSt} \cong 3{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ Па; где } t = 60 \text{ с.}$$

12.4. Параллельный пучок квантов с частотой ν падает на поглощающую поверхность под углом Θ. Определить давление света на эту поверхность, если через единицу площади поперечного сечения пучка за секунду приходит n квантов.

Указание. Количество фотонов, которые за время Δt упадут под углом Θ на элемент поверхности площадью S, равно количеству фотонов, заключенных в пределах наклонного цилиндра с основанием площадью S и высотой $c \cdot \Delta t \cdot \cos\Theta$, где c – скорость света в вакууме, который изображен на рис. 12.2:

$$\Delta N = S \cdot c \cdot \Delta t \cdot \cos\Theta \cdot n_{\text{конц.}},$$

где $n_{\text{конц.}}$ – концентрация фотонов в пучке.

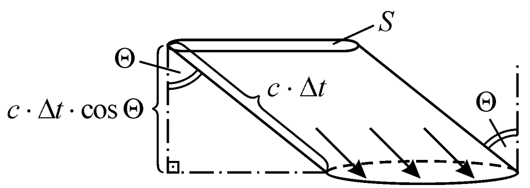

Рис. 12.2

При этом, количество фотонов, падающих в единицу времени на единицу площади поверхности, которая подвергается облучению, составит:

$$n' = \frac{\Delta N}{\Delta t \cdot S} = c \cdot n_{\text{конц.}} \cdot \cos\Theta = n \cdot \cos\Theta .$$

Тогда импульс, передаваемый единице площади облучаемой поверхности в единицу времени окажется:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t \cdot S} = n' \cdot \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu n \cos\Theta}{c} .$$

Необходимо также учесть, что вектор импульса, передаваемого поверхности излучением, направлен под углом Θ к нормали.

Ответ: $P_{\text{давл.}} = \frac{h\nu n}{c} \cdot \cos^2 \Theta$.

12.5. Параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 6600$ Å падает нормально на плоское зеркало. Интенсивность падающего излучения $J = 0б63$ Вт/м^2. Коэффициент отражения $k = 0{,}9$. Определить давление, оказываемое излучением на поверхность зеркала. Неотраженное зеркалом излучение поглощается им.

Ответ: $P_{\text{давл.}} = (k+1)\frac{J}{c} = 4 \cdot 10^{-9}$ Па.

Указание. Необходимо учесть вклад как отражаемой зеркалом части пучка, так и той его части, что зеркалом поглощается.

12.6. Луч лазера мощностью $N = 50$ Вт падает перпендикулярно поверхности пластинки, которая отражает $k = 50$ % и пропускает $\alpha = 30$ % падающей энергии. Остальную часть энергии она поглощает. Определить силу светового давления на пластину.

Ответ: $F_{\text{давл.}} = \frac{N}{c}(k + 1 - \alpha) = 2 \cdot 10^{-7}$ Н.

12.7. Найти давление света на стенки электрической лампы мощностью $N = 100$ Вт. Колба лампы – сферический сосуд радиусом $R = 5$ см. Стенки лампы отражают $k = 10$ % падающего на них света. Многократным отражением и поглощением можно пренебречь. Считать, что вся потребляемая лампой мощность идет на излучением.

Ответ: $P_{\text{давл.}} = \frac{kN}{2\pi R^2 c} \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ Па.

12.8. Существует проект запуска космических аппаратов с помощью наземного лазера. Запускаемый аппарат снабжается зеркалом, полностью отражающим излучение лазера. Какова должна быть мощность лазера, обеспечивающего запуск по этой схеме аппарата массой $m = 100$ кг.

Ответ: $N > \frac{mgc}{z} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}$ Вт.

12.9.* Короткий импульс света с энергией $E = 10$ Дж в виде узкого параллельного монохроматического пучка фотонов падает на пластинку под углом $\Theta = 60°$. При этом $k = 50$ % фотонов зеркально отражается, а остальные поглощаются. Найти импульс, переданный пластине.

Указание. Импульс, переданный пластине, будет состоять из двух слагаемых. Импульс $\vec{P}_1$, направленный нормально к поверхности пластины, своим появлением обязан той части пучка фотонов, которая, претерпевает отражение. Импульс $\vec{P}_2$ (см. рис. 12.3) равен импульсу той части пучка, которая претерпевает поглощение, и направлен под углом Θ к нормали, т.е. так же, как и падающий пучок. Величина этих векторов:

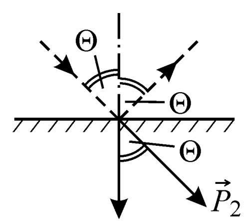

Рис. 12.3

$$\left|\vec{P}_1\right| = 2k\frac{E}{c}\cos\Theta, \qquad \left|\vec{P}_2\right| = (1-k)\frac{E}{c}.$$

Ответ: $P = \dfrac{E}{c}\sqrt{1 = K^2 + 2k\cos 2\Theta} \simeq 2{,}9\cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

12.10. Небольшое тело массой $m = 10$ мг, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 10$ см, поглощает короткий световой импульс с энергией $E = 30$ Дж, распространяющийся в горизонтальном направлении. Найти угол отклонения нити от вертикали. Ускорение свободного падения можно принять равным $g = 10$ м/с^2.

Указание. Использовать закон сохранения импульса для описания процесса поглощения светового импульса телом. Дальнейшее движение тела подчиняется закону сохранения энергии.

Ответ: $\alpha_{max} = 2\arcsin\left(\dfrac{E}{2mc\sqrt{gl}}\right) \simeq 34$ угол. мин.

12.11. Небольшое абсолютно отражающее плоское зеркальце массой $m = 10$ мг подвешено в вертикальном положении на невесомой нити. Зеркальце освещают горизонтальным лучом лазера, который падает на поверхность зеркальца по нормали. Световая мощность лазера $N = 300$ Вт. Определить угол отклонения нити от вертикали. Угол заведомо мал $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{N}{mgc}\right) \simeq 34$ угл. мин.

§ 13. Фотоэффект

Задачи

13.1. Красная граница фотоэффекта для натрия $\lambda_{кр.} = 547$ нм. Найти работу выхода электрона из натрия, выразить ее в джоулях и электрон-вольтах. Постоянная Планка $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Решение. Красная граница фотоэффекта – максимальная длина волны, при которой возможен фотоэффект. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

максимальная длина волны, при которой возможен фотоэффект, отвечает нулевой кинетической энергии фотоэлектронов, т.е. работу выхода можно выразить следующим образом:

$$A = \frac{hc}{\lambda_{кр.}} \cong 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,3 \text{ эВ}.$$

13.2. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если работа выхода электрона из металла $A = 3,3 \cdot 10^{-19}$ Дж, а свет имеет длину волны $\lambda = 0,52$ мкм?

Ответ: фотоэффект будет наблюдаться.

13.3. Какова наименьшая частота света, при которой еще наблюдается фотоэффект (красная граница фотоэффекта), если работа выхода электрона из металла $A = 2,06$ эВ.

Ответ: $\nu_{кр.} \simeq 5,0 \cdot 10^{14}$ Гц.

13.4. Для некоторого металла красная граница фотоэффекта $\nu_{кр.} \simeq 4,3 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить максимальную кинетическую энергию, которую приобретут фотоэлектроны под действием излучения с длиной волны $\lambda = 190$ нм.

Решение. В соответствии с условием задачи уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта можно записать следующим образом:

$$\frac{hc}{\lambda} = h\nu_{кр.} + E_{\max},$$

$$\Rightarrow \quad E_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - h\nu_{\text{кр.}} \cong 7{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4{,}8 \text{ эВ}.$$

13.5. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из рубидия при его освещении ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 0{,}317$ мкм, составляет $E_{\max}$ = 1,90 эВ. Определить работу выхода электронов из рубидия и красную границу фотоэффекта (длину волны).

Ответ: $A \cong 2{,}02$ эВ $\cong 3{,}24 \cdot 10^{-19}$ Дж ; $\lambda_{\text{кр.}} = 0{,}614$ мкм.

13.6. Металлическую пластину освещают светом с длиной волны $\lambda = 3125$ Å. Известно, что наибольшее значение импульса, передаваемого пластине одним фотоэлектроном, равно $P = 3{,}3 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с . Определить работу выхода электрона из вещества пластины. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Ответ: $A = 5{,}77 \cdot 10^{-19}$ Дж = 3,60 эВ.

13.7. Максимальная скорость фотоэлектронов, вырванных с поверхности меди при фотоэффекте $\upsilon_{\max} = 9{,}3 \cdot 10^{6}$ м/с. Определить частоту света, вызывающего фотоэффект. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Работа выхода электрона из меди $A = 4{,}47$ эВ.

Ответ: $\nu = 6{,}05 \cdot 10^{16}$ Гц

13.8. На металлическую пластину, красная граница фотоэффекта для которой $\lambda_{\text{кр.}} = 0{,}50$ мкм, падают фотоны с длиной волны $\lambda = 0{,}40$ мкм. Во сколько раз скорость фотона больше максимальной скорости фотоэлектронов? Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $\dfrac{c}{V_{\max}} = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\text{кр.}} \cdot \lambda \cdot mc}{2h\left(\lambda_{\text{кр.}} - \lambda\right)}} = 642.$

13.9. Если поочередно освещать поверхность металла излучением с длиной волн $\lambda_1 = 350$ нм и $\lambda_2 = 540$ нм, то максимальные скорости фотоэлектронов будут отличаться в $n = 2$ раза. Определить работу выхода электрона из этого металла. Металл в процессе облучения остается электронейтральным.

Решение. Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта в обоих случаях:

$$\begin{cases} \dfrac{hc}{\lambda_1} = A + \dfrac{mV_{\max}^2 \cdot n^2}{2}, \\ \dfrac{hc}{\lambda_2} = A + \dfrac{mV_{\max}^2}{2}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{hc\left(n^2\lambda_1 - \lambda_2\right)}{\left(n^2 - 1\right)\lambda_1\lambda_2} \cong 3{,}0 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}9 \text{ эВ}.$$

13.10. Для некоторого металла красная граница фотоэффекта в $n = 1{,}2$ раза меньше частоты падающего излучения. Определить работу выхода электрона из данного металла, если максимальная скорость фотоэлектронов $\upsilon_{\max} = 6 \cdot 10^5$ м/с. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $A = \dfrac{m\upsilon_{\max}^2}{2(n-1)} \simeq 8{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж = 5,1 эВ.

13.11. Определить, во сколько раз частота излучения, вызывающего фотоэффект с поверхности некоторого металла, больше красной границы фотоэффекта, если работа выхода электрона из этого металла в $n = 2{,}5$ раза больше максимальной кинетической энергии фотоэлектронов.

Ответ: $\nu/\nu_{\text{кр.}} = \dfrac{n+1}{n} = 1{,}4.$

13.12. При некотором минимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемого светом с длиной волны λ прекращается. Изменив длину волны света в $\alpha = 1{,}5$ раза, установили, что для прекращения фототока достаточно увеличить задерживающую разность потенциалов в $\beta = 2$ раза. Вычислить λ. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Работа выхода электрона из лития $A = 2{,}39$ эВ.

Указание. Использовать запись уравнения Эйнштейна для внешнего фотоэффекта в следующем виде:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + e|U_З|,$$

где $U_З$ – задерживающее (запирающее) напряжение (разность потенциалов).

Ответ: $\lambda = \frac{(\beta-\alpha)hc}{(\beta-1)A} \cong 290$ нм.

13.13. Медный шарик, удаленный от других тел, под действием монохроматического света, падающего на него, зарядился до потенциала $\varphi = 1{,}74$ В. Определить длину волны света. Работа выхода электрона из меди $A = 4{,}47$ эВ.

Решение. Шарик перестает заряжаться, т.е. приобретать положительный заряд, когда все выбитые с его поверхности фотоэлектроны возвращаются назад. Для этого тормозящее фотоэлектроны электрическое поле шарика должно достигнуть такой величины, при которой движущийся в нем электрон израсходует всю свою кинетическую энергию:

$$\frac{m v_{max}^2}{2} = \mathrm{e}\varphi,$$

где е – величина заряда электрона.

В этой ситуации уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта можно записать следующим образом:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \mathrm{e}\varphi,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{A + \mathrm{e}\varphi} = 200 \text{ нм.}$$

13.14. Если освещать уединенный никелевый шар радиусом $R = 1{,}0$ см светом с длиной волны, вдвое меньшей красной границы фотоэффекта, то шар заряжается. Какой максимальный заряд приобретет шар? Работа выхода электрона из никеля $A = 4{,}84$ эВ.

Указание. Потенциал уединенного проводящего шара радиусом R и зарядом q может быть выражен как

$$\varphi = k\frac{q}{R},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф – электрическая постоянная.

Ответ: $q = \dfrac{AR}{k\mathrm{e}} \simeq 5{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл.

13.15. При освещении вакуумного фотоэлемента желтым светом с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм он заряжается до разности потенциалов $U_1 = 1{,}20$ В. До какой разности потенциалов может зарядится фотоэлемент при освещении его фиолетовым светом с длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм? Фотоэлемент отключен от цепи. Заряд электрона $\mathrm{e} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Ответ: $U_2 = U_1 + \dfrac{hc(\lambda_1 - \lambda_2)}{\mathrm{e}\lambda_1\lambda_2} \cong 2{,}24$ В.

13.16. Катод вакуумного фотоэлемента освещают монохроматическим светом. При задерживающем напряжении между катодом и анодом $U_1 = 1{,}6$ В ток в цепи прекращается. При изменении длины волны света в $n = 1{,}5$ раза потребовалось подать задерживающую разность потенциалов $U_2 = 3{,}0$ В. Определить работу выхода электрона из материала катода.

Ответ: $A = \dfrac{\mathrm{e}(U_2 - nU_1)}{n-1} = 1{,}2$ эВ $= 1{,}9 \cdot 10^{-19}$ Дж.

13.17. В ходе фотоэффекта электроны, вырываемые с поверхности катода вакуумного фотоэлемента квантами с частотой $\nu_1 = 4{,}0 \cdot 10^{15}$ Гц полностью задерживаются напряжением $U_1 = 14{,}0$ В, а при частоте квантов $\nu_2 = 8{,}0 \cdot 10^{15}$ Гц – напряжением $U_2 = 30{,}5$ В. Заряд электрона $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Определить по этим данным постоянную Планка.

Ответ: $h = \dfrac{\mathrm{e}(U_2 - U_1)}{\nu_2 - \nu_1} \simeq 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

13.18. При длине волны $\lambda = 620$ нм ток фотоэлектронов в вакуумном фотоэлементе прекращается, если между катодом и анодом подать определенное задерживающее напряжение. При увеличении длины волны излучения, падающего на катод на $\alpha = 25$ % задерживающее напряжение оказывается меньше на $\Delta U = 0{,}40$ В. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Определить по этим данным постоянную Планка.

Ответ: $h = \dfrac{e \cdot \Delta U \cdot \lambda}{c} \cdot \dfrac{1+\alpha}{\alpha} \simeq 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

13.19. Цинковую пластинку освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 300$ нм. На какое максимальное расстояние от пластинки может удалиться фотоэлектрон, если вне пластинки создано задерживающее однородное поле с напряженностью $E = 10$ В/см? Работа выхода электрона из цинка $A = 3,74$ эВ. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Силовые линии электрического поля перпендикулярны поверхности пластинки.

Указание. В однородном электрическом поле

$$\Delta\varphi = E \cdot S ,$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов; S – расстояние, измеренное вдоль силовой линии поля.

Ответ: $S_{\max} = \dfrac{hc - \lambda A}{\lambda e E} \cong 0,40$ мм.

13.20. Плоская металлическая поверхность освещается излучением с длиной волны $\lambda = 1800$ Å. Красная граница фотоэффекта для материала поверхности $\lambda_{\text{кр.}} = 3600$ Å. Непосредственно у поверхности создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 1,0$ мТл. Линии индукции магнитного поля параллельны поверхности. На какое максимальное расстояние от поверхности смогут удалиться фотоэлектроны, если они вылетают перпендикулярно поверхности? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Масса электрона $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Указание. В магнитном поле при указанных условиях электроны будут двигаться по окружности, радиус которой можно определить исходя из уравнения второго закона Ньютона:

$$m\frac{V^2}{R} = eVB ,$$

где выражение в правой части уравнения определяет величину силы Лоренца, действующей на фотоэлектрон в магнитном поле.

Ответ: $R_{\max} = \sqrt{\dfrac{2hc\left(\lambda_{\text{кр.}} - \lambda\right)m}{\lambda \cdot \lambda_{\text{кр.}}}} \Big/ \mathrm{e}B \simeq 6{,}3$ мм.

13.21.* Уединенный металлический шар радиусом $R = 1{,}0$ см в течение длительного времени облучают светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}40$ мкм. Затем его стали облучать светом с длиной волны $\lambda_2 = 0{,}50$ мкм. На какое максимальное расстояние от поверхности шара будут удаляться фотоэлектроны, если красная граница для материала шара $\lambda_{\text{кр.}} = 0{,}60$ мкм?

Указание. Условие касательно того, что шар длительно облучали светом с длиной волны λ_1 подразумевает, что шаром был приобретен максимально возможный при таком облучении электрический заряд.

Ответ: $l_{\max} = R \cdot \dfrac{\lambda_{\text{кр.}} \cdot \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}{\lambda_1 \cdot \left(\lambda_{\text{кр.}} - \lambda_2\right)} \simeq 1{,}5$ см.

13.22. Катод фотоэлемента освещают светом с длиной волны $\lambda = 5000$ Å. Мощность излучения, падающего на катод $P = 30$ мВт. При этом в цепи фотоэлемента сила тока $I = 1{,}0$ мА. Найти отношение числа падающих фотонов к числу выбитых фотоэлектронов. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Заряд электрона $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Количество фотонов, падающих в единицу времени на поверхность катода, можно выразить следующим образом:

$$\frac{\Delta N_{\text{ф}}}{\Delta t} = \frac{P}{hc/\lambda}.$$

Количество фотоэлектронов, покидающих поверхность катода (и достигающих анода), можно выразить следующим образом:

$$\frac{\Delta N_{\text{э}}}{\Delta t} = \frac{I}{\mathrm{e}}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta N_{\text{ф}}}{\Delta N_{\text{э}}} = \frac{P\lambda \mathrm{e}}{hcI} \simeq 12.$$

В условии задачи подразумевается, что все электроны, выбитые с поверхности катода, достигают анода, т.е. речь идет о токе насыщения.

13.23. На катод фотоэлемента падает световой поток мощностью $P = 20$ мВт. На каждые $n = 10$ квантов света, упавших на катод, в среднем приходится один выбитый фотоэлектрон. Определите силу тока насыщения фотоэлемента. Длина волны падающего света $\lambda = 0{,}20$ мкм.

Ответ: $I_{\text{нас.}} = \dfrac{\text{e}\lambda P}{hcn} \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ А.

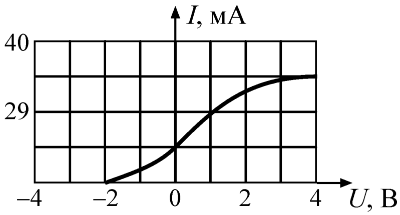

Рис. 12.1

13.24. При освещении фотоэлемента светом с длиной волны $\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ м получили вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 13.1. Пользуясь вольт-амперной характеристикой, определить работу выхода электрона из фотокатода и число электронов, выбиваемых из фотокатода в единицу времени.

Ответ: $A = \dfrac{hc}{\lambda} - \text{e}|U_3| \simeq 7{,}9 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 4{,}9$ эВ;

$\dfrac{\Delta N_{\text{э}}}{\Delta t} = \dfrac{I_{\text{нас.}}}{\text{e}} \simeq 2{,}5 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$.

13.25.* Металлическую пластинку положили на стол и облучали фотонами с энергией $E_{\text{ф}} = 4{,}9$ эВ. Работа выхода электрона из материала пластинки $A = 4{,}5$ эВ. Мощность света, падающего на поверхность пластинки, $N = 1$ Вт. Оценить изменение силы давления пластинки на стол, для чего считать, что каждый падающий на поверхность пластинки фотон выбивает электрон, скорости всех фотоэлектронов максимально возможные, все фотоны падают и все фотоэлектроны вылетают перпендикулярно поверхности пластины.

Ответ: $\Delta F_{\text{давл.}} = \dfrac{N}{E_{\text{ф}}} \cdot \left(\dfrac{E_{\text{ф}}}{C} + \sqrt{2m\left(E_{\text{ф}} - A\right)} \right) \approx 4 \cdot 10^{-7}$ Н.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. АТОМНАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

§ 14. Элементы теории относительности. Сокращение линейного размера тел. Замедление времени. Взаимосвязь массы и энергии. Энергия покоя. Релятивистское выражение для кинетической энергии тела. Релятивистский закон сложения скоростей. Релятивистский импульс. Релятивистская динамика тела

В основу специальной теории относительности положено два постулата, являющихся обобщением опытных фактов.

1. Принцип относительности – любые физические процессы протекают одинаково в различных инерциальных системах отсчета (при одинаковых начальных условиях) или другими словами, уравнения, выражающие законы природы, не меняют своего вида в результате преобразований координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. Принцип постоянства скорости света – во всех инерциальных системах отсчета свет распространяется в вакууме с одинаковой скоростью $(c = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ м/с})$, не зависящей от скорости источника или наблюдателя.

Явления, описываемые теорией относительности, но не объяснимые с позиций классической физики, называются релятивистскими явлениями (эффектами).

Из двух постулатов теории относительности вытекают как следствие выводы о зависимости длительности интервалов времени и длин отрезков от выбора инерциальной системы отсчета. Поэтому и релятивистский закон сложения скоростей отличается от классического.

Пусть интервал времени между двумя событиями, происходящими с телом в инерциальной системе K, относительно которой тело покоится, равен Δt_0 (так называемое собственное время). Этими событиями могут быть, например, рождение и распад элементарной частицы. В таком случае телом является сама частица, а собственное время отсчитано по часам, которые неподвижны относительно частицы.

Тогда интервал Δt между этими же событиями в системе отсчета K', движущейся относительно системы K со скоростью $\vec{\upsilon}_0$, выражается так:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}}. \qquad (14.1)$$

Очевидно, что $\Delta t > \Delta t_0$. В этом состоит релятивистский эффект замедления времени в движущихся системах отсчета. Если $\upsilon_0 << c$, то можно пренебречь величиной υ_0^2 / c^2 по сравнению с единицей и тогда $\Delta t = \Delta t_0$, т.е. переходим к классической механике, где время во всех системах отсчета течет одинаково.

Рассмотрим стержень, который движется поступательно со скоростью υ_0 относительно инерциальной системы отсчета K таким образом, что вектор скорости направлен вдоль стержня.

Обозначим через l_0 длину стержня, измеренную в системе отсчета K', относительно которой стержень покоится. Тогда длина этого стержня l в системе отсчета K, относительно которой стержень движется со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ (см. рис. 14.1), определяется формулой:

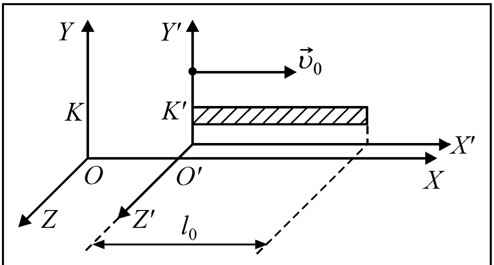

Рис. 14.1

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \upsilon_0^2 / c^2}. \qquad (14.2)$$

Как видно из этой формулы, $l < l_0$. В этом состоит релятивистское сокращение длины. Длина l_0 называется собственной длиной.

Важно отметить, что сокращение длины происходит только в направлении движения.

Закон сложения скоростей запишем для частного случая, когда тело M движется вдоль оси X' системы отсчета K', которая в свою очередь движется со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ относительно системы

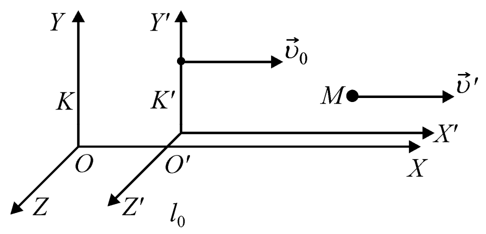

Рис. 14.2

отсчета K. Причем в процессе движения координатные оси X и X', Y и Y', Z и Z' все время остаются параллельными (рис. 14.2).

Обозначим скорость тела M относительно системы K' через $\vec{\upsilon}'$, а скорость этого же тела относительно системы K через $\vec{\upsilon}$. Тогда релятивистский закон сложения скоростей будет иметь вид:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_0 + \upsilon'_x}{1 + \frac{\upsilon_0 \cdot \upsilon'_x}{c}}. \qquad (14.3)$$

Если $\upsilon_0 << c$ и $\upsilon' << c$, то слагаемым $\upsilon_0 \cdot \upsilon'_x / c^2$ в знаменателе можно пренебречь, и выше приведенная формула примет вид $\upsilon_x = \upsilon_0 + \upsilon'_x$, т.е. получим классический закон сложения скоростей.

При $\upsilon' = c$ скорость υ также равна c, как этого требует второй постулат теории относительности. Действительно, в этом случае:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0 + c}{1 + \frac{\upsilon_0 \cdot c}{c^2}} = c \cdot \frac{\upsilon_0 + c}{\upsilon_0 + c} = c. \qquad (14.4)$$

Замечательным свойством релятивистского закона сложения скоростей является то, что при любых скоростях υ_0 и υ' (конечно, не больших c) результирующая скорость υ не превышает c.

В теории относительности было установлено, что в выбранной системе отсчета масса тела и его энергия взаимосвязаны:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \qquad (14.5)$$

где m_0 – масса тела, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело покоится; обычно ее называют массой покоя, и она совпадает с массой тела в механике Ньютона; m – масса тела, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью υ, и относительно которой определена энергия тела E. Величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \tag{14.6}$$

принято называть релятивистской массой тела.

Если происходит изменение энергии тела (системы тел), то изменяется и масса тела (системы тел). Например, масса тела при его нагреве возрастает.

Любое тело обладает энергией и при скорости равной нулю. Это энергия покоя:

$$E_0 = m_0 c^2. \tag{14.7}$$

Релятивистское выражение для кинетической энергии частицы имеет вид:

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2. \tag{14.8}$$

Можно показать, что при $\upsilon \ll c$ вышеприведенное выражение превращается в классическое выражение для кинетической энергии тела $T = m\upsilon^2/2$. В силу того обстоятельства, что $T = E - E_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E = T + E_0$, величину $E = mc^2$ принято называть полной энергией тела.

Энергия покоя E_0 тела содержит в себе, помимо энергии покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию этих частиц, обусловленную их движением относительно центра масс тела, и энергию их взаимодействия друг с другом. В энергию покоя, как и в полную энергию, не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Релятивистское выражение для импульса частицы имеет вид:

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \tag{14.9}$$

Используя определение импульса тела, уравнение, выражающее второй закон Ньютона, в формулировке Эйнштейна записывают в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = \vec{F},, \tag{14.10}$$

и называют основным уравнением релятивистской динамики тела. Очевидно, что при малых скоростях $\upsilon \ll c$ величина релятивистского импульса тела совпадает со значением импульса в классической механике.

В частном случае движения заряженной частицы по окружности в однородном магнитном поле под действием силы Лоренца в силу постоянства вектора скорости по модулю (сила Лоренца действует на частицу в направлении, перпендикулярном вектору ее скорости, следовательно, ее мгновенная мощность равна нулю, сила работы над частицей не совершает, и кинетическая энергия частицы остается постоянной). Поэтому, так как $\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \text{const}$,

то
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{14.11}$$

Векторная величина $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ представляет из себя в указанной ситуации центростремительное ускорение $\vec{a}_{\text{ц.с.}}$, причем

$$|\vec{a}_{\text{ц.с.}}| = a_{\text{ц.с.}} = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус окружности, по которой движется заряженная частица.

Используя выражение для импульса и для полной энергии тела, можно получить соотношение, связывающее эти величины:

$$\begin{cases} E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \\ P = \dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad E^2 = m_0^2c^4 + P^2c^2 \quad (14.12) \qquad \vec{P} = \frac{E\vec{\upsilon}}{c^2}. \quad (14.13)$$

Положив в формуле $E^2 = m_0^2c^4 + P^2c^2$ массу покоя равной нулю, получим соотношение

$$E = cP, \tag{14.14}$$

которое согласуется с соотношением $\vec{P} = \dfrac{E}{c^2} \cdot \vec{\upsilon}$ только в том случае, если $\upsilon = c$. Отсюда следует, что частица с массой покоя, равной нулю, всегда движется со скоростью света. К числу таких частиц принадлежит квант электромагнитного излучения фотон. Кроме того, энергия и импульс, переносимые электромагнитным излучением (электромагнитными волнами) связаны соотношением $E = cP$.

§ 15. Относительность времени и расстояния. Взаимосвязь массы и энергии. Преобразование скоростей

<u>Задачи</u>

15.1. Во сколько раз увеличится продолжительность существования нестабильной частицы, если ее наблюдать не в той системе отсчета, где частица покоится, а в инерциальной системе отсчета, в которой частица движется со скоростью $\upsilon = 0{,}99$ с равномерно и прямолинейно?

<u>Решение.</u> Если система отсчета, в которой частица движется со скоростью υ равномерно и прямолинейно, инерциальная, то система, в которой частица покоится, также является инерциальной.

Следовательно, можно использовать с полным основанием соотношение между временем, отсчитанным по часам, относительно которых частица покоится, и временем, отсчитанным по часам, относительного которого частица движется со скоростью υ:

$$\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2},$$

где Δt_0 – собственное время частицы, Δt – время, отсчитанное по часам, движущимся со скоростью υ относительно частицы.

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}99^2}} \cong 7{,}1.$$

15.2. Космическая частица движется со скоростью $\upsilon = 0{,}95$ с. Какой промежуток времени t соответствует $t_0 = 1$ мкс собственного времени частицы?

<u>Указано.</u> Подразумевается, что измерения времени выполняются в инерциальной системе отсчета.

<u>Ответ:</u> $t \cong 3{,}2$ мкс.

15.3. Длина неподвижного стержня $l_0 = 1{,}0$ м. Определить длину стержня, если он движется со скоростью $\upsilon = 0{,}6$ с. Вектор скорости направлен вдоль стержня.

Решение. Подразумевается, что измерения длины выполняются в инерциальной системе отсчета. Следовательно, можно использовать соотношение между длиной стержня l, измеренной в системе отсчета, относительно которой стержень движется со скоростью υ, и длиной l_0, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}.$$

$$\Rightarrow \quad l = l_0 \cdot \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8 \text{ м.}$$

15.4. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25 %?

Ответ: $\upsilon \simeq 1{,}98 \cdot 10^8$ м/с.

15.5. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $\upsilon = 0{,}6$ с Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Ответ: в 1,25 раза.

15.6.* Собственное время жизни мю-мезона $\tau_0 = 2$ мкс. От точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчета мю-мезон пролетел расстояние $l = 6$ км. С какой скоростью (в долях скорости света) движется мю-мезон?

Ответ: $\dfrac{\upsilon}{c} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2 + \tau_0^2 c^2}} \cong 0{,}995.$

15.7. Ионизированный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $\upsilon = 0{,}8$ с; испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя.

Решение. Согласно второму постулату специальной теории относительности, во всех инерциальных системах отсчета свет (электромагнитная волна) распространяется в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, не зависящей от скорости источника или наблюдателя.

Отсюда следует, что, коль скоро ускоритель неподвижен относительно Земли, а Земля с большой степенью точности является инерциальной системой отсчета, то скорость фотона относительно ускорителя равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

15.8. Два атомных ядра движутся навстречу друг другу со скоростью $\upsilon = 0{,}95$ с относительно Земли каждое. Одно из них испускает гамма-частицу в направлении своего движения. Какова скорость гамма-частицы относительно второго ядра?

Ответ: $\upsilon_{\text{отн.}} = c.$

15.9.* Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 0{,}5$ с и $\upsilon_2 = 0{,}75$ с (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме), измеренными относительно некоторой инерциальной системы отсчета. С какой скоростью уменьшается расстояние между частицами в указанной системе отсчета? Чему равна по величине относительная скорость частиц?

Решение. Для ответа на первый вопрос задачи рассмотрим перемещение частиц в указанной системе отсчета за некоторый интервал времени Δt, так как частицы движутся равномерно и прямолинейно, то величина перемещения равна пути и можно записать:

$$S_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t, \qquad S_2 = \upsilon_2 \cdot \Delta t,$$

тогда уменьшение расстояния между частицами за тот же промежуток времени составит:

$$\Delta l = S_1 + S_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot \Delta t.$$

Таким образом, для скорости уменьшения расстояния между частицами получим:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 1{,}25 \text{ с} = 3{,}75 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Полученный результат никоим образом не противоречит теории относительности. Согласно теории относительности, никакое материальное тело, никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, скорость света – предельная скорость во всех системах отсчета только для указанных ситуаций. А вот скорость изменения расстояния между телами, наблюдаемая сторонним наблюдателем, под данное ограничение не попадает.

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся правилами преобразования скоростей в релятивистской механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Введем наряду с той системой отсчета, в которой заданы скорости частиц υ_1 и υ_2 (K), еще одну систему отсчета (K'), в которой первая частица является телом отсчета (см. рис. 15.1).

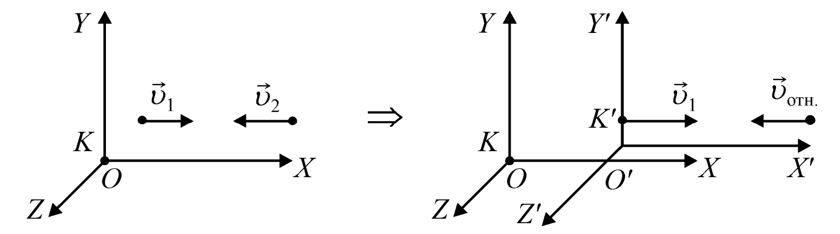

Рис. 15.1

Так как частицы движутся по условию вдоль одной прямой (на рис. 15.1 этой прямой является ось *OX* и параллельная ей ось $O'X'$) то нам понадобится формула:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_{X'} + \upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_0 \cdot \upsilon_{X'}}{c^2}},$$

где в нашем случае $\upsilon_X = -\upsilon_2$ – проекция скорости тела (второй частицы) в системе отсчета *K*; $\upsilon_{X'} = -\upsilon_{\text{отн.}}$ – проекция скорости тела в системе отсчета K'; $\upsilon_0 = \upsilon_1$ – скорость системы отсчета K' относительно системы отсчета *K*.

Выполнив соответствующие алгебраические преобразования получим для скорости второй частицы относительно первой:

$$\upsilon_{\text{отн.}} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)c^2}{c^2 + \upsilon_1 \cdot \upsilon_2} \cong 0{,}909\ \text{c} \cong 2{,}73 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Как видим полученное значение относительной скорости частиц не превышает скорости света в вакууме, как следовало ожидать, потому что речь идет о скорости материального тела (второй частицы) в некоторой инерциальной системе отсчета (K'), которую мы связали с другим телом (первой частицей).

16.10* Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $\upsilon_1 = 0{,}4$ с (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с). В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения частицу со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}75$ с относительно ускорителя. Чему равна скорость частицы относительно ядра?

Указание. Подразумевается, что скорость ядра после испускания частицы практически не изменилась.

Ответ: $\upsilon_{\text{отн.}} = \dfrac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)c^2}{c^2 - \upsilon_1 \cdot \upsilon_2} \cong 0{,}357 \cong 1{,}07 \cdot 10^8$ м/с.

15.11.* В системе отсчета K два параллельных стержня, имеющие собственную длину $l_0 = 1$ м, движутся в продольном направлении навстречу друг другу с равными скоростями $\upsilon = 2 \cdot 10^8$ м/с, измеренными в этой системе отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Решение. Для неподвижного наблюдателя при движении протяженных тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, размеры тел в направлении движения существенно сокращаются. Свяжем систему K' с одним из стержней (назовем его стержень *1*), направив одну из осей, а именно ось $O'X'$, вдоль стержня (рис. 15.2). Тогда в этой системе стержень *1* будет находится в покое, и его длина будет равна собственной длине l_0. Длина l стержня *2* относительно системы отсчета K':

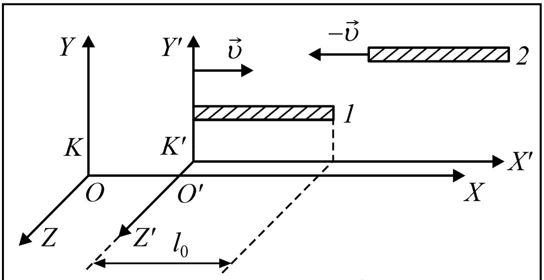

Рис. 15.2

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \upsilon_{\text{отн.}}^2 / c^2},$$

где $\upsilon_{\text{отн.}}$ – скорость стержня *2* относительно системы K' (на рис. 15.2 указаны скорости $\vec{\upsilon}$ и $-\vec{\upsilon}$ стержней *1* и *2* относительно системы отсчета K).

Скорость $\upsilon_{\text{отн.}}$ можно найти используя формулу:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_{X'} + \upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_0 \cdot \upsilon_{X'}}{c^2}},$$

где необходимо положить $\upsilon_X = -\upsilon$, $\upsilon_{X'} = -\upsilon_{\text{отн.}}$ ($\upsilon_{\text{отн.}}$ – это в такой записи модуль вектора относительной скорости, $\upsilon_0 = \upsilon$.

Решая получающееся при соответствующей подстановке уравнение:

$$-\upsilon = \frac{\upsilon - \upsilon_{\text{отн.}}}{1 - \dfrac{\upsilon \cdot \upsilon_{\text{отн.}}}{c}},$$

находим, что

$$\upsilon_{\text{отн.}} = \frac{2\upsilon c^2}{c^2 + \upsilon^2},$$

откуда:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{4\upsilon^2 c^2}{\left(c^2 + \upsilon^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(c^2 - \upsilon^2\right)^2}{\left(c^2 + \upsilon^2\right)^2}} \cdot l_0 = \frac{c^2 - \upsilon^2}{c^2 + \upsilon^2} \cdot l_0 \cong 0{,}38 \text{ м.}$$

15.12* Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $\upsilon_1 = 0{,}4$ с (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с). В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения частицу со скоростью $\upsilon_2 = 0{,}75$ с относительно ядра. Чему равна скорость частицы относительно ускорителя?

<u>Ответ:</u> $\upsilon = \dfrac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)c^2}{c^2 + \upsilon_1 \cdot \upsilon_2} \cong 0{,}885$ с $\cong 2{,}65 \cdot 10^8$ м/с.

15.13. Частица движется со скоростью $\upsilon = 0{,}5$ с. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

<u>Решение.</u> Масса движущегося со скоростью υ тела, обладающего массой покоя m_0, выражается формулой:

$$m - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1{,}15.$$

15.14. На сколько увеличится релятивистская масса частицы с массой покоя m_0 при увеличении ее скорости от $\upsilon_1 = 0$ до $\upsilon_2 = 0{,}9$ с?

Ответ: на 129 %.

15.15. При какой скорости релятивистская масса движущейся частицы вдвое больше массы покоя этой частицы?

Ответ: $\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ с $\cong 0{,}866$ с.

15.16. С какой скоростью должен лететь протон, чтобы его релятивистская масса была равна массе покоя альфа-частицы? Масса покоя протона $m_{0\rho} = 1$ а.е.м., масса покоя альфа-частицы $m_{0\alpha} = 4$ а.е.м.

Ответ: $\upsilon \cong 0{,}968$ с.

15.17. Во сколько раз изменится плотность тела при его движении со скоростью $\upsilon = 0{,}8$ с?

Решение. При движении тела со скоростью, близкой к скорости света в вакууме, происходит сокращение его линейного размера вдоль направления движения:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2},$$

где l_0 – собственная длина тела вдоль направления движения, υ – скорость тела.

Следовательно, точно таким же образом изменится объем тела:

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}.$$

Масса тела (релятивистская) будет превосходить массу покоя:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V_0} \cdot \frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2} = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2},$$

таким образом, плотность тела возрастет в $\frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2} \cong 2{,}78$ раза.

15.18. При движении тела с некоторой скоростью продольные размеры тела уменьшились в $n = 2$ раза. Во сколько раз изменилась масса тела?

Ответ: увеличилась в $n = 2$ раза.

15.19. Отношение заряда движущегося электрона к его массе, определенное в некотором эксперименте, оказалось равно $k = 0{,}88 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Определить скорость электрона в данном эксперименте. Отношение заряда покоящегося электрона к его массе составляет $\mathrm{e}/m = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Указание. Величина электрического заряда, измеряемая в различных инерциальных системах отсчета, одинакова, т.е. не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

Ответ: $\upsilon = c \cdot \sqrt{1 - k^2 \Big/ \left(\dfrac{\mathrm{e}}{m}\right)^2} \cong 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

15.20. Определить энергию покоя: а) электрона; б) протона. Результат выразить в электрон-вольтах. Масса электрона $m_{\mathrm{e}} = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг, масса протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: а) $E_0 = 0{,}511$ МэВ; б) $E_0 = 938$ МэВ.

15.21. Полная энергия тела возросла на $\Delta E = 1$ Дж. На сколько при этом изменилась масса тела?

Решение. Полная энергия тела выражается следующим образом:

$$E = mc^2,$$

так как $c = \mathrm{const}$, то возрастанию полной энергии соответствует возрастание массы тела:

$$\Rightarrow \quad \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \cong 1{,}1 \cdot 10^{-19} \text{ кг}.$$

15.22. С единицы массы площади поверхности Солнца ежесекундно испускается энергия $W = 74$ МДж/(м^2 · с). На сколько уменьшается масса Солнца за год? Радиус Солнца $R = 6{,}95 \cdot 10^8$ м.

Ответ: $\Delta m = 1{,}57 \cdot 10^{17}$ кг.

15.23. Масса Солнца $V = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг. Солнце в течение времени $t = 1$ год излучает энергию $E = 1{,}26 \cdot 10^{34}$ Дж. За какое время масса Солнца уменьшится на 1 %?

Указание. Подразумевается, что при изменении массы Солнца на 1 % поток энергии, излучаемой Солнцем, не изменится.

Ответ: $T \simeq 140$ млрд. лет.

§ 16. Кинетическая энергия и импульс релятивистской частицы. Релятивистская динамика

Задачи

16.1. При какой скорости частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы выражается как:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2.$$

Согласно условию задачи:

$$T = E_0 = m_0 c^2.$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = 2;$$

$$\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} c \cong 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

16.2. Кинетическая энергия электрона $T = 10$ МэВ. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя? Масса покоя электрона $m_0 = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг. Скорость света в вакууме $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{T}{m_0 c^2} + 1 \cong 20,6.$

16.3. Найти скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет половину энергии покоя.

Ответ: $\upsilon = 2,23 \cdot 10^8$ м/с.

16.4. До какой кинетической энергии, выраженной в МэВ, можно ускорить: а) электроны; б) протоны; в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать $\alpha = 5$ %? Масса покоя электрона $m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг; масса покоя протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг; скорость света $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: а) $T_e \cong 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ МэВ; б) $T_p \cong 47$ МэВ.

16.5. Электрон летит со скоростью $\upsilon = 0{,}8$ с. Определить кинетическую энергию электрона в МэВ. Масса покоя электрона $m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг. Скорость света $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $T \cong 0{,}34$ МэВ.

16.6. Максимальная скорость движения электронов в катодной трубке $\upsilon = 0{,}04$ с. Найти разность потенциалов между электродами. Заряд электрона $\mathrm{e} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг. Скорость света $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. При движении от катода к аноду электрон приобретает кинетическую энергию, равную работе, совершаемой над ним электрическим полем:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 = \mathrm{e}U,$$

где разность потенциалов между электродами катодной трубки

$$\Rightarrow \quad U = \frac{m_0 c^2}{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1 \right) \cong 0{,}41 \text{ кВ}.$$

16.7. Электрон, ускоренный электрическим полем, приобрел скорость, при которой его полная энергия стала равна удвоенной энергии покоя. Чему равна ускоряющая разность потенциалов? Отношение заряда электрона к его массе покоя $\mathrm{e}/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Ответ: $U = \dfrac{c^2}{\mathrm{e}/m} \cong 5{,}1 \cdot 10^5$ В.

16.8. Какую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его собственное время уменьшалось в $n = 10$ раз по сравнению со временем, измеренным по часам неподвижной системы отсчета? Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $U = \dfrac{m_0 c^2}{\mathrm{e}}(n-1) \cong 4{,}6 \cdot 10^6$ В.

16.9. Определить импульс релятивистского электрона, если его кинетическая энергия равна энергии покоя. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Используя условия задачи можем составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} E^2 = m_0 c^4 + p^2 c^2, \\ E - m_0 c^2 = m_0 c^2, \end{cases}$$

где E – полная энергия электрона, p – импульс электрона.

$$E = 2 m_0 c^2 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{3} \cdot m_0 c \cong 4{,}7 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

16.10. Определить кинетическую энергию релятивистского протона, если его импульс равен $p = 5 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с. Масса покоя протона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $T = c \cdot \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 \cong 6{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж $\cong 390$ МэВ.

16.11.* Электрон двинется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл со скоростью $\upsilon = 2{,}4 \cdot 10^8$ м/с. Определить радиус окружности. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. При движении в магнитном поле на электрон действует сила Лоренца.

$$F_{\text{Л}} = \mathrm{e} \upsilon B,$$

направленная по радиусу, т.е. перпендикулярно вектору скорости, и поэтому работы над частицей не совершающая. Следовательно, величина скорости частицы меняться не будет.

Сила Лоренца сообщает частице центростремительное ускорение:

$$\Delta_{\text{ц.с.}} = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус окружности.

Уравнение движения электрона в проекции на радиус окружности можно записать в виде:

$$m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = \mathrm{e}\upsilon B,$$

где $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ – релятивистская масса электрона.

$$\Rightarrow \quad R = \frac{m_0 \upsilon}{\mathrm{e}B\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \cong 0{,}23 \text{ м.}$$

16.12.* Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл по окружности радиуса $R = 2$ см. Определить кинетическую энергию электрона, считая его релятивистским. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг; заряд $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Указание. Необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \cdot \dfrac{\upsilon^2}{R} = \mathrm{e}\upsilon B, \\ T = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right). \end{cases}$$

Ответ: $T = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{e}BR}{m_0 c} \right)^2} - 1 \right) \cong 1{,}47 \cdot 10^{-14}$ Дж $\cong 92$ кэВ.

16.13.* Электрон с кинетической энергией $T = 1{,}5$ МэВ движется в однородном магнитном поле по окружности некоторого радиуса. Определить период обращения электрона, если индукция поля равна $B = 0{,}02$ Тл. Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}51$ МэВ; заряд $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $t = 2\pi(T + E_0)\big/\left(\mathrm{e}Bc^2\right) \cong 7{,}0 \cdot 10^{-19}$ с.

§ 17. Атомная физика. Планетарная модель атома Резерфорда. Боровская модель атома водорода. Постулаты Бора. Правило квантования. Спектр излучения атома водорода

На основе экспериментальных данных Резерфордом была предложена планетарная (или ядерная) модель атома:

1) атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки;

2) в ядре сосредоточена практически вся масса атома, причем радиус ядра в 10^5 раз меньше радиуса атома;

3) суммарный отрицательный заряд электронов равен по величине положительному заряду ядра – атом в целом электронейтрален;

4) электроны движутся вокруг ядра под действием кулоновских сил.

Однако, такая модель атома противоречила законам классической электродинамики, поскольку ускоренно движущийся электрон (как и любой ускоренно движущийся заряд) должен был бы излучать электромагнитные волны, теряя энергию. В результате электрон должен достаточно быстро упасть на ядро. На самом деле этого не происходит.

Попытку найти выход из затруднительного положения в теории атома сделал Бор на пути дальнейшего развития квантовых представлений, причем и законы классической физики не отвергались. В основу своей теории Бор положил два постулата.

1) Электроны в атоме движутся по круговым орбитам, но из бесконечного множества орбит, возможных с точки зрения классической механики, разрешенными являются только некоторые определенные орбиты. Находясь на одной из таких орбит, электрон, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает энергии. Такие орбиты Бор назвал стационарными.

2) Атом испускает излучение, когда электрон переходит (скачком) с одной стационарной орбиты на другую стационарную орбиту (обычно говорят о переходе атома из одного стационарного состояния в другое стационарное состояние). При каждом таком переходе испускается один фотон, энергия которого равна:

$$h\nu = E_n - E_m , \qquad (17.1)$$

где E_n, E_m – энергия начального и конечного состояний, соответственно (т.е. $E_n > E_m$). Поглощение света – процесс, обратный излучению, происходит аналогичным образом, при поглощении фотона той же энергии.

Согласно правилу отбора, введенному Бором, стационарными являются те орбиты, для которых выполняется условие (правило квантования):

$$m \cdot \upsilon_n \cdot r_n = n\hbar, \tag{17.2}$$

где $n = 1, 2, 3\ldots$ – целочисленный параметр, являющийся номером квантового состояния (орбиты) и называемый главным квантовым числом; m – масса электрона; υ_n – скорость электрона на n-й орбите, радиус которой r_n; $\hbar$ – постоянная Планка.

Свои постулаты и правило отбора Бор плодотворно применил для построения простейшей атомной системы – атома водорода (а также водородоподобных ионов). Рассмотрим электрон, движущийся по круговой орбите радиусом r_n в поле неподвижного (в силу его относительной массивности) ядра с зарядом Z_{e}. При $Z = 1$ такая система соответствует атому водорода, при $Z > 1$ – водородоподобному иону, т.е. атому с порядковым номером Z, из которого удалены все электроны, кроме одного. На электрон будет действовать сила кулоновского взаимодействия с ядром атома, сообщая электрону центростремительное ускорение. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление можно записать в виде:

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{Z\text{e}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}, \tag{17.3}$$

где $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – постоянная закона Кулона.

Вторым уравнением системы, описывающей движение электрона, является правило квантования орбит $m\upsilon_n \cdot r_n = n\hbar$.

Решая совместно указанную систему уравнений, получим выражения для скорости движения электрона на n-й орбите и ее радиуса r_n:

$$\upsilon_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}, \tag{17.4}$$

(произвели замену $\hbar = h/2\pi$)

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} \cdot n^2. \tag{17.5}$$

Для атома водорода ($Z = 1$) ближайшей к ядру орбите ($n = 1$) соответствует радиус $r_1 \simeq 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м, который часто называют боровским радиусом. Из полученного выражения для r_n видно, что:

$$r_n = r_1 \cdot n^2. \tag{17.6}$$

Внутренняя энергия атома водорода складывается из кинетической энергии электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром

$$E_n = \frac{m\upsilon_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m \cdot Z^2 \cdot e^4}{8\varepsilon_0 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{17.7}$$

Для атома водорода наименьшему значению энергии соответствует главное квантовое число $n = 1$:

$$E_1 \simeq -2{,}17 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \simeq -13{,}6 \text{ эВ}.$$

В боровской модели квантуются не только радиусы орбит, но и энергии. Различные разрешенные значения энергии атома обычно изображаются на схеме энергетических уровней в виде горизонтальных линий. Для водорода такая схема уровней показана на рис. 17.1. Низший энергетический уровень (или состояние) называется основным состоянием. Более высокие энергетические уровни называются возбужденными состояниями. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода может находиться на любом из разрешенных уровней, но никогда между ними. Знание разрешенных уровней энергии позволяет предсказать частоты и длины волн всех спектральных линий атома водорода (водородоподобных ионов):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0 h^2}\left\{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right\}. \tag{17.8}$$

Величина:

$$R_\lambda = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3} \cong \qquad (17.9)$$

$$\cong 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

называется постоянной Ридберга.

Часто постоянной Ридберга называют величину:

$$R_\nu = cR_\lambda = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \cong \qquad (17.10)$$

$$\cong 3{,}290 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

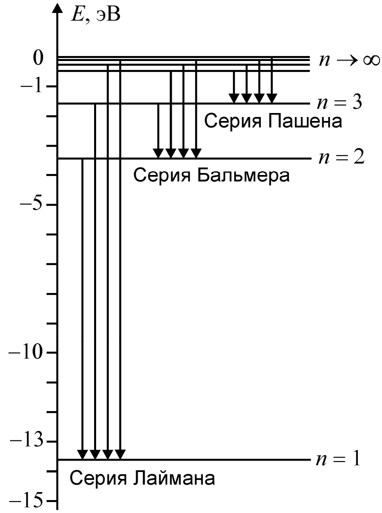

Рис. 17.1

С учетом выражений для R_λ и R_ν можно записать:

$$E_n = \frac{Z^2 hcR_\lambda}{n^2} = -\frac{Z^2 hR_\nu}{n^2}, \qquad (17.11)$$

$$\nu_{nm} = Z^2 R_\nu \left\{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right\}, \qquad (17.12)$$

$$\lambda_{nm} = Z^2 R_\lambda \left\{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right\}. \qquad (17.13)$$

Серия спектральных линий водорода, соответствующих переходам в основное состояние ($n = 1$), получила название серии Лаймана. Серии спектральных линий, соответствующих переходам в первое и второе возбужденное состояния ($n = 2$ и $n = 3$) получили названия серий Бальмера и Пашена (см. рис. 17.1).

Если атом поглотил энергию, достаточную для перехода в состояние с энергией, равной нулю (т.е. на удаление электрона на уровень $n = \infty$), то электрон перестает быть связан с ядром. Минимальная энергия, необходимая для вырывания электрона из атома, называется энергией ионизации (энергией связи). Для атома водорода энергия ионизации, соответствующая вырыванию электрона из низшего энергетического состояния равна $E = E_\infty - E_1 = 13{,}6$ эВ. Энергия, необходимая для перевода электрона из основного состояния в одно из возбужденных состояний называется энергией возбуждения $E_{\text{возб.}}$. Часто энергию ионизации и энергию возбуждения представляют в виде $E_{\text{ион.}} = \mathrm{e}\varphi_{\text{ион.}}$ и $E_{\text{возб.}} = \mathrm{e}\varphi_{\text{возб.}}$, величины $\varphi_{\text{ион.}}$ и $\varphi_{\text{возб.}}$ называют потенциалом ионизации и потенциалом возбуждения. Причем переходу электрона на первый возбужденный уровень ($n = 2$) соответствует первый потенциал возбуждения φ_1, переход на второй возбужденный уровень ($n = 3$) – второй потенциал возбуждения φ_2 и т.д. Для атома водорода $\varphi_{\text{ион.}} \cong 13{,}6$ В; $\varphi_1 \cong 10{,}2$ В; $\varphi_2 \cong 12{,}1$ В.

§ 18. Атомная физика.

Задачи

18.1. Какой процент от массы нейтрального атома урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ составляет масса его электронной оболочки? Энергии покоя электрона, протона и нейтрона равны, соответственно, $E_{0\mathrm{e}} = 0{,}511$ МэВ, $E_{0\mathrm{p}} = 938$ МэВ и $E_{0\mathrm{n}} = 940$ МэВ.

Указание. Число протонов в ядре атома урана $Z = 92$, число нейтронов и протонов вместе составляет $A = 238$, число протонов в ядре атома равно числу электронов в электронной оболочке.

Ответ: 0,02 %.

18.2. На какое наименьшее расстояние альфа-частица, имеющая скорость $\upsilon = 1{,}9 \cdot 10^7$ м/с, может приблизиться к неподвижному ядру золота, двигаясь по прямой, проходящей через центр ядра? Зарядовое число и массовое для альфа-частицы для альфа-частицы равны $Z_1 = 2$ и $A = 4$, зарядовое число для ядра золота $Z_2 = 79$. Элементарный электрический заряд $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Атомная единица массы $k = 9 \cdot 10^8$ $\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$.

Указание. Использовать закон сохранения энергии.

Ответ: $r_{\min} = \dfrac{2kZ_1Z_2\mathrm{e}^2}{m_0A_1\upsilon^2} \cong 3{,}0 \cdot 10^{-14}$ м.

18.3. Радиус орбиты электрона в атоме водорода $r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м. Рассчитать, согласно теории Бора, для данного состояния атома водорода: а) частоту вращения электрона; б) длину волны электромагнитного излучения с такой частотой; в) скорость электрона; г) электростатическую силу притяжения электрона к ядру; е) силу электрического тока, обусловленного движением электрона по орбите; ж) кинетическую энергию электрона; з) потенциальную энергию электрона; и) полную энергию электрона в атоме. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с. Масса и заряд электрона $m_\text{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг и $\text{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Постоянная закона Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2.

Решение. а) Запишем систему из двух уравнений: одно из них выражает условие квантования Бора, другое – связывает линейную скорость электрона с частотой его вращения по орбите:

$$\begin{cases} m_\text{e} \upsilon r = \dfrac{h}{2\pi}; \\ \upsilon = 2\pi\nu \cdot r, \end{cases}$$

квантовое число n принимает в указанной ситуации значение $n = 1$, так как фигурирующее в условии задачи значение радиуса орбиты соответствует ближайшей к ядру орбите при $n = 1$.

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{h}{4\pi^2 m_\text{e} r^2} \cong 6{,}6 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

б) $\nu \cdot \lambda = c \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{c}{\nu} \cong 4{,}55 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 455 \text{ Å}.$

в) $\upsilon = \dfrac{h}{2\pi m_\text{e} r} \cong 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

г) $F_{\text{эл.}} = k \cdot \dfrac{\text{e}^2}{r^2} \cong 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ Н.

д) $a_{\text{ц.с.}} = \dfrac{\upsilon^2}{r} \cong 9{,}0 \cdot 10^{22}$ м/с^2.

е) $I = \dfrac{\text{e}}{t}$, где $t = \dfrac{2\pi r}{\upsilon} = \dfrac{1}{\nu}$ – период обращения электрона

$\Rightarrow \quad I = \text{e}\nu \cong 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ А.

ж) $T = \dfrac{m_{\text{e}}\upsilon^2}{2} \cong 2,20 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,7 эВ.

з) $U = -k\dfrac{\text{e}^2}{r} \cong -4,37 \cdot 10^{-18}$ Дж = – 27,3 эВ.

и) $E_{\text{полн.}} = T + U \cong 2,17 \cdot 10^{-18}$ Дж = – 13,6 эВ.

18.4. На какое расстояние в радиальном направлении смещается электрон, переходящий с первой на четвертую боровскую орбиту атома водорода? Радиус первой боровской орбиты $r_{\text{Б}} = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м.

<u>Ответ:</u> $\Delta r = 15 \cdot r_{\text{Б}} \cong 7,94 \cdot 10^{-10}$ м.

18.5. Во сколько раз отличается напряженность электрического поля ядра на второй и третьей боровских орбитах атома водорода? Найти напряженность поля на первой боровской орбите. Радиус первой боровской орбиты $r_{\text{Б}} = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м. Заряд электрона $\text{e} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Постоянная закона Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2.

<u>Указание.</u> Поле ядра можно рассматривать как поле точечного заряда:

$$E_n = k\frac{\text{e}}{r_n^2},$$

где r_n – радиус n-й боровской орбиты.

<u>Ответ:</u> $\dfrac{E_2}{E_3} = \dfrac{r_3^2}{r_2^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \simeq 5,1$; $\quad E_1 \cong 5,1 \cdot 10^{11}$ В/м.

18.6. Вычислить радиус первой боровской орбиты и скорость электрона на ней для водородоподобного иона гелия He^+. Заряд и масса электрона $\text{e} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m_{\text{e}} = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Постоянная закона Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2.

<u>Указание.</u> Необходимо внести изменения в систему уравнений, отвечающих боровской модели атома водорода, чтобы она стала описывать водородоподобный ион: учесть, что заряд ядра водородоподобного иона равен Z_{e}, где Z – зарядовое число ядра элемента. Для ядра атома гелия $Z = 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_e \upsilon r = \dfrac{h}{2\pi}, \\ \dfrac{m_e \upsilon^2}{r} = \dfrac{kZe^2}{r^2}. \end{cases}$$

Ответ: $r = \dfrac{r_Б}{Z} \cong 0,265 \cdot 10^{-10}$; $\upsilon \simeq 4,37 \cdot 10^6$ м/с.

18.7.* Если в атоме водорода электрон заменить отрицательным мю-мезоном, образуется система, которая называется мезоатомом. Пользуясь теорией Бора, найти радиус мезоатома в состоянии с наименьшей энергией. Масса мю-мезона $m_м = 1,88 \cdot 10^{-28}$ кг, масса электрона $m_е = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, первый боровский радиус для атома водорода $r_Б = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Заряд мю-мезона равен заряду электрона.

Указание. Так как масса мю-мезона много меньше массы протона (ядра мезоатома), то ядро мезоатома можно считать неподвижным и рассматривать движение только мю-мезона. В указанной ситуации достаточно в системе уравнений, отвечающих боровской модели атома водорода, заменить массу электрона на массу мю-мезона.

Ответ: $r_м = r_Б \cdot \dfrac{m_е}{m_м} \cong 2,6 \cdot 10^{-13}$ м.

18.8.* Частица массой m движется по круговой орбите в центральносимметричном поле, где сила притяжения, действующая на частицу со стороны центра поля зависит от расстояния r до центра поля как $F = \alpha r$, где α – положительная постоянная. Найти с помощью боровского условия квантования возможные радиусы орбит и значения полной энергии частицы в данном поле, выразить ее через частоту, с которой колебалась бы частица под действием указанной силы.

Решение. Запишем систему уравнений, описывающих боровское условие квантования и второй закон Ньютона для заданной частицы, в проекциях на радиальное направление:

$$\begin{cases} m \upsilon_n \cdot r_n = \dfrac{h}{2\pi} \cdot n \\ m \cdot \dfrac{\upsilon_n^2}{r_n} = \alpha r_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_n \cdot r_n = \dfrac{h}{2\pi m} \cdot n \\ \dfrac{\upsilon_n}{r_n} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} m\upsilon_n \cdot r_n = \dfrac{h}{2\pi}\cdot n \\ m\cdot\dfrac{\upsilon_n^2}{r_n} = \alpha r_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_n \cdot r_n = \dfrac{h}{2\pi m}\cdot n \\ \dfrac{\upsilon_n}{r_n} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}} \end{cases};$$

Кинетическая энергия частицы:

$$T_n = \frac{m\upsilon_n^2}{2} = \frac{h\sqrt{\alpha}}{4\pi\sqrt{m}}\cdot n.$$

Потенциальная энергия частицы в поле квазиупругой силы:

$$U_n = \frac{\alpha r_n^2}{2} = \frac{h\sqrt{\alpha}}{4\pi\sqrt{m}}\cdot n.$$

Полная энергия частицы:

$$E_n = T_n + U_n = \frac{h\sqrt{\alpha}}{2\pi\sqrt{m}}\cdot n = \hbar\omega\cdot n,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}}$ – собственная частота колебаний под действием квазиупругой силы.

18.9.* Позитрон – элементарная частица, масса которой равна массе электрона, а положительный заряд равен по величине заряду электрона. Система, состоящая из электрона и позитрона, вращающихся вокруг общего центра масс, называется позитронием. Вычислить расстояние l между частицами в позитронии в основном состоянии используя представления теории Бора для атома водорода. Радиус первой боровской орбиты для атома водорода $r_{\text{Б}} = 0{,}53\cdot 10^{-10}$ м.

Указание. В боровском условии квантования необходимо учесть движение обеих частиц: электрона и позитрона:

$$m\upsilon r + m\upsilon r = \hbar,$$

где r – радиус траектории, по которой движутся вокруг общего центра масс электрон и позитрон.

При записи второго закона Ньютона необходимо учесть то обстоятельство, что расстояние между частицами равно диаметру окружности, по которой они движутся:

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{k\mathrm{e}^2}{4r^2},$$

где k – постоянная закона Кулона.

Ответ: $l = 2r_Б \cong 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ м.

18.10. Сколько квантов с различной энергией может испустить атом водорода, если электрон находится на третьей боровской орбите?

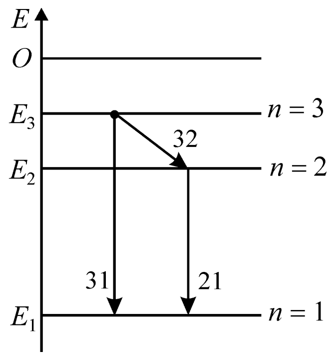

Рис. 18.1

Решение.

Каждой боровской орбите соответствует определенное значение главного квантового числа n и энергии электрона E (рис. 18.1). Атом испускает кванты электромагнитного излучения при переходе электрона в более низкое энергетическое состояние. На рис. 18.1 показаны возможные переходы атома водорода из заданного возбужденного состояния с $n = 3$ в состояние с наименьшей энергией с $n = 1$ (основное состояние). Каждый из указанных переходов (31, 32 и 21) будет сопровождаться испусканием квантов различных энергий.

Таким образом, ответ на вопрос задачи выглядит следующим образом. Число квантов с различной энергией, которые может испустить атом водорода, если электрон находится на третьей боровской орбите, равно 3.

18.11.* Электрон в атоме водорода перешел из основного состояния в возбужденное, получив энергию $\Delta E = 12{,}8$ эВ. Какова наибольшая длина волны, которую может теперь излучить атом водорода? Энергия электрона в основном состоянии $E_1 = -13{,}6$ эВ. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Определим на какой орбите оказался электрон в результате возбуждения, для чего воспользуемся соотношением:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2},$$

где n – главное квантовое число.

$$\Rightarrow \quad \Delta E = \frac{E_1}{n^2} - E_1;$$

$$n = \sqrt{\frac{E_1}{\Delta E + E_1}} = 4 .$$

Наибольшей длине волны излучения, которое может испустить атом водорода при возвращении в основное состояние, соответствует переход электрона на ближайшую орбиту с более низкой энергией, так как при этом изменение энергии электрона и, соответственно, энергия испускаемого кванта будут минимальными, а длина волны излучения максимальной. Таким образом, излучению с наибольшей длиной волны отвечает переход электрона из состояния с $n = 4$ в состояние с $n = 3$, тогда

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{E_1}{4^2} - \frac{E_1}{3^2} ;$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{\max} = 1{,}88 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

18.12. Зная постоянную Ридберга $R_\lambda = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$, подсчитать максимальную энергию, которую может иметь фотон, излучаемый атомом водорода.

Ответ: $E_{\text{ф}}^{\max} = hcR_\lambda \cong 2{,}17 \cdot 10^{-18}$ Дж $\cong 13{,}6$ эВ.

18.13. Определить для атома водорода потенциал ионизации φ_i и первый потенциал возбуждения φ_1. Энергия электрона в основном состоянии $E_1 = -\ 13{,}6$ эВ.

Ответ: $\varphi_i = -\dfrac{E_1}{\text{e}} = 13{,}6$ В; $\varphi_1 = -\dfrac{3E_1}{4\text{e}} = 10{,}2$ В.

18.14. Определить для водородоподобного иона гелия He^+ потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ.

Ответ: $\varphi_i = 54{,}4$ В; $\varphi_1 = 40{,}8$ В.

18.15. В результате поглощения кванта света электрон в атоме водорода перешел с первой боровской орбиты на вторую. Определить длину волны и частоту кванта. Постоянная Ридберга $R_\nu = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Гц. Скорость света $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Согласно условию задачи энергия поглощенного кванта равна разности энергий электрона на второй и первой боровской орбитах, следовательно она равна энергии кванта, который будет испущен электроном при переходе из возбужденного состояния (на второй боровской орбите) в основное (на первой боровской орбите), а частоту этого кванта, равную частоте поглощенного, мы можем рассчитать, используя формулу:

$$\nu = R_\nu \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где n и m – номер боровских орбит, между которыми совершается переход.

В нашем случае $n = 1$ и $m = 2$, откуда получим для частоты поглощенного кванта:

$$\nu = \frac{3}{4} R_\nu \cong 2{,}47 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Длину волны кванта найдем из соотношения $\lambda \cdot \nu = c$:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \cong 1{,}21 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

18.16. В каком состоянии находился атом водорода, если известно, что при его переходе в энергетически низшее состояние испускается квант электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 972{,}5$ Å? Постоянная Ридберга $R_\lambda = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

Ответ: главное квантовое число, характеризующее первоначальное состояние атома

$$n = \sqrt{\frac{\lambda R_\lambda}{\lambda R_\lambda - 1}} = 4.$$

18.17. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^5$ см. Определить радиус орбиты электрона возбужденного атома. Постоянная Рибберга $R_\nu = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$. Радиус первой боровской орбиты $r_Б = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м.

Ответ: $r = r_Б \cdot \dfrac{\lambda R_\lambda}{\lambda R_\lambda - 1} \cong 2{,}12 \cdot 10^{-10}$ м.

18.18. Наибольшая длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень, равна $\lambda_{max} = 656{,}3$ нм. Исходя из этих данных определить наибольшую длину волны, излучаемую атомом при переходе электрона на первый энергетический уровень. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

Указание. Наибольшей длине волны фотона соответствует наименьшая энергия фотона, для чего электрон должен переходить на второй уровень с ближайшего к нему третьего энергетического уровня:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R_\lambda \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right).$$

Наибольшая длина волны излучения при переходе электрона на первый энергетический уровень, соответственно, реализуется для перехода с ближайшего к нему второго уровня:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right).$$

Ответ: $\lambda = \frac{5}{27} \cdot \lambda_{\max} \cong 121{,}5$ нм.

18.19. Длина волны, излучаемая атомом водорода при переходе электрона на второй энергетический уровень с четвертого равна $\lambda = 4850$ нм. Определить минимальную длину волны, излучаемую атомом при переходе электрона на первый энергетический уровень. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

Указание. Минимальной длине волны излучения соответствует максимальная энергия испускаемого фотона, т.е. происходит переход электрона на первый энергетический уровень с уровня, для которого значение главного квантового числа *n* стремится к ∞.

Ответ: $\lambda_{\min} = \frac{3}{16} \cdot \lambda \cong 909$ нм.

18.20.* Атом водорода переходит из возбужденного состояния в основное. При этом он испускает, последовательно, один за другим два кванта света с длинами волн $\lambda_1 = 4051$ нм и $\lambda_2 = 97{,}25$ нм. Определить энергию первоначального (возбужденного) состояния атома. Энергия ионизации атома водорода равна $E_i = 13{,}6$ эВ. Постоянную Ридберга считать неизвестной.

Указание. Энергия ионизации E_i равна энергии фотона, испускаемого атомом водорода при переходе электрона на первый энергетический уровень с уровня, для которого значение главного квантового числа *n* стремится к ∞:

$$E_i = hcR_\lambda .$$

Ответ: $E_n = -E_i + hc \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \simeq -0{,}5$ эВ.

18.21. Разрядная трубка заполнена водородом при низком давлении. При каком напряжении на электродах будет происходить возбуждение атомов? Постоянная Ридберга $R_\lambda = 1,097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Указание. Указание на низкое давление газа в разрядной трубке подразумевает, что плотность газа или, другими словами, концентрация молекул мала, следовательно, свободные электроны, имеющиеся в газе (по крайней мере, заметная часть из них), могут ускоряться электрическим полем при движении от катода к аноду без потери приобретаемой кинетической энергии в неупругих столкновениях с атомами, т.е. могут достигать максимальной энергии равной eU, где U – прикладываемая между электродами разность потенциалов. Именно эти электроны будут определять нижнюю границу напряжения, при котором в окрестности анода становится возможным возбуждение атомов в результате столкновения с ускоренными в электрическом поле электронами. Наименьшая энергия, которую ускоренный электрон должен сообщить атому для его перехода в возбужденное состояние, соответствует переходу атомарного электрона с первого энергетического уровня на второй.

Ответ: $U \geq \dfrac{3hcR_\lambda}{4\mathrm{e}} \cong 10{,}2$ В.

18.22.* Фотон с энергией $E_ф = 16{,}5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра атома. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ. Масса электрона $m_е = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Решение. Подразумевается, что до столкновения атом водорода можно полагать покоящимся. Предположим, что импульс фотона пренебрежимо мал по сравнению с импульсами ядра и электрона после взаимодействия. Запишем уравнения, выражающие закон сохранения импульса и закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} O = M_я \cdot \upsilon_я - m_е \upsilon_е \\ E_1 + E_ф = \dfrac{M_я \upsilon_я^2}{2} + \dfrac{m_е \upsilon_е^2}{2} \\ E_1 = -E_i, \end{cases}$$

где $M_я$, m_e, $\upsilon_я$ и $\upsilon_е$ – массы и скорости ядра и электрона, E_1 – энергия атома водорода в основном состоянии, т.е. энергия электрона в атоме на первом энергетическом уровне.

$$\Rightarrow \quad -E_i + E_ф = \frac{m_е \upsilon_е^2}{2}\left(1 + \frac{m_е}{M_я}\right),$$

в силу того обстоятельства, что $\dfrac{m_е}{M_я} << 1$, вторым слагаемым в скобках можно пренебречь.

$$\upsilon_е = \sqrt{\frac{2\left(E_ф - E_2\right)}{m_е}} \simeq 1{,}01 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Оценим импульс фотона и электрона, и сравним их:

$$P_ф = \frac{E_ф}{c} \approx 10^{-26} \text{ кг} \cdot \text{м/ с};$$

$$P_е = m_е \upsilon_е \approx 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/ с};$$

действительно $P_ф << P_е$, т.е. сделанное предположение справедливо.

Оценим тепловую скорость атома водорода, например, при температуре, близкой к комнатной $T = 300$ К:

$$\upsilon_{ср.кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ м/с} << \upsilon_е,$$

где $\upsilon_{ср.кв}$ – средняя квадратичная скорость атомов; $R =$ $= 8{,}31$ Дж/(моль · К); $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – масса одного моля атомов водорода.

Таким образом, допущенное пренебрежение начальной скоростью атома водорода получает свое обоснование.

18.23. Первоначально неподвижный атом водорода испустил фотон с длиной волны $\lambda = 121{,}5$ нм. Какую скорость приобрел атом водорода? Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; масса атома водорода $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{h}{m_H \lambda} \cong 3{,}3$ м/с.

18.24. Какую скорость приобретет покоящийся атом водорода, поглощая фотон и переходя в первое возбужденное состояние? Энергия ионизации атома водорода $m_{\text{Н}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Запишем уравнения, выражающие закон сохранения энергии и закон сохранения импульса:

$$\begin{cases} E_{\text{ф}} - E_i = \dfrac{m_{\text{Н}} \upsilon^2}{2} - \dfrac{E_i}{4} \\ \dfrac{E_{\text{ф}}}{c} = m_{\text{Н}} \upsilon, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\text{Н}} \cdot \upsilon \cdot c - E_i = \frac{m_{\text{Н}} \upsilon^2}{2} - \frac{E_i}{4}.$$

Можно предположить, что скорость атома υ окажется много меньше скорости света c, поэтому слагаемым $m_{\text{Н}} \cdot \upsilon^2 / 2$ следует пренебречь по сравнению со слагаемым $m_{\text{Н}} \cdot \upsilon \cdot c$:

$$\upsilon = \frac{3E_i}{4 m_{\text{Н}} c} \cong 1{,}8 \text{ м/с} << c.$$

18.25.* Атом водорода поглощает фотон, вследствие чего электрон, находившийся на второй боровской орбите, вылетает из атома со скоростью $\upsilon = 6 \cdot 10^5$ м/с. Чему равна частота фотона? Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Указание. Следует считать атом водорода покоившимся до столкновения с фотоном и сделать предположение (которое затем необходимо проверить) о том, что импульс фотона пренебрежимо мал по сравнению с импульсами электрона и ядра атома после взаимодействия. Следует так же учесть, что масса электрона много меньше массы ядра атома.

Использовать уравнения, выражающие закон сохранения энергии и закон сохранения импульса.

Ответ: $\nu = \dfrac{m \upsilon^2}{2h} + \dfrac{E_i}{4h} \cong 1{,}07 \cdot 10^{15}$ Гц.

18.26.* Какой минимальной кинетической энергией должен обладать атом водорода, чтобы при неупругом лобовом столкновении с другим, покоящимся, атомом водорода один из них оказался способным испустить фотон. До соударения атомы находились в основном состоянии. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ.

Решение. Пусть υ – скорость налетающего атома водорода. Перейдем в систему отсчета, в которой оба атома до столкновения движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon/2$ каждый. Условию минимальности необходимой кинетической энергии налетающего атома водорода в изначальной системе отсчета будет соответствовать условие минимальности кинетической энергии сталкивающихся атомов в новой систем отсчета (кинетическая энергия тем меньше, чем меньше скорость тела). Для излучения фотона внутренняя энергия одного из атомов должна возрасти на величину $\frac{3}{4}E_i$, т.е. электрон должен перейти в атоме с первой боровской орбиты (основное состояние) на ближайшую вторую боровскую орбиту (первое возбужденное состояние).

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}E_i \\ E_{\min} = \frac{m\upsilon^2}{2}, \end{cases}$$

где $E_{\min}$ – искомая кинетическая энергия налетающего атома.

$$\Rightarrow \quad E_{\min} = \frac{3}{2}E_i = 20{,}4 \text{ эВ}.$$

18.27. Для удаления валентного электрона из атома натрия необходима энергия $E_i = 5{,}14$ эВ. Если валентный электрон перевести в возбужденное состояние, то атом натрия, возвращаясь в состояние с наименьшей энергией, испускает квант, которому соответствует длина волны $\lambda = 5{,}89\cdot10^{-7}$ м. Определить энергию возбужденного состояния. Постоянная Планка $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с.

Ответ: $E_{\text{возб.}} = -E_i + \frac{hc}{\lambda} = 3{,}03$ эВ.

18.28. Протон, движущийся со скоростью $\upsilon_0 = 4{,}6\cdot10^4$ м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью $\upsilon = \upsilon_0/2$, а атом переходит в возбужденное состояние. Вычислить длину волны света, который излучает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние. Массы протона и атома гелия $m_\text{p} = 1,67\cdot10^{-27}$ и $m_\text{He} = 6,64\cdot10^{-27}$ кг. Постоянная Планка $h = 6,63\cdot10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c = 3\cdot10^8$ м/с.

Указание. Использовать закон сохранения импульса:

$$m_\text{p}\cdot\upsilon_0 = -m_\text{p}\cdot\frac{\upsilon_0}{2} + m_\text{He}\cdot\upsilon$$

и закон сохранения энергии:

$$m_\text{p}\frac{\upsilon_0^2}{2} = \frac{m_\text{p}}{2}\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 + \frac{m_\text{He}\upsilon^2}{2} + \frac{hc}{\lambda}.$$

Ответ: $\lambda = \dfrac{8hc}{3m_\text{p}\upsilon_0^2 1 - 3m_\text{p}/m_\text{He}} \cong 6,00\cdot10^{-7}$ м.

18.29. Фотон с длиной волны $\lambda = 800$ Å выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. Вдали от атома электрон влетает в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого $E = 100$ В/м совпадает с вектором скорости электрона. На какое максимальное расстояние от границы поля может удалиться электрон? Заряд электрона $\text{e} = 1,6\cdot10^{-19}$ Кл. Постоянная Планка $h = 6,63\cdot10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c = 3\cdot10^8$ м/с. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13,6$ эВ.

Решение. Используя опыт решения ранее рассмотренных задач, например задачи 18.22, можем записать уравнение закона сохранения энергии для процесса ионизации атома водорода в виде:

$$-E_i + \frac{hc}{\lambda} = \frac{m_\text{e}\upsilon^2}{2}.$$

Кинетическая энергия электрона, приобретенная им в процессе ионизации атома, будет затрачена на совершение работы против силы Кулона в электрическом поле:

$$\frac{m_\text{e}\upsilon^2}{2} = \text{e}El_\text{max}.$$

$$\Rightarrow\quad l_\text{max} = \frac{hc/\lambda - E_i}{\text{e}E} \cong 1,9\cdot10^{-2}\ \text{м}.$$

18.30. Фотон, которому соответствует длина волны $\lambda = 900$ Å, выбивает электрон со второй боровской орбиты атома водорода. Находясь вдали от атома электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ Тл так, что магнитное поле перпендикулярно скорости электрона. Определить радиус орбиты, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле. Заряд и масса электрона $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ.

<u>Ответ:</u> $R = \dfrac{\sqrt{2m\left(hc/\lambda - E_i/4\right)}}{\mathrm{e}B} \cong 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ м.

18.31. Атом водорода испустил фотон при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую. Испущенный фотон попал на фотокатод и выбил из него фотоэлектрон. Определить максимальную скорость фотоэлектрона, если работа выхода электрона из материала фотокатода $A = 8{,}2$ эВ. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

<u>Ответ:</u> $\upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\dfrac{3}{4}E_i - A\right)} \cong 8{,}4 \cdot 10^{5}$ м/с.

18.32.* Атомарный водород облучают параллельным пучком монохроматического света от источника $P = 1$ Вт. Через единичную поверхность сечения пучка ежесекундно проходит $N = 3{,}8 \cdot 10^{23}$ м$^{-2} \cdot$с$^{-1}$ фотонов. Площадь поперечного сечения пучка $S = 10^{-6}$ м^{2}. На излучение расходуется $\eta = 80$ % мощности источника. Считается, что атомы водорода находятся в основном состоянии, определить максимально возможный номер боровской орбиты, на которую будут переходить электроны в атомах. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ.

<u>Ответ:</u> $n_{\max} \le \sqrt{\dfrac{NSE_i}{NSN_i - \eta P}} \cong 5{,}5 \;\Rightarrow\; n_{\max} = 5.$

18.33. При переходе электронов с некоторой более удаленной орбиты на вторую боровскую орбиту, атомы водорода испускают монохроматический пучок света. При падении этого пучка по нормали на дифракционную решетку максимум второго порядка

($k = 2$) наблюдается под углом дифракции $\varphi = 30°$. Постоянная дифракционной решетки $d = 2{,}6$ мкм. Определить номер орбиты n, на которой первоначально находились электроны в атомах водорода. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{khc}{E_i d \sin\varphi}}} = 6.$

§ 19. Физика атомного ядра. Строение ядра атома. Дефект массы и энергия связи нуклонов в ядре. Законы радиоактивного распада. Ядерные реакции

Ядро атома состоит из частиц двух типов – положительно заряженных протонов (заряд протона по величине равен заряду электрона, масса протона $m_\text{p} = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг) и электрически нейтральных нейтронов (масса нейтрона $m_\text{e} = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг). Протоны и нейтроны объединяют общим названием – нуклоны. Различные типы ядер называют нуклидами. Число протонов в ядре называется зарядовым числом Z – это одновременно порядковый номер соответствующего химического элемента в периодической таблице Менделеева. Поэтому его так же называют атомным номером ядра. Общее число нуклонов в ядре называют массовым числом A.

Чтобы охарактеризовать данный нуклид достаточно указать значения зарядового Z и массового A чисел. Для обозначения ядер обычно применяется символьная запись ${}_{Z}^{A}\text{X}$, где под X подразумевается химический элемент.

Ядра, содержащие одинаковое число протонов, но разное число нейтронов, называют изотопами. Например, изотопами являются обычный водород ${}_{1}^{1}\text{H}$ (протий) тяжелый водород ${}_{1}^{2}\text{H}$ (дейтерий) и сверхтяжелый водород ${}_{1}^{3}\text{H}$ (тритий).

Силы, удерживающие нуклоны в ядре, называются ядерными силами, которые представляют собой проявление самого интенсивного из известных в физике взаимодействий – так называемого сильного взаимодействия. Ядерные силы, действующие между двумя протонами в ядре, примерно на два порядка величины больше кулоновских сил. Действие ядерных сил быстро спадает с расстоянием: на расстояниях, больших $2 \cdot 10^{-13}$ м, их действие не проявляется. Вплоть до расстояний порядка $0,7 \cdot 10^{-15}$ м они проявляются как силы притяжения, на меньших расстояниях как силы отталкивания.

Радиус ядра возрастает в зависимости от массового числа согласно формуле:

$$r \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ [м]}. \qquad (19.1)$$

Массы ядер, как и массы атомов и молекул, принято измерять в атомных единицах массы (а.е.м):

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Часто массы ядер и элементарных частиц выражают в единицах энергии электрон-вольт, т.е. фактически указывается энергия покоя $E_0 = m_0 c^2$. Массе в 1 а.е.м. соответствует энергия покоя в 931,5 МэВ.

$$m_{\text{e}} = 0,9109534 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,00054858 \text{ а.е.м.} = 0,51100 \text{ МэВ},$$

$$m_{\text{e}} = 1,007276 \text{ а.е.м.} = 938,57 \text{ МэВ},$$

$$m_{\text{n}} = 1,008665 \text{ а.е.м.} = 939,57 \text{ МэВ}.$$

Масса стабильного ядра $m_{\text{я}}$ всегда меньше суммы масс входящих в него нуклонов. Следовательно, энергия покоящегося ядра меньше суммарной энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов на величину:

$$E_{\text{св.}} = \left\{ \left[Z m_{\text{p}} + (A - Z) m_{\text{n}} \right] - m_{\text{я}} \right\} \cdot c^2, \qquad (19.2)$$

которую называют энергией связи нуклонов в ядре. Она равна той минимальной работе, которую необходимо совершить над ядром (или той минимальной энергии, которую необходимо сообщить ядру), чтобы разделить нуклоны, образующие ядро, и удалить их друг от друга на расстояния, при которых они не взаимодействуют.

Силы, удерживающие нуклоны в ядре – это силы притяжения. Силам притяжения соответствует отрицательная потенциальная энергия. Например, в боровской модели атома водорода, благодаря отрицательной потенциальной энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром, внутренняя энергия атома оказывается отрицательной, и для того, чтобы разделить атом на невзаимодействующие электрон и ядро, необходимо совершить работу (или другими словами затратить энергию). Энергия связи электрона с ядром атома водорода в основном состоянии равна 13,6 эВ. По сравнению с полной энергией атома, которая примерно равна 938 МэВ (фактически это энергия покоя атома) – это очень маленькая величина. Для других атомов энергия связи ядер примерно в 10^6 раз больше энергий связи электронов с ядром. Таким образом, взаимодействие электронов с ядром не дает заметного вклада в полную (в релятивистском смысле) энергию, а значит и не влияет заметным образом на массу покоящегося атома. Следует помнить, что понятие силы в классическом представлении не применимо к описанию явлений, происходящих внутри таких объектов как атом и ядро атома, а служит только для обозначения соответствующего взаимодействия.

Величина:

$$\Delta m = \left[Z m_{\text{p}} + (A - Z) m_{\text{n}} \right] - m_{\text{я}} \tag{19.3}$$

называется дефектом массы ядра. Очевидно, что $\Delta m = E_{\text{св.}} / c^2$.

Если в выражение для энергии связи добавить и вычесть в правой части в скобках величину $Z m_{\text{e}}$ (суммарную массу электронов в нейтральном атоме) и пренебречь энергией связи электронов с ядром, то можно получить следующее выражение:

$$E_{\text{св.}} = \left\{ \left[Z m_{{}^1_1\text{H}} + (A - Z) m_{\text{n}} \right] - m_{\text{ат.}} \right\}, \tag{19.4}$$

где $m_{{}^1_1\text{H}}$ – масса атома водорода. Данная формула более удобна для практического применения, потому, что в таблицах обычно даются не массы ядер $m_{\text{я}}$, а массы атомов $m_{\text{ат.}}$

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\varepsilon_{\text{св.уд.}} = E_{\text{св.}} / A, \tag{19.5}$$

называется удельной энергией связи нуклонов в ядре.

Ядерной реакцией называется процесс взаимодействия атомного ядра с какой-либо частицей или с другим ядром, в результате которого происходит изменение состава и структуры ядра (или ядер). При любых ядерных реакциях выполняются законы сохранения электрического заряда (зарядового числа); суммарного числа нуклонов (массового числа); энергии; импульса.

Если сумма масс образующихся ядер превосходит сумму масс исходных ядер (частиц), то реакция идет с поглощением энергии (эндотермическая реакция). Если же сумма масс образующихся ядер меньше суммы масс исходных ядер (частиц), то реакция идет с выделением энергии (экзотермическая реакция). Энергия реакции выделяется в виде кинетической энергии образующихся частиц и энергии γ-квантов.

Самопроизвольное превращение атомных ядер одного элемента в ядра другого получило название радиоактивности или радиоактивного распада (превращение одного элемента в другой часто называют трансмутацией). Различают три вида самопроизвольного (спонтанного) превращения ядер.

1) Альфа-распад. Ядро, образующееся в результате испускания ядром α-частицы (ядра атома гелия ${}_2^4\mathrm{He}$), должно отличаться от исходного, так как последнее теряет два протона и два нейтрона. Схема альфа-распада:

$$ {}_Z^A X \to {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\mathrm{He}. \tag{19.5}$$

Примером альфа-распада может служить распад изотопа урана, протекающий с образованием тория:

$$ {}_{92}^{238}\mathrm{U} \to {}_{90}^{234}\mathrm{Th} + {}_2^4\mathrm{He}.$$

2) Бета-распад. Существует три схемы бета-распада.

Электронный или β^--распад протекает по схеме:

$$ {}_Z^A X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + \tilde{\nu}, \tag{19.6}$$

где символом ${}_{-1}^{0}\mathrm{e}$ обозначен электрон (испущенный материнским, т.е. исходным ядром), так как его заряд соответствует $Z = -1$,а масса очень мала и ядро не теряет нуклонов; символом $\tilde{\nu}$ обозначено антинейтрино – частица, имеющая нулевой заряд и ничтожную массу покоя. Примером β^--распада может служит превращение тория в протактиний:

$$ {}_{90}^{234}\mathrm{Th} \to {}_{91}^{234}\mathrm{Pa} + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + \tilde{\nu}.$$

Позитронный или β^+-распад протекает по схеме:

$$ {}_Z^A X \to {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^{0}\mathrm{e} + \nu, \tag{19.7}$$

так как если бы один из протонов исходного ядра превратился в нейтрон, испустив позитрон и нейтрино. В качестве примера β^+-распада можно привести превращение азота в углерод:

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{0}_{+1}\mathrm{e} + \nu .$$

Электронный захват. Состоит в том, что ядро поглощает один из электронов своего атома, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино:

$$^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \to {}^{A}_{Z-1}Y + \nu . \qquad (19.8)$$

При электронном захвате место захваченного электрона заполняется электроном с более высокого энергетического уровня, в результате чего возникают рентгеновские лучи. Примером такого распада может служить превращение калия в аргон:

$$^{40}_{19}\mathrm{K} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \to {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \nu .$$

3) Гамма-распад. Представляет собой испускание ядром фотонов очень высоких энергий. Гамма-распад во многом напоминает испускание фотонов возбужденным атомом. Так как γ-излучение не несет электрического заряда, то при γ-распаде не происходит превращения одного химического элемента в другой.

Проведенные с радиоактивными веществами опыты показали, что никакие внешние условия не влияют на характер и скорость распада. С течением времени число радиоактивных ядер уменьшается по закону радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T}, \qquad (19.9)$$

где N_0 – число исходных ядер в момент времени $t = 0$; T – период полураспада, т.е. время, за которое распадается половина из наличного числа радиоактивных ядер. Иногда закон радиоактивного распада записывается в несколько иной форме:

$$N = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad (19.10)$$

где величина $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ называется постоянной распада.

Количество ядер, распавшихся за время t, равно:

$$N_0 - N = N_0 \cdot \left(1 - 2^{-t/T}\right) = N_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right). \qquad (19.11)$$

Скорость распада, или число распадов в единицу времени, называется активностью радиоактивного вещества:

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{\ln 2}{T} N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \cdot 2^{-t/T}. \qquad (19.12)$$

Приведем несколько примеров ядерных реакций, в которых происходят вынужденные превращения ядер (в отличие от спонтанных, происходящих при радиоактивном распаде), сопровождающиеся испусканием проникающего (оно же ионизирующее) излучения, подобно тому, как это происходит в реакциях распада. Отличие состоит в том, что в данном случае ядерные реакции инициируются столкновением ядра с какой-либо частицей.

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{P};$$

$$^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{89}_{36}\mathrm{Kr} + 3 \cdot {}^{1}_{0}\mathrm{n};$$

$$^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

§ 20. Строение ядра атома. Радиоактивный распад. Ядерные реакции

ЗАДАЧИ

20.1. Сколько нуклонов, протонов, нейтронов и электронов содержат нейтральные атомы: $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$, $^{25}_{12}\mathrm{Mg}$, $^{26}_{12}\mathrm{Mg}$, что объединяет эту группу атомов?

Решение. Ответы на поставленные вопросы можно получить путем расшифровки численных значений параметров A и Z – массового и зарядового числа – символьного обозначения атомного ядра $^{A}_{Z}X$.

В первом случае число $A = 24$ показывает, что число нуклонов, т.е. протонов и нейтронов вместе, равно 24. Число протонов в ядре атома равно $Z = 12$, следовательно, число нейтронов равно $A - Z = 12$. Число электронов в нейтральном атоме совпадает с числом протонов, содержащихся в его ядре, и равно так же 12.

Аналогично, во втором случае: нуклонов – 25, протонов – 12, нейтронов – 13, электронов – 12. В третьем случае: нуклонов – 26, протонов – 12, нейтронов – 14, электронов – 12. Все три ядра являются изотопами – содержат одинаковое число протонов.

20.2. Определить число нуклонов, протонов, нейтронов и электронов, содержащихся в следующих нейтральных атомах: а) ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}$, б) ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, в) ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$, г) ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$. В какие группы можно объединить ядра этих атомов?

Ответ: а) 40, 18, 22, 18; б) 40, 20, 20, 20;
в) 13, 6, 7, 6; г) 14, 7, 7, 7.

а) и б) – **изобары** (одинаковое число нуклонов);
в) и г) – **изотоны** (одинаковое число нейтронов).

20.3. Сколько протонов и нейтронов содержит алюминий ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ массой $m = 1$ г. Число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Решение. Ядро алюминия содержит $Z = 13$ протонов и $A - Z = 27 - 13 = 14$ нейтронов. Массовое число A, указывающее на число нуклонов в ядре атома, одновременно указывает на массу ядра, выраженную в атомных единицах массы, которая численно при этом равна молярной массе элемента, выраженной в г/моль. Таким образом, молярная масса алюминия равна $M = 27$ г/моль. В одном моле вещества (элемента) содержится число Авогадро молекул этого вещества (атомов элемента), т.е. число ядер в указанном количестве вещества составляет:

$$N_я = \frac{m}{M} \cdot N_A;$$

число протонов $N_п = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot Z \simeq 2{,}9 \cdot 10^{23}$;

число нейтронов $N_н = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot (A - Z) \simeq 3{,}1 \cdot 10^{23}$.

20.4. Найти полное число электронов, содержащихся в аргоне ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}$, взятом в объеме $V = 0{,}5$ л при температуре $t = 100$ °С и давлении $P = 0{,}6$ атм. Число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К). Нормльное атмосферное давление $P_{атм.} = 10^5$ Па.

Ответ: $N_э = \frac{PV}{RT} \cdot N_A \cdot Z \simeq 10^{23}$.

20.5. Оценить: а) концентрацию нуклонов внутри ядра; б) плотность ядерного вещества; в) объемную плотность электрического заряда в ядре. При оценке считать число протонов равным числу нейтронов. Масса нуклона $m_{\text{н}} \simeq 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг. Элементарный электрический заряд $\mathrm{e} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Оценить – это значит произвести упрощенный расчет, применяя приближенные формулы и округляя численные значения используемых параметров и полученного результата.

Воспользуемся приближенной зависимостью радиуса ядра от массового числа:

$$r \simeq 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м}.$$

Концентрацию нуклонов в ядре оценим, разделив количество нуклонов в ядре на объем ядра, представляя его в виде тела шарообразной формы:

$$n \simeq \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \simeq 2 \cdot 10^{44} \text{ м}^{-3}.$$

Плотность ядерного вещества оценим, умножив полученную концентрацию нуклонов на массу одного нуклона:

$$\rho \simeq m_{\text{н}} \cdot n \simeq 3 \cdot 10^{7} \text{ кг/м}^3.$$

Плотность электрического заряда в ядре оценим, умножив концентрацию протонов в ядре, равную половине концентрации нуклонов, на величину заряда протона:

$$\rho_{\mathrm{e}} \simeq \frac{\mathrm{e} \cdot n}{2} \simeq 10^{25} \text{ Кл/м}^3.$$

20.6. Во сколько раз радиус ядра атома урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ больше радиуса ядра атома водорода ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$?

Ответ: примерно в 6,2 раза.

20.7. Каким был бы радиус Солнца, если при той же массе его плотность равнялась бы плотности ядерного вещества? Средняя плотность Солнца $\rho = 1410$ кг/м^3. Радиус Солнца $R = 6,95 \cdot 10^{8}$ м.

Ответ: примерно $1,3 \cdot 10^{4}$ м.

20.8. Какую часть от объема атома кобальта ${}^{59}_{27}\mathrm{Co}$ составляет объем его ядра? Плотность кобальта $\rho = 4500$ кг/м^3.

Ответ: $\dfrac{V_{\text{я}}}{V_{\text{а}}} \simeq 2 \cdot 10^{-14}$.

20.9. При естественном радиоактивном распаде радия ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ испускается альфа-частица. Написать схему ядерной реакции. В ядро какого элемента при этом превращается ядро атома радия?

Решение. Альфа-частица – это ядро атома геля ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, следовательно, с учетом сохранения числа нуклонов и электрического заряда, т.е. массового и зарядового числа, схема реакции имеет общий вид:

$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{A-4}_{Z-2}Y. $$

Конкретно, при распаде ядра радия массовое число вновь образующегося ядра равно 222, а его зарядовое число – 86. Атомный номер 86 в таблице Менделеева принадлежит радону. Таким образом, схема альфа-распада радия запишется в окончательном виде следующим образом:

$$ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}. $$

20.10. При радиоактивном распаде изотопа свинца ${}^{209}_{82}\mathrm{Pb}$ испускается β^{-}-частица. Написать схему ядерной реакции для этого случая, пользуясь таблицей Менделеева.

Указание. β^{-}-частица (быстрый электрон) имеет массовое число, равное нулю, и зарядовое число, равное минус единице. Общий вид схемы β^{-}-распада:

$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{A}_{Z+1}Y + \tilde{\nu}. $$

Антинейтрино $\tilde{\nu}$ имеет значения зарядового и массового чисел, равные нулю.

20.11. Сколько электронов испускает криптон ${}^{97}\mathrm{Kr}$ при превращении в молибден ${}^{234}_{90}\mathrm{Mo}$? Воспользоваться таблицей Менделеева.

Ответ: 6 электронов.

20.12. Ядро изотопа тория ${}^{232}\mathrm{Th}$ претерпевает α-распад, два электронных β-распада и еще один α-распад. Ядро какого изотопа получается в результате этих превращений? Записать уравнения соответствующих реакций.

Ответ: радий ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$.

20.13. Дописать недостающие символы в реакции β^{-}-распада:

$$ {}_{Z}^{A}X \to {}_{88}^{223}\mathrm{Ra} + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + \tilde{\nu}. $$

Воспользоваться таблицей Менделеева.

20.14. Дописать недостающие символы в реакции β^{+}-распада:

$$ {}_{Z}^{A}X \to {}_{6}^{13}\mathrm{C} + {}_{+1}^{0}\mathrm{e} + \nu. $$

Воспользоваться таблицей Менделеева.

Указание. При β^{+}-распаде ядро атома претерпевает радиоактивное превращение с испусканием позитрона ${}_{+1}^{0}\mathrm{e}$: частицы с такой же массой, как у электрона, но с положительным зарядом, равным по величине заряду электрона. Таким образом, массовое число позитрона равно нулю, а зарядовое число – плюс единице.

Нейтрино ν имеет значения зарядового и массового чисел, равное нулю, точно так же, как и антинейтрино.

20.15. Дописать недостающие символы в реакции электронного захвата (третий тип бета-распада наряду с β^{-} и β^{+}-распадом):

$$ {}_{19}^{40}\mathrm{K} + {}_{+1}^{0}\mathrm{e} \to {}_{Z}^{A}X + \nu. $$

Воспользоваться таблицей Менделеева.

Указание. При электронном захвате ядро поглощает один из электронов своего атома, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино.

20.16. Радиоактивные ядра меди могут испытывать три вида бета-превращений: β^{-} и β^{+}-распад и электронный захват:

$$ {}_{29}^{64}\mathrm{Cu} \to \mathrm{Zn} + {}_{-1}\mathrm{e} + \tilde{\nu}; $$

$$ {}_{29}^{64}\mathrm{Cu} \to \mathrm{Ni} + {}_{+1}\mathrm{e} + \nu; $$

$$ {}_{29}^{64}\mathrm{Cu} + {}_{-1}\mathrm{e} \to \mathrm{Ni} + \nu. $$

Дописать недостающие характеристики образующихся ядер. Воспользоваться таблицей Менделеева.

20.17. Некоторый радиоактивный ряд начинается с изотопа, содержащего 235 нуклонов, и заканчивается на изотопе с порядковым номером 82, при этом он включает семь α-распадов и четыре β^{-}-распада. Определить недостающие характеристики начального и конечного изотопов ряда. Каким элементам они принадлежат? Воспользоваться таблицей Менделеева.

Решение. В результате каждого α-распада массовое число уменьшается на 4, а зарядовое число уменьшается на 2. В результате β^--распада массовое число остается неизменным, а зарядовое число возрастает на 1.

Массовое число конечного изотопа данного ряда оказывается равным

$$A_{\text{кон.}} = A_{\text{нач.}} - 7 \cdot 4 = 235 - 14 = 221,$$

а так как его зарядовое число $Z_{\text{кон.}} = 82$, то согласно таблице Менделеева этим изотопом оказывается свинец $^{221}_{82}\text{Pb}$.

Зарядовое число начального изотопа данного ряда

$$Z_{\text{нач.}} = Z_{\text{кон.}} + 7 \cdot 4 - 4 = 82 + 10 = 92,$$

массовое число начального изотопа $A_{\text{нач.}} = 235$, следовательно, согласно таблице Менделеева этим изотопом оказывается уран $^{235}_{92}\text{U}$.

20.18. Изотоп нептуния $^{237}_{93}\text{Np}$ – родоначальник радиоактивного ряда, включающего в себя 11 реакций. На каком изотопе висмута $_{83}\text{Bi}$ он заканчивается и сколько α и β^--превращений включает?

Указание. Слово превращение в данном случае является синонимом слова распад.

Необходимо составить систему алгебраических уравнений, неизвестными величинами в которых будут: количество α-распадов, количество β^--распадов, массовое число конечного изотопа данного ряда.

Ответ: $^{209}_{83}\text{Bi}$.

20.19. Радиоактивный изотоп магния $^{23}_{12}\text{Mg}$ превращается в изотоп натрия $^{23}_{11}\text{Na}$. Какая частица при этом выбрасывается из ядра? Записать соответствующую реакцию.

20.20. Определить массу радиоактивного вещества, которая останется по истечении: а) суток; б) четырех суток, если вначале его масса была $M_0 = 100$ г. Период полураспада вещества $T = 2$ суток. в) По истечении какого времени масса вещества будет $m = 0{,}01$ г?

Решение. Согласно закону радиоактивного распада масса вещества, оставшегося в процессе радиоактивного распада за время t, может быть вычислена по формуле:

$$M = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = M_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2},$$

где M_0 – начальная масса радиоактивного вещества, T – период полураспада.

$$\Rightarrow \quad \frac{M_0}{M} = 2^{t/T} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{t/T} = \mathrm{e}^{\frac{t}{T}\ln 2} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{M_0}{M} = \frac{t}{T}\ln 2.$$

Окончательно имеем: $t = T \cdot \dfrac{\ln M_0/M}{\ln 2}$.

а) $M = 70{,}7$ г; б) $M = 25{,}0$ г; в) $t = 26{,}6$ суток.

20.21. Определить период полураспада изотопа, если известно, что через время t после начала распада осталось $k = \dfrac{2}{3}$ первоначального количества ядер данного изотопа.

Ответ: $T = -t\dfrac{\ln 2}{\ln K} \simeq 1{,}71 \cdot t$.

20.22. За время t_1 начальное количество некоторого радиоактивного изотопа уменьшилось в $k_1 = 3$ раза. Во сколько раз k_2 оно уменьшится за время $t_2 = 2t_1$?

Ответ: $k_2 = k_1^2 = 9$ раз.

20.23. Определить период полураспада висмута ^{210}Bi, если известно, что висмут массой $m = 1{,}0$ г выбрасывает $n = 4{,}58 \cdot 10^{15}$ β^--частиц за время $t = 1{,}0$ с.

Решение. Согласно закону радиоактивного распада число ядер радиоактивного изотопа, нераспавшихся за время t определяется формулой:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2},$$

где N_0 – начальное число ядер, T – период полураспада.

Количество распадов в единицу времени можно выразить следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\ln 2}{T} \cdot N_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2} = -\frac{\ln 2}{T} \cdot N.$$

Согласно условию задачи $n = \left|\dfrac{dN}{dt}\right|$, следовательно:

$$T = \frac{N}{n} \cdot \ln 2 = \frac{mN_A}{\mu n} \cdot \ln 2 = 5{,}0 \text{ суток;}$$

где $\mu = 210$ г/моль – молярная масса висмута, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

Обратим внимание на то обстоятельство, что за указанное в условии задачи время $t = 1{,}0$ с относительное изменение количества не претерпевших радиоактивный распад частиц $\Delta N / N \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ составляет пренебрежимо малую величину, т.е. за время t количество нераспавшихся ядер можно считать неизменным, следовательно, скорость распада (количество распадов в единицу времени) остается постоянной. Все это является следствием малости времени счета количества распадов t по сравнению с периодом полураспада T, т.е. $t \ll T$. В противном случае предложенный метод решения задачи неприменим.

20.24. Радиоактивный натрий $^{24}\mathrm{Na}$ распадается, испуская β^--частицу. Вычислить количество атомов, распавшихся в данном радиоактивном препарате массой $m = 1{,}0$ мг за время $t = 10$ часов. Каков суммарный заряд испущенных при этом распаде β^--частиц? Период полураспада изотопа $^{24}\mathrm{Na}$ составляет $T = 14{,}8$ часа. Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Заряд электрона $\mathrm{e} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

<u>Ответ:</u> $\Delta N = \dfrac{mN_A}{\mu} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2}\right) \simeq 9{,}5 \cdot 10^{19}$ атомов; где μ – молярная масса натрия $^{24}\mathrm{Na}$; $q = \mathrm{e} \cdot \Delta N \simeq 1{,}5$ Кл.

20.25. Альфа-распад радия $^{226}\mathrm{Ra}$ протекает с образованием радона $^{222}\mathrm{Rn}$, который в свою очередь оказывается радиоактивным и претерпевает распад. Периоды полураспада радия и радона равны $T_1 = 1600$ лет и $T_2 = 3{,}82$ суток; соответственно. Определить массу m_2 радона $^{222}\mathrm{Rn}$, находящегося в радиоактивном равновесии с радием $^{226}\mathrm{Ra}$ массой $m_1 = 1{,}0$ г.

Радиоактивное равновесие двух изотопов – состояние, при котором их активности, т.е. количество распадов в единицу времени, одинаковы. В данном случае это означает, что количество образующихся за секунду ядер радона равно количеству распадающихся за секунду ядер радона.

<u>Ответ:</u> $m_2 = m_1 \cdot \dfrac{\mu_2 \cdot T_2}{\mu_1 \cdot T_1} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ г, где μ_1 и μ_2 – молярные массы радия $^{226}\mathrm{Ra}$ и радона $^{222}\mathrm{Rn}$.

20.26. При определении периода полураспада короткоживущего радиоактивного изотопа использовался счетчик испускаемых в результате распада частиц, который при регистрации каждой частицы генерировал электрический импульс. За $t = 1$ мин. в начале наблюдения было зарегистрировано $\Delta N_0 = 250$ импульсов, а через время $\tau = 1$ час было зарегистрировано $\Delta N = 92$ импульса за то же $t = 1$ мин. Чему равен период полураспада данного изотопа?

<u>Указание.</u> Подразумевается, что время регистрации частиц t много меньше периода полураспада данного изотопа.

<u>Ответ:</u> $T = \tau \cdot \dfrac{\ln 2}{\ln \dfrac{\Delta N_0}{\Delta N}} \simeq 42$ мин.

20.27. Оценить количество теплоты, которое выделяет полоний $^{210}\mathrm{Po}$ массой $m = 1{,}0$ мг за время, равное периоду полураспада этих ядер, если испускаемые альфа-частицы имеют кинетическую энергию $W = 5{,}3$ МэВ каждая. Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

<u>Ответ:</u> $Q = \dfrac{m \cdot N_A \cdot W}{2\mu} \simeq 1{,}2$ МДж; где μ – молярная масса полония $^{210}\mathrm{Po}$.

20.28*. Известно, что из радиоактивного полония $^{210}\mathrm{Po}$ массой $m = 2{,}5$ г за время $t = 32$ дня в результате его распада образуется гелий $^{4}\mathrm{He}$ объемом $V = 40$ см^3 при нормальных условиях: $P_0 = 10^5$ Па, $\tau_0 = 273$ К. Определить по этим данным период полураспада данного изотопа полония. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Указание. В данном случае нет оснований предполагать, что время полураспада окажется много больше времени наблюдения $t = 32$ дня.

Ответ: $T = t \cdot \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\mu P_0 V}{mR\tau_0}}\right)} \simeq 138$ дней, где μ – молярная масса полония ${}^{210}\mathrm{Po}$.

20.29. Трансурановые элементы получают, используя многозарядные ионы с большой кинетической энергией.

а) Какими ионами облучают уран при получении эйнштейния Es, если осуществляется реакция:

$$^{238}\mathrm{U} + {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{246}_{99}\mathrm{Es} + 6n\,?$$

б) Ядра каких атомов используются в качестве мишеней при получении курчатовия Ku, если осуществляется реакция:

$$^{A}_{Z}Y + {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow {}^{260}_{104}\mathrm{Ku} + 4n\,?$$

Решение. Нейтроны n, являющиеся продуктами приведенных реакций, не обладают электрическим зарядом, поэтому имеют зарядовое число равное нулю. Их массовое число равно единице.

а) По таблице Менделеева находим, что зарядовое число урана равно 92, следовательно, можно составить следующие алгебраические уравнения для параметров неизвестного ядра иона:

$$\begin{cases} 238 + A = 252 \;\Rightarrow\; A = 14, \\ 92 + Z = 99 \;\Rightarrow\; Z = 7. \end{cases}$$

Используя таблице Менделеева, находим, что уран облучают ионами азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$.

б) Составляем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 22 = 264 \;\Rightarrow\; A = 242, \\ Z + 10 = 104 \;\Rightarrow\; Z = 94. \end{cases}$$

Используя таблицу Менделеева, находим, что мишенью являлись ядра плутония ${}^{242}_{94}\mathrm{Pu}$.

20.30. Когда ядро бора ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ захватывает быстро движущийся протон, в камере Вильсона, где протекает этот процесс, образуются три одинаковых трека, расходящихся веером. Какие одинаковые частицы образуют эти треки? Записать соответствующую реакцию. Воспользоваться таблицей Менделеева.

20.31. Используя таблицу Менделеева, дописать недостающие символы X, Y, Z, A в ядерных реакциях:

а) ${}^{32}_{16}\mathrm{S}+{}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{32}_{15}\mathrm{P}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}$;

б) ${}^{17}_{8}\mathrm{D}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{A}_{Z}X+n$;

в) ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}+\gamma\rightarrow{}^{A}_{Z}X+p+n$;

г) ${}^{A}_{2}X+{}^{10}_{Z}Y\rightarrow{}^{1}_{1}\mathrm{H}+{}^{13}_{6}\mathrm{C}$;

д) ${}^{A}_{4}X+\alpha\rightarrow{}^{12}_{Z}Y+n$;

е) ${}^{55}_{25}\mathrm{Mn}+p\rightarrow{}^{55}_{Z}X+{}^{A}_{0}Y$;

ж) ${}^{239}_{Z_1}\mathrm{Pu}+{}^{A}_{Z_2}X\rightarrow{}^{A}_{Z_3}\mathrm{Cm}+n$.

20.32. Сотый элемент фермий Fm впервые был получен путем кратковременного облучения урана сверхмощным потоком нейтронов. В этих условиях ядро урана может сразу поглотить более десятка нейтронов и затем, путем β^{-}-распадов, перейти в трансурановый элемент. Сколько нейтронов поглотило ядро урана и сколько электронов было испущено в ходе реакции образования ядра фермия:

$$^{238}\mathrm{U}+N_1\cdot n\rightarrow{}^{255}\mathrm{Fm}+N_2\mathrm{e}\,?$$

Решение. Воспользуемся таблицей Менделеева и запишем уравнение реакции более подробно:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U}+N_1\cdot{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{255}_{100}\mathrm{Fm}+N_2\cdot{}^{0}_{-1}\mathrm{e}\,.$$

Исходя из условия сохранения массового числа и зарядового числа, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases}238+1\cdot N_1=255 & \Rightarrow\ N_1=17,\\ 92+0=100-1\cdot N_2 & \Rightarrow\ N_2=8.\end{cases}$$

20.33. Захватывая медленный нейтрон, плутоний ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ распадается. Сколько нейтронов и электронов образуется в результате деления одного ядра плутония, если цепочка превращений заканчивается на долгоживущих изотопах цезия Cs и молибдена Mo:

$$^{239}\mathrm{Pu} + n \rightarrow {}^{135}\mathrm{Cs} + {}^{100}\mathrm{Mo} + N_1 \cdot n + N_2 \cdot \mathrm{e}\,?$$

Воспользоваться таблицей Менделеева.

§ 21. Дефект массы. Энергия связи. Энергия реакции. Законы сохранения в ядерных реакциях

<u>Задачи</u>

21.1. Вычислить в атомных единицах массы и килограммах дефект массы Δm ядра бора ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$. Масса атома бора ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ составляет $M_\mathrm{a} = 11{,}009305$ а.е.м. Масса протона $m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса нейтрона $m_\mathrm{n} = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса электрона $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. 1 а.е.м. $= 1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг.

<u>Решение.</u> Дефект массы ядра – это разность между суммой масс частиц, входящих в состав ядра, и массой ядра. Так как задана масса атома, то необходимо учесть массу электронов, входящих в его состав:

$$\Delta m = Z \cdot m_\mathrm{p} + (A - Z) \cdot m_\mathrm{n} - \left(M_a - Z \cdot m_\mathrm{e}\right) \cong 0{,}08178 \text{ а.е.м.} =$$
$$= 0{,}1358 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

21.2. Сравнить дефект массы гелия ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ и массу электронов данного атома. Масса атома гелия ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ составляет $M_\mathrm{a} = 3{,}016029$ а.е.м. Масса протона $m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса нейтрона $m_\mathrm{n} = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса электрона $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. 1 а.е.м. $= 1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг.

<u>Ответ:</u> дефект массы ядра ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ в 7,5 раз больше массы электронов атома гелия.

21.3. Найти дефект массы и энергию связи трития ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$. Какой процент от энергии покоя ядра составляет энергия связи? Масса атома трития $M_\mathrm{a} = 3{,}016049$ а.е.м. Масса протона $m_\mathrm{p} =$

$= 1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса нейтрона $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг. 1 а.е.м. $= 1,66057 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $\Delta m \cong 1,515 \cdot 10^{-29}$ кг $\cong 0,00912$ а.е.м.;

$E_{св.} \cong \Delta m \cdot c^2 = 8,49$ МэВ;

$$\frac{E_{св.}}{M_я \cdot c^2} = 3 \cdot 10^{-3} = 0,3\ \%.$$

21.4. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы «растащить» ядро кальция ${}^{40}_{20}Ca$ на отдельные протоны и нейтроны? Масса атома кальция ${}^{40}_{20}Ca$ составляет $M_a = 29{,}962591$ а.е.м. Масса протона $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса нейтрона $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг. 1 а.е.м. $= 1,66057 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $A_{min} \cong 342$ МэВ.

21.5. Определить энергию, которая может выделяться при образовании из протонов и нейтронов одного моля гелия ${}^4_2He$. Ответ выразить в джоулях. Масса атома водорода ${}^1_1H$ составляет $M_H = 1{,}007825$ а.е.м Масса атома гелия ${}^4_2He$ составляет $M_{He} = 4{,}002603$ а.е.м. Масса нейтрона $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг. 1 а.е.м. $= 1,66057 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с. Число Авогадро $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $E \cong 2,74 \cdot 10^{12}$ Дж.

21.6. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы «оторвать» один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_7N$? Масса атома азота ${}^{14}_7N$ составляет $M_{{}^{14}N} = 14{,}003074$ а.е.м. Масса атома азота ${}^{13}_7N$ составляет $M_{{}^{13}N} = 13{,}005739$ а.е.м. Масса нейтрона $m_n = 1{,}008665$ а.е.м.

Решение. Для вычислений формулу Эйнштейна, выражающую взаимосвязь массы и энергии, $E = mc^2$ удобно использовать в виде:

$$E = 931{,}5 \cdot m\,,$$

где энергия E выражена в [МэВ], а масса m выражена в [а.е.м.].

Сумма масс ядра азота ${}^{13}_{7}\mathrm{N}$ и свободного нейтрона больше массы ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$, следовательно, сумма энергий покоя ядра азота ${}^{13}_{7}\mathrm{N}$ и свободного нейтрона, согласно формуле Эйнштейна, больше энергии покоя составленного из них ядра, т.е. для того, чтобы «оторвать» нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ надо сообщить ядру энергию или, другими словами, совершить работу, которая должна быть не меньше, чем:

$$E_{\min} = \left(M_{{}^{13}_{7}\mathrm{N}} + m_{\mathrm{n}} - M_{{}^{14}\mathrm{N}}\right) \cdot c^2 \cong 10{,}55 \text{ МэВ}.$$

21.7. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы разделить ядро атома углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ на три α-частицы? Удельная энергия связи α-частицы $\left({}^{4}\mathrm{He}\right)$ $\varepsilon_{\alpha} = 7{,}07$ МэВ/н. Удельная энергия связи ядра атома углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ составляет $\varepsilon_{{}^{12}\mathrm{C}} = 7{,}68$ МэВ/н.

Решение. Массу α-частицы и массу ядра атома углерода ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ можно представить следующим образом:

$$M_{\alpha} = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - \Delta m_{{}^{4}\mathrm{He}}\,,$$

$$M_{{}^{12}\mathrm{H}} = 6m_{\mathrm{p}} + 6m_{\mathrm{n}} - \Delta m_{{}^{12}\mathrm{C}}\,,$$

где m_{p}, m_{n} – массы протона и нейтрона, $\Delta m_{{}^{4}\mathrm{He}}$ и $\Delta m_{{}^{12}\mathrm{C}}$ – дефекты массы ядра атома гелия (α-частицы) и ядра атома углерода ${}^{12}\mathrm{C}$.

Соответственно, минимальная работа, которую надо совершить или, другими словами, минимальная энергия, которую необходимо сообщить ядру углерода, чтобы разделить его на три α-частицы, равна энергии связи трех α-частиц при их слиянии в ядро атома углерода:

$$A_{\min} = \left(3M_{\alpha} - M_{{}^{24}\mathrm{C}}\right) \cdot c^2 = \left(\Delta m_{{}^{12}\mathrm{C}} - 3\Delta m_{{}^{4}\mathrm{He}}\right) \cdot c^2 =$$

$$= 12\varepsilon_{{}^{12}\mathrm{C}} - 12\varepsilon_{{}^{4}\mathrm{He}} \cong 7{,}32 \text{ МэВ}.$$

Воспользовались соотношением между удельной энергией связи и дефектом массы ядра:

$$\varepsilon_{\text{св.}} = \frac{E_{\text{св.}}}{A} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A},$$

где A – число нуклонов в ядре (массовое число).

21.8. Определить энергию, необходимую для разделения ядра кислорода ${}^{16}_{8}\text{O}$ на α-частицу $\left({}^{4}\text{He}\right)$ и ядро углерода ${}^{12}_{6}\text{C}$. Энергия связи: $E_{{}^{16}\text{O}} = 127{,}62$ МэВ; $E_{\alpha} = 28{,}30$ МэВ; $E_{{}^{12}\text{C}} = 92{,}16$ МэВ.

Ответ: $E \geq 7{,}16$ МэВ.

21.9. Какая энергия могла бы выделиться при слиянии двух α-частиц и нейтрона в ядро атома бериллия ${}^{9}_{4}\text{Be}$? Удельные энергии связи: $\varepsilon_{{}^{9}\text{Be}} = 6{,}46$ МэВ/н; $\varepsilon_{\alpha} = 7{,}07$ МэВ/н.

Указание. Сумма энергий покоя двух α-частиц и свободного нейтрона больше энергии покоя ядра атома бериллия, следовательно при слиянии двух α-частиц и нейтрона в ядро атома бериллия должна выделяться энергия в виде кинетической энергии образующегося ядра и энергии коротковолнового электромагнитного излучения.

Ответ: $Q = E_{\text{выд.}} = \left(M_{\text{нач.}} - M_{\text{кон.}}\right) \cdot c^2 = 9 \cdot \varepsilon_{{}^{9}\text{Be}} - 8 \cdot \varepsilon_{\alpha} \cong 1{,}58$ МэВ.

21.10. В термоядерной реакции

$${}^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} \to {}^{4}_{2}\text{He} + 2p$$

выделяется энергия $Q = 12{,}8$ МэВ. Какая энергия выделяется в реакции

$${}^{2}_{1}\text{H} + {}^{3}_{2}\text{He} \to {}^{4}_{2}\text{He} + p,$$

если дефект массы ядра ${}^{3}_{2}\text{He}$ на $\Delta m = 0{,}006$ а.е.м. больше, чем у ядра ${}^{2}_{1}\text{He}$?

Решение. Выделение энергии в приведенных реакциях происходит по той причине, что энергия покоя вступающих в реакцию частиц больше энергии покоя образующихся частиц. Поэтому в соответствии с законом сохранения энергии можем записать:

$$2 \cdot \left(2m_{\text{p}} + m_{\text{n}} - \Delta m_{{}^{3}\text{He}}\right) \cdot c^2 - \left(2m_{\text{p}} + 2m_{\text{n}} - \Delta m_{{}^{4}\text{He}}\right) \cdot c^2 - 2m_{\text{p}} \cdot c^2 = Q,$$

где $\Delta m_{{}^{3}\text{He}}$ и $\Delta m_{{}^{4}\text{He}}$ – дефекты массы ядер атомов гелия ${}^{3}_{2}\text{He}$ и ${}^{4}_{2}\text{He}$;

$$\left(m_{\text{p}}+m_{\text{n}}-\Delta m_{2_{\text{H}}}\right)\cdot c^2+\left(2m_{\text{p}}+m_{\text{n}}-\Delta m_{3_{\text{He}}}\right)-$$
$$-\left(2m_{\text{p}}+2m_{\text{n}}-\Delta m_{4_{\text{He}}}\right)\cdot c^2-m_{\text{p}}\cdot c^2=Q',$$

где $\Delta m_{2_{\text{H}}}$ – дефект массы ядра дейтерия (тяжелого водорода).

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(\Delta m_{4_{\text{He}}}-2\Delta m_{3_{\text{He}}}\right)\cdot c^2=Q,\\ \left(\Delta m_{4_{\text{He}}}-\Delta m_{3_{\text{He}}}-\Delta m_{2_{\text{H}}}\right)\cdot c^2=Q',\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad Q'=\Delta m\cdot c^2+Q\simeq 18{,}4\ \text{МэВ}.$$

21.11. Определить энергию, выделившуюся в реакции:

$${}^{9}_{4}\text{Be}+{}^{2}_{1}\text{H}\rightarrow{}^{10}_{4}\text{Be}+{}^{1}_{1}\text{H}\ ,$$

если полностью в ней использовано $m=1$ г бериллия ${}^{9}_{4}\text{Be}$. Масса атомов бериллия $m_{9_{\text{Be}}}=9{,}001219$ а.е.м. и $m_{10_{\text{Be}}}=10{,}101354$ а.е.м., масса атомов дейтерия $m_{2_{\text{H}}}=2{,}01410$ а.е.м. и водорода (протия) $m_{1_{\text{H}}}=1{,}00783$ а.е.м. Число Авогадро $N_A=6{,}022\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $Q=\left(m_{9_{\text{Be}}}+m_{2_{\text{H}}}-m_{10_{\text{Be}}}-m_{1_{\text{H}}}\right)\cdot c^2\cdot\dfrac{m}{\mu_{9_{\text{Be}}}}\cdot N_A\simeq 4{,}9\cdot 10^{10}$ Дж,

где $\mu_{9_{\text{Be}}}$ – молярная масса бериллия ${}^{9}_{4}\text{Be}$.

21.12. При делении ядер с удельной энергией связи $\varepsilon_0=8{,}3$ МэВ/Н образуются два осколка – один с массовым числом $A_1=140$ и удельной энергией связи $\varepsilon_1=8{,}5$ МэВ/н, другой с массовым числом $A_2=94$ и удельной энергией связи $\varepsilon_2=8{,}6$ МэВ/н. Пренебрегая различием масс нейтрона и протона, оценить, какое количество теплоты выделится при делении массы $m=1$ г исходного элемента. Масса протона $m_{\text{p}}=1{,}6724\cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: $Q=\left[\varepsilon_1\cdot A_1+\varepsilon_2\cdot A_2-\varepsilon_0\cdot(A_1+A_2)\right]\cdot\dfrac{m}{(A_1+A_2)\,m_{\text{p}}}\simeq 2{,}3\cdot 10^{10}$ Дж.

21.13. Какую массу воды можно нагреть от 0 ºC до кипения при атмосферном давлении, если использовать всю энергию, выделившуюся в ходе реакции:

$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + p \to 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

при полном разложении $m = 1$ мг лития? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельные энергии связи ядер лития $\varepsilon_{{}^7\mathrm{Li}} = 5{,}61$ МэВ/н и гелия $\varepsilon_{{}^4\mathrm{He}} = 7{,}07$ МэВ/н. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $m_{\text{в}} = \dfrac{m}{\mu_{{}^7\mathrm{Li}}} \cdot N_A \cdot \dfrac{8\varepsilon_{{}^4\mathrm{He}} - 7\varepsilon_{{}^7\mathrm{Li}}}{c \cdot \Delta T} \simeq 570$ кг, где $\mu_{{}^7\mathrm{Li}}$ – молярная масса лития, $\Delta T = 100$ К – приращение температуры воды.

21.14. Энергия эндотермической реакции:

$$ {}^{17}_{8}\mathrm{O} + n \to p + {}^{17}_{7}\mathrm{N}, $$

$Q = -\,7{,}89$ МэВ (т.е. реакция идет с поглощением энергии). Используя табличные значения масс нейтральных атомов, оценить массу нестабильного изотопа азота. Масса атома кислорода ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$ равна $m_{{}^{17}\mathrm{O}} = 16{,}999131$ а.е.м., масса нейтрона $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008665$ а.е.м., масса протона $m_{\mathrm{p}} = 1{,}007276$ а.е.м.

Ответ: $m_{{}^{17}\mathrm{N}} = m_{{}^{17}\mathrm{O}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}} - \dfrac{Q}{c^2} \simeq 17{,}00899$ а.е.м.

21.15. Свободное неподвижное ядро иридия ${}^{192}_{77}\mathrm{Ir}$ с энергией возбуждения $E_{\text{возб.}} = 129$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ-квант. Вычислить относительное изменение энергии γ-кванта, возникающее в результате отдачи ядра. Массу нуклона принять равной $m_{\mathrm{H}} = 1{,}008$ а.е.м.

Решение. Запишем уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии для продуктов реакции:

$$ \begin{cases} 0 = \dfrac{E_\gamma}{c} - m\upsilon, \\ E_{\text{возб.}} = E_\gamma + \dfrac{m\upsilon^2}{2}, \end{cases} $$

где E_γ – энергия испущенного γ-кванта, m – масса ядра иридия.

Так как энергия возбуждения заведомо много меньше энергии покоя ядра иридия:

$$mc^2 = 192 \cdot 1{,}008 \cdot 931{,}5 \simeq 180 \text{ МэВ},$$

то и скорость ядра после испускания γ-кванта будет много меньше скорости света, следовательно, массу ядра иридия можно считать постоянной и равной массе покоя, а импульс и кинетическую энергию записывать в нерелятивистской форме. Искомой величиной согласно вопросу задачи является

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{возб.}}} = \frac{E_{\text{возб.}} - E_\gamma}{E_{\text{возб.}}}.$$

Из выше записанных уравнений следует:

$$\Delta E = E_{\text{возб.}} - E_\gamma = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} << E_{\text{возб.}},$$

поэтому можем принять, что:

$$E_{\text{возб.}} - E_\gamma = \frac{E_{\text{возб.}}^2}{2mc^2}.$$

Итого получим:

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{возб.}}} = \frac{E_{\text{возб.}}}{2mc^2} \simeq 3{,}6 \cdot 10^{-7}.$$

21.16. Неподвижное возбужденное ядро изотопа калия ${}^{40}_{19}\text{K}$ испускает γ-квант с энергией $E_\gamma = 9{,}4$ кэВ. Определить кинетическую энергию ядра после испускания γ-кванта. Массу нуклона принять $m_\text{н} = 1{,}008$ а.е.м.

Ответ: $E_{\text{кин.}} = \dfrac{E_\gamma^2}{2m_{{}^{40}\text{K}} \cdot c^2} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ эВ.

21.17. Неподвижное ядро полония ${}^{210}_{84}\text{Po}$ испустило α-частицу и превратилось в ядро свинца ${}^{206}_{82}\text{Pb}$. Масса атома полония ${}^{210}_{84}\text{Po}$ равна $m_{{}^{210}\text{Po}} = 209{,}98286$ а.е.м., масса атома свинца ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ – $m_{{}^{206}\text{Pb}} = 205{,}97445$ а.е.м., атома гелия ${}^{4}_{2}\text{He}$ – $m_{{}^{4}\text{He}} = 4{,}00260$ а.е.м. Определить кинетическую энергию ядра свинца.

Решение. Запишем в первую очередь уравнение, выражающее закон сохранения энергии, которое позволит нам выразить выделяющуюся в данной реакции энергию:

$$m_{210\,\mathrm{Po}} \cdot c^2 = m_{206\,\mathrm{Pb}} \cdot c^2 + m_{4\,\mathrm{He}} \cdot c^2 + Q.$$

$$\Rightarrow \; Q = \left(m_{210\,\mathrm{Po}} - m_{206\,\mathrm{Pb}} - m_{4\,\mathrm{He}}\right) \cdot c^2 \simeq 5{,}41 \text{ МэВ}.$$

Энергия выделяется в виде кинетической энергии продуктов реакции. Энергию покоя более легкого осколка – α-частицы, можем оценить как

$$m_{4\,\mathrm{He}} \cdot c^2 \simeq 4{,}00260 \cdot 931{,}5 \simeq 3728 \text{ МэВ} >> Q,$$

следовательно, мы можем с полным основанием считать продукты реакции нерелятивистскими частицами.

Запишем уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии для продуктов реакции:

$$\begin{cases} 0 = m_{4\,\mathrm{He}} \cdot \upsilon_1 - m_{206\,\mathrm{Pb}} \cdot \upsilon_2 \\ Q = m_{4\,\mathrm{He}} \cdot \dfrac{\upsilon_1^2}{2} + m_{206\,\mathrm{Pb}} \cdot \dfrac{\upsilon_2^2}{2}, \end{cases}$$

при составлении уравнений пренебрегли массой электронов, входящих в состав атомов, по сравнению с массой ядра.

$$\Rightarrow \; E_{206\,\mathrm{Pb}} = m_{206\,\mathrm{Pb}} \cdot \frac{\upsilon_2^2}{2} =$$

$$= \frac{\left(m_{210\,\mathrm{Po}} - m_{206\,\mathrm{Pb}} - m_{4\,\mathrm{He}}\right) \cdot c^2}{1 + \dfrac{m_{4\,\mathrm{He}}}{m_{206\,\mathrm{Pb}}}} \cdot \frac{m_{4\,\mathrm{He}}}{m_{206\,\mathrm{Pb}}} \simeq 12{,}5 \text{ МэВ}.$$

21.18* Найти наименьшее значение энергии γ-кванта, достаточное для выбивания нейтрона из ядра изотопа магния ${}^{24}\mathrm{Mg}$. Массы атомов магния $m_{23\,\mathrm{Mg}} = 22{,}989770$ а.е.м. и $m_{24\,\mathrm{Mg}} = 23{,}985045$ а.е.м., масса нейтрона $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008665$ а.е.м.

Указание. В силу того обстоятельства, что для нерелятивистских частиц импульс и кинетическая энергия связаны соотношением $E = \dfrac{P^2}{2m}$, и кроме того в происходящей ядерной реакции должен сохраняться импульс системы частиц, то условию минимума энергии γ-кванта будет соответствовать ситуация, когда после взаимодействия нейтрон покоится и переданный γ-квантом импульс уносит ядро.

Нетрудно убедиться, что энергия, поглощаемая в указанной реакции много меньше энергии покоя ядра, поэтому образующиеся в результате реакции частицы будут нерелятивистскими.

<u>Ответ:</u> $$E_{\gamma}^{\min} \cong \left(m_{^{23}\mathrm{Mg}} + m_{\mathrm{n}} - m_{^{24}\mathrm{Mg}}\right)\cdot c^2 \times$$

$$\times\left(1+\frac{m_{^{23}\mathrm{Mg}} + m_{\mathrm{n}} - m_{^{24}\mathrm{Mg}}}{2m_{^{23}\mathrm{Mg}}}\right) \simeq 12{,}5 \text{ МэВ}.$$

21.19. Протон, налетающий на неподвижное ядро атома лития, возбуждает реакцию:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + p \to n + {}^{7}_{4}\mathrm{Be}.$$

При какой кинетической энергии протона возникающий нейтрон будет неподвижен? Массы атомов лития $m_{^{7}\mathrm{Li}} = 7{,}016004$ а.е.м., бериллия $m_{^{7}\mathrm{Be}} = 7{,}016931$ а.е.м., водорода $m_{^{1}\mathrm{H}} = 1{,}007825$ а.е.м. Масса нейтрона $m_{\mathrm{n}} = 1{,}007825$ а.е.м.

<u>Ответ:</u> $$E_{\mathrm{p}} = \frac{\left(m_{^{7}\mathrm{Be}} + m_{\mathrm{n}} - m_{^{7}\mathrm{Li}} - m_{^{1}\mathrm{H}}\right)\cdot c^2}{1 - \dfrac{m_{\mathrm{p}}}{m_{^{7}\mathrm{Be}}}} \cong 1{,}92 \text{ МэВ}.$$

21.20. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер дейтерия $^{2}_{1}\mathrm{H}$ и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии продуктов реакции:

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n.$$

Массы атомов дейтерия $m_{^{2}\mathrm{H}} = 2{,}014102$ а.е.м. и гелия $m_{^{3}\mathrm{He}} =$ $m_{^{3}\mathrm{He}} = 3{,}016029$ а.е.м., масса нейтрона $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008665$ а.е.м.

<u>Ответ:</u> $$E_{\mathrm{n}}^{\text{кин.}} = \frac{\left(2m_{^{2}\mathrm{H}} - m_{^{3}\mathrm{He}} - m_{\mathrm{n}}\right)\cdot c^2}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{n}}}{m_{^{3}\mathrm{He}}}} \cong 2{,}45 \text{ МэВ},$$

$$E_{^{3}\mathrm{He}}^{\text{кин.}} = \frac{\left(2m_{^{2}\mathrm{H}} - m_{^{3}\mathrm{He}} - m_{\mathrm{n}}\right)\cdot c^2}{1 + \dfrac{m_{^{3}\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{n}}}} \cong 0{,}82 \text{ МэВ}.$$

21.21.* Определить массу атома, ядро которого испуская α-частицу с энергией $E_\alpha = 5{,}46$ МэВ, превращается в ядро изотопа полония $^{218}\mathrm{Po}$. Масса атома полония $m_{^{218}\mathrm{Po}} = 218{,}00901$ а.е.м., атома гелия $m_{^4\mathrm{He}} = 4{,}002603$ а.е.м.

Указание. Подразумевается, что первоначально ядро неизвестного атома покоится.

Ответ: $m_x = m_{^4\mathrm{He}} + m_{^{218}\mathrm{Po}} + \dfrac{E_\alpha}{c^2} \cdot \left(1 + \dfrac{m_{^4\mathrm{He}}}{m_{^{218}\mathrm{Po}}}\right) \cong 222{,}01758$ а.е.м.

21.22. Для осуществления термоядерного синтеза (слияния легких ядер в одно ядро) требуется преодолеть кулоновское отталкивание ядер. Оценить в МэВ, какой одинаковой кинетической энергией должны обладать два протона, чтобы сблизить их на расстояние $r = 2 \cdot 10^{-15}$ м (радиус действия ядерных сил). Какой температуре теплового движения соответствует вычисленная кинетическая энергия, если ее принять за среднюю кинетическую энергию теплового движения? Заряд протона $\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Постоянная закона Кулона $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $E_{\text{кин.}}^{\min} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{\pi\varepsilon_0} \simeq 0{,}36$ МэВ; $T = \dfrac{2E_{\text{кин.}}^{\min}}{3k} \simeq 4 \cdot 10^9$ К.

21.23. Средняя поглощенная доза излучения, работающим с рентгеновской установкой, равна 7 мкГр за 1 час. Опасна ли работа сотрудника в течении 200 дней в году по 6 час. в день, если предельная допустимая доза облучения равна 50 мГр в год?

Ответ: нет, не опасна.

Долгов А.Н.

ОПТИКА
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
АТОМНАЯ ФИЗИКА
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 27.05.2008 Формат 60×84 1/16
Печ.л. 10,75. Тираж 0000 экз. Изд. № 0000 Заказ № 0000

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Каширское ш., 31.
Типография НИЯУ МИФИ.