Подобно тому как в геометрии, в которой излагается измерение тел, изложение обыкновенно начинается с точки, точно так же и движение тел конечной величины не может быть объяснено, пока не будет тщательно исследовано движение точек, из которых, как мы принимаем, составлены тела.

Ведь нельзя наблюдать и определить движение тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка. Вследствие этого изложение вопроса о движении точек есть основа и главная часть всей механики, на которой основываются все остальные части.

Леонард Эйлер

Г.А. Маковкин

Конспект лекций по теоретической механике

КИНЕМАТИКА

Рекомендуемая литература

- Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие.—СПб.: «Лань», 2005.
- Лойцанский Л.Г., А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том первый. Статика и кинематика. 2006г.
- Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. О.Э. Кепе. – Спб.: Изд. «Лань», 2008.
- Теоретическая механика. Методические указания к расчетно-графической работе по кинематике. Нижний Новгород, ННГАСУ, 2003 г.для выполнения расчетно-графической работы по статике. 2006г.
- Теоретическая механика. Методические указания к решению задач по кинематике точки. Нижний Новгород, ННГАСУ, 2009.

1. Тема: КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил, то есть с чисто геометрической точки зрения.

Под движением в механике понимают изменение положения данного тела в пространстве по отношению к некоторой координатной системе, которую называют ***системой отсчета***.

Таким образом, понятие движения является относительным. Тело, находящееся в покое относительно одной системы отсчета может совершать движение относительно другой системы отсчета.

Пространство в классической механике считается однородным, изотропным и евклидовым, а время является абсолютным, то есть протекающим одинаково во всех системах отсчета.

Для описания течения времени в механике используют независимую переменную. При этом все другие переменные величины рассматривают как функции времени. Отсчет времени ведут от некоторого начального момента $t = t_0$.

Основной задачей механики является изучение способов задания движения тел. Движение тела считается заданным, если для любого момента времени можно математически указать положение любой точки тела по отношению к данной системе отсчета.

Кроме того кинематика рассматривает ***кинематические характеристики***, такие как скорости или ускорения, и устанавливает связывающие их математические зависимости.

Основными разделами кинематики являются:

- кинематика точки,
- кинематика твердого тела,
- сложное движение точки,
- сложное движение твердого тела.

1.2. Способы задания движения точки

В кинематике используют три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ задания движения точки

Положение движущейся точки M по отношению к системе отсчета $Oxyz$ можно задать ***радиус-вектором*** этой точки $\vec{r}$, который считается векторной функцией времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1}$$

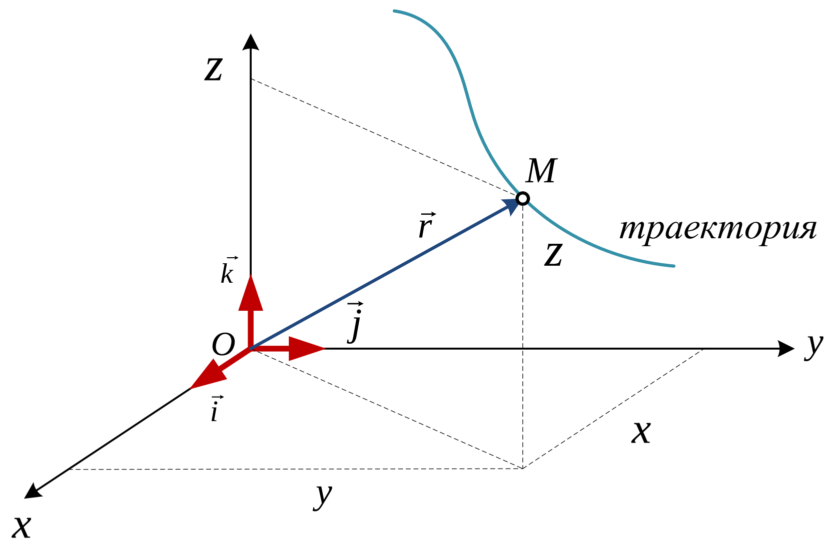


Рис. 1.1

Уравнение (1.1) представляет собой уравнение движения точки в векторной форме. Линия, которую описывает точка в своем движении, называется ее ***траекторией***. Траектории движения точек можно разделить на прямолинейные и криволинейные.

При векторном способе задания движения траектория точки будет геометрическим местом положений конца радиус вектора $\vec{r}$, то есть его ***годографом***.

Координатный способ задания движения точки

Положение точки в данной системе отсчета можно определить, задав ее координаты в виде функций времени. В декартовой системе координат это будут функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения траектории точки, заданные в параметрической форме. Время t в данном случае будет являться параметром. Чтобы получить уравнение траектории в явной форме надо из уравнений (1.2) исключить время.

Связь между векторным и координатным способами задания движения точки дается формулой

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \tag{1.3}$$

где $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ – единичные вектора (орты) декартовой системы координат.

Естественный способ задания движения точки

Этот способ применяется тогда, когда заранее известна траектория точки.

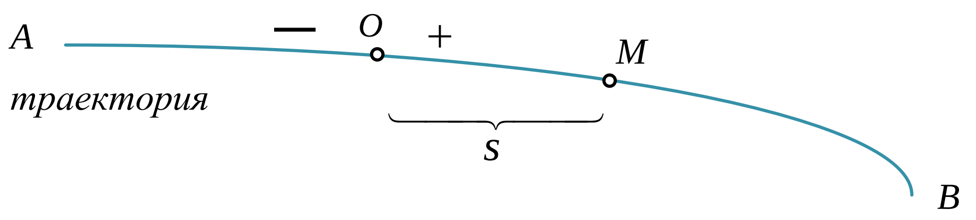


Рис. 1.2

Чтобы задать движение некоторой точки M естественным способом, следует указать:

1. траекторию точки (кривая AB на рис. 1.2);
2. начальную точку на ней (точка O на рис. 1.2);
3. положительное и отрицательное направление отсчета по траектории;
4. уравнение движения точки по траектории:

$$s = s(t), \tag{1.4}$$

в котором s есть ***дуговая координата***, то есть длина дуги по траектории между точками O и M, взятая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того в какой части траектории находится точка.

Дуговая координата определяет положение точки, а не пройденный ею путь.

1.3. Скорость точки

Определение скорости при векторном способе задания движения

Скоростью точки называется кинематическая мера движения, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{1.5}$$

В дальнейшем точкой сверху будем обозначать производную по времени.

Система координат при этом считается неподвижной, а орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – постоянными, как по величине, так и по направлению.

Скорость точки – величина векторная, ее направление показывает куда в данный момент движется тело, а ее модуль – быстроту изменения положения точки. Размерность модуля скорости: $[v] = м/с$.

Определение скорости при координатном способе задания движения

Возьмем производную от радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Поскольку $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$,

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на координатные оси, то очевидно, что они равны производным по времени от соответствующих координат:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \qquad (1.6)$$

Обычным образом находятся модуль вектора скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

и его направляющие косинусы:

$$\begin{cases} n_x = cos(\vec{v}, x) = v_x/v \\ n_y = cos(\vec{v}, y) = v_y/v. \\ n_z = cos(\vec{v}, z) = v_z/v \end{cases}$$

Определение скорости при естественном способе задания движения

При естественном способе задания движения точки известна ее траектория и уравнение движения $s = s(t)$. Каждому значению дуговой координаты s соответствует свой радиус-вектор $\vec{r}$, который в этом случае можно рассматривать как сложную функцию:

$$\vec{r} = \vec{r}\big(s(t)\big).$$

Взяв производную по времени от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени, получим скорость:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Рассмотрим вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$. Изобразим два близких по времени положения точки: M и M_1. При $\Delta s \to 0$, то есть при $M_1 \to M$, отношение длины стягивающей хорды к длине дуги стремится к единице, то есть

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1,$$

а направление секущей MM_1 в предельном положении совпадает с направлением касательной к траектории, проведенной через точку M. То есть, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории в положительную сторону дуговой координаты. Обозначим его $\vec{\tau}$ и будем называть единичным вектором касательной.

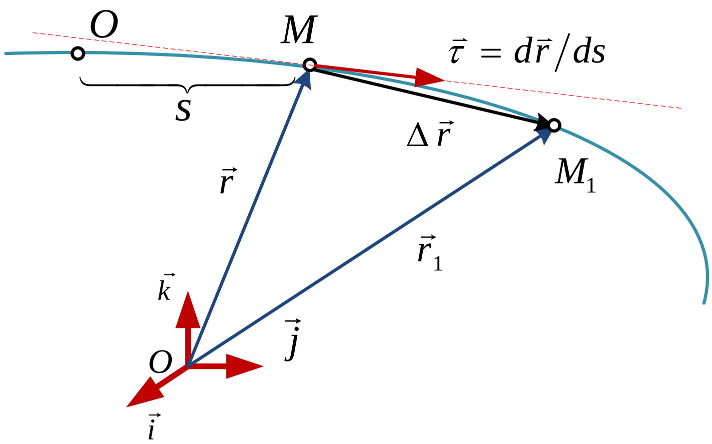


Рис. 1.3

Тогда вектор скорости можно представить как

$$\vec{v} = v_\tau\vec{\tau}, \tag{1.7}$$

где $v_\tau = \dot{s}$ представляет собой проекцию вектора скорости на касательную, которую также называют ***алгебраическим значением скорости***.

Подведем итог:

1. Скорость всегда направлена по касательной к траектории в сторону движения;
2. Скорость по модулю равна $v = |v_\tau| = |\dot{s}|$;
3. Знак проекции $\boldsymbol{v_\tau}$ показывает направление скорости: при $v_\tau > 0$ скорость направлена в положительном направлении дуговой координаты, а при $v_\tau < 0$ − в отрицательном направлении.

1.4. Ускорение точки

Определение ускорения при векторном способе задания движения точки

Ускорением точки называется кинематическая мера движения, равная производной по времени от вектора скорости точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \text{или} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.8}$$

Система координат при этом считается неподвижной.
Ускорение характеризует изменение вектора скорости.
Размерность модуля ускорения $[a] = \text{м}/\text{с}^2$.

Определение ускорения при координатном способе задания движения

При координатном способе задания движения вектор скорости задается формулой:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим формулу для ускорения:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (1.9)$$

то есть проекции вектора ускорения на координатные оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат, или первым производным по времени от соответствующих проекций вектора скорости.

Обычным образом находятся модуль вектора ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

и его направляющие косинусы:

$$\begin{cases} l_x = cos(\vec{a}, x) = a_x/a \\ l_y = cos(\vec{a}, y) = a_y/a. \\ l_z = cos(\vec{a}, z) = a_z/a \end{cases}$$

1.5. Геометрия траекторий

Радиус кривизны

Рассмотрим произвольную пространственную кривую (рис.1.4). Пусть за промежуток времени Δt материальная точка перемещается по ней из точки M в точку M_1 и ее дуговая координата меняется при этом на величину Δs.

Построим в точках M и M_1 единичные векторы касательной $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$.

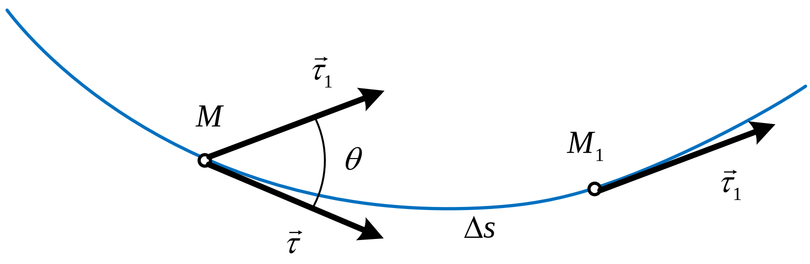


Рис. 1.4

Перенесем вектор $\vec{\tau}_1$ параллельно в точку М. Угол θ между единичными векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ называется ***углом смежности***. При $\Delta t \to 0$ точка M_1 будет стремиться к точке M, а угол θ и длина дуги $|\Delta s|$ – к нулю.

Предел их отношения называется ***кривизной*** данной кривой в точке М:

$$lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta}{|\Delta s|} = k.$$

Величина, обратная кривизне, называется ***радиусом кривизны***:

$$\rho = 1/k.$$

Радиус кривизны измеряется в метрах. Радиус кривизны равняется радиусу окружности, которая наилучшим образом совпадает с кривой в окрестности данной точки.

ПРИМЕРЫ:

1. Окружность является кривой постоянной кривизны. Во всех точках окружности радиус ее кривизны равен радиусу окружности.
2. Прямая линия является линией постоянной кривизны. Во всех ее точках радиус кривизны равен бесконечности, а кривизна равна нулю.
3. У таких линий, как эллипс или парабола, радиус кривизны в разных точках имеет разное значение.

Естественные оси.

Сведем вектора $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ в точке M (рис. 1.4) и проведем через них плоскость.

Устремим точку M_1 к точке M. В предельном положении (при $\Delta s \to 0$) эта плоскость займет некоторое положение *I*, которое называется ***соприкасающейся плоскостью***.

Если траектория движения плоская, то она вся будет лежать в соприкасающейся плоскости. Плоскость *II* перпендикулярная касательной называется ***нормальной плоскостью***. Плоскость *III*, перпендикулярная плоскостям *I* и *II*, называется ***спрямляющей плоскостью***.

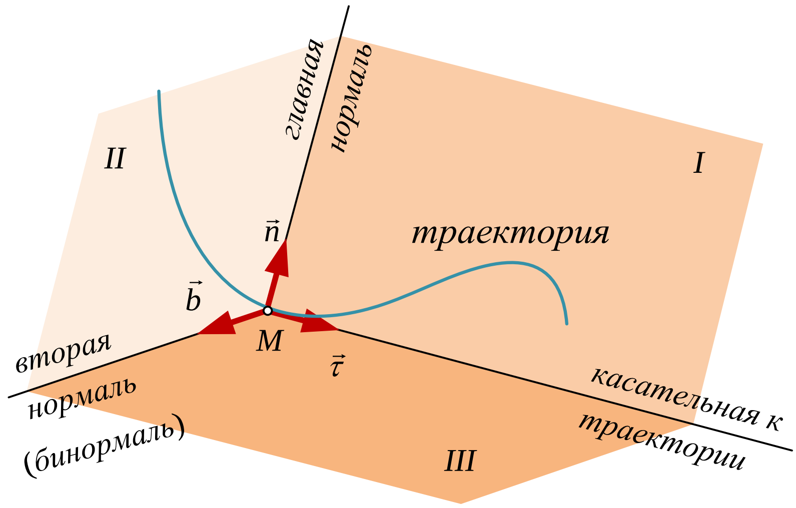


Рис. 1.5

Проведенная через точку M касательная к траектории является линией пересечения соприкасающейся и спрямляющей плоскостей. Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется ***нормалью (главной нормалью).*** Линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей называется ***второй нормалью (бинормалью)*.**

Касательная, нормаль и бинормаль вместе образуют ***естественные оси***. Естественные оси являются подвижными, они перемещаются по траектории С естественными осями связана правая тройка единичных векторов (ортов):

$\vec{\boldsymbol{\tau}}$ – ***единичный вектор касательной***,

$\vec{\boldsymbol{n}}$ – ***единичный вектор нормали***,

$\vec{\boldsymbol{b}}$ – ***единичный вектор бинормали***.

Вектор $\mathbf{d\vec{\tau}/ds}$.

Когда точка переместится по траектории на Δs, изменение единичного вектора касательной будет равно $\Delta\vec{\tau}$, поскольку из рис. 1.6 видно, что $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$.

Вектор $\Delta\tau$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$, поэтому, если точку M_1 устремить к точке M, то в предельном случае вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ окажется лежащим в соприкасающейся плоскости. Рассмотрим его свойства.

<u>Направление</u>. Продифференцируем по s равенство $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$.

Получим $2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$, откуда следует, что вектор $\vec{\tau}$ перпендикулярен вектору $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$. Из рис. 1.6 видно, что вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой.

Отсюда вывод: вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ **<u>всегда направлен по главной нормали</u>**.

<u>Модуль.</u> Треугольник, образованный векторами $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}$, $\Delta\vec{\tau}$ – равнобедренный (рис. 1.6), откуда видно, что

$$\frac{|\Delta\vec{\tau}|/2}{|\vec{\tau}|} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2} = sin\frac{\theta}{2},$$

где θ – угол смежности.

Тогда $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta s|} = lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\,sin\frac{\theta}{2}}{|\Delta s|}$.

Можно показать, что последний предел равен кривизне,

то есть $$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = k = \frac{1}{\rho}.$$

Учитывая, что вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ направлен по главной нормали получим, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}.$$

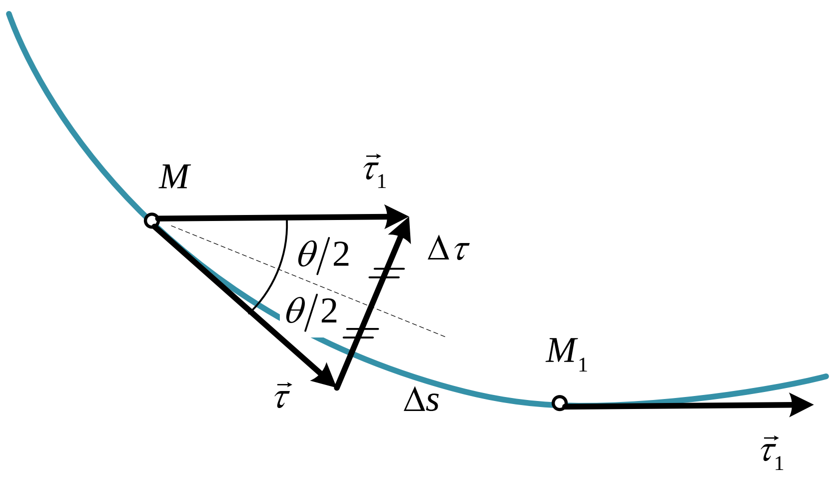


Рис. 1.6

1.6. Определение ускорения при естественном способе задания движения

Получим выражение для ускорения, учитывая, что по формуле (1.7) $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{ds}{dt} = v_\tau$ и что $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, преобразуем вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v_\tau \frac{1}{\rho}\vec{n}.$$

Поскольку $v_\tau^2 = v^2$, получим, что ускорение равно векторной сумме:

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.10)$$

Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории и определяется проекцией вектора ускорения на касательную, знак которой показывает в какую сторону дуговой координаты s оно направлено:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s} \qquad (1.11)$$

Проекцию a_τ называют алгебраическим значением касательного ускорения

Модуль касательного ускорения $|a_\tau|$ можно вычислить через производную от модуля скорости:

$$|a_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = |\dot{v}|.$$

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ направлено по главной нормали и его проекция на нормаль

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (1.12)$$

всегда положительна. По этой причине нормальное ускорение всегда направлено в сторону вогнутости траектории.

Проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю: $a_b = 0$.

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}. \qquad (1.13)$$

1.7. Различные формы движения точки

Прямолинейное движение и криволинейное движение

Траекторией точки при ***криволинейном движении*** является кривая, и ее кривизна имеет конечное значение, а радиус кривизны не равен нулю.

Траекторией при ***прямолинейном движении*** является прямая линия.

Радиус кривизны прямой линии бесконечен ($\rho = \infty$). Из (1.12) следует, что нормальное ускорение в этом случае равно нулю ($a_n = 0$).

Следовательно, при прямолинейном движении полное ускорение совпадает с касательным: $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ и $a = \left|\frac{dv}{dt}\right|$.

В этом случае скорость всегда направлена по одной линии − траектории, откуда вытекает вывод о физическом смысле касательного ускорения: **<u>касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости</u>.**

Равномерное движение и неравномерное движение

<u>Равномерным</u> называется такое движение точки, при котором модуль скорости все время остается постоянным: $v = const$. Тогда $|a_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = 0$ и полное ускорение совпадает с нормальным: $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Модуль скорости при этом не меняется, откуда вытекает вывод о физическом смысле нормального ускорения: **<u>нормальное ускорение характеризует изменение направления скорости</u>**.

При равномерном движении $ds/dt = v_\tau = const$. Интегрируя это равенство, получим уравнение равномерного движения:

$$s = v_\tau t + s_0. \qquad (1.14)$$

Это уравнение определяет величину дуговой координаты в любой момент времени.

Пройденный точкой путь σ определяется путем интегрирования модуля скорости: $\sigma = \int_0^t v\,dt$.

При равномерном движении $\sigma = vt$.

Равномерное прямолинейное движение

В этом случае равны нулю и касательное, и нормальное, и полное ускорения: $a_\tau = a_n = a = 0$, а скорость точки как вектор будет постоянна: $\vec{v} = \overrightarrow{const}$.

Ускоренное движение и замедленное движение

Ускоряется или замедляется движение точки можно определить по взаимному расположению векторов скорости и касательного ускорения (рис. 1.7). Если оба вектора направлены в одну сторону, то движение является ускоренным, а если в разные, − то замедленным.

При ускоренном движении произведение проекций этих векторов на касательную к траектории будет положительным ($v_\tau a_\tau > 0$), а при замедленном – отрицательным ($v_\tau a_\tau < 0$).

Другой способ определения является движение ускоренным или замедленным заключается в определении знака проекции вектора ускорения на направление вектора скорости $a_v = a\,cos\alpha$.

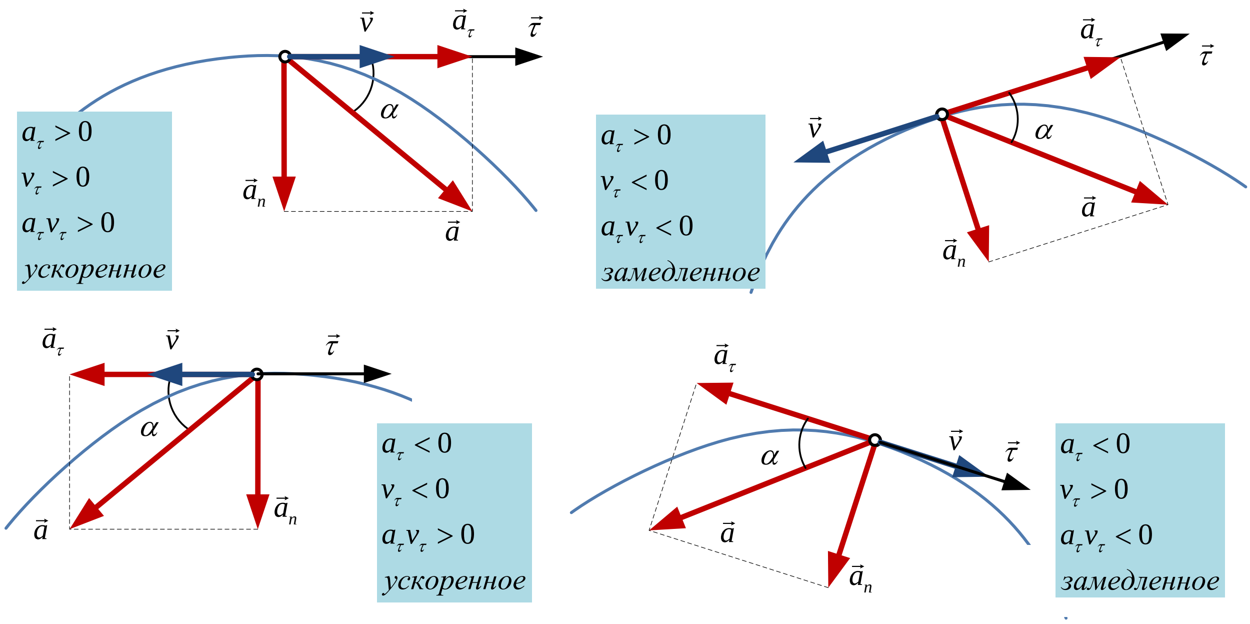


Рис. 1.7

Если вектора скорости и ускорения заданы аналитически выражениями

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}, \qquad \vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$

то проекцию скорости ускорения на направление скорости a_v можно найти с помощью скалярного умножения вектора ускорения $\vec{a}$ на направляющий единичный вектор скорости $\vec{e}_v$, который равен

$$\vec{e}_v = \frac{v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath}+v_z\vec{k}}{v}.$$

Тогда $$a_v = \vec{a}\cdot\vec{e}_v = \frac{(a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k})(v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath}+v_z\vec{k})}{v} = \frac{a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z}{v}$$

При $a_v > 0$ движение является ускоренным, а при $a_v < 0$ – замедленным.

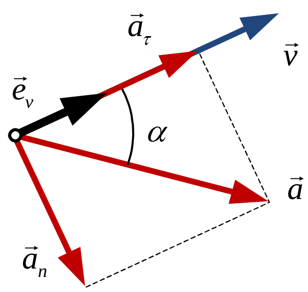


Рис. 1.8

Из рис. 1.8 видно, что $|a_\tau| = |a_v|$.

По этой причине для определения модуля касательного ускорения можно использовать формулу

$$|a_\tau| = \left|\frac{a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z}{v}\right| \qquad (1.15)$$

Равнопеременное движение

Равнопеременным называется движение точки, при котором модуль касательного ускорения все время остается постоянным: $a_\tau = const$.

Оно бывает ***равноускоренным*** или ***равнозамедленным***.

Дважды интегрируя равенство $\frac{dv_\tau}{dt} = a_\tau = const,$ получим выражения для скорости и дуговой координаты, то есть ***уравнения равнопеременного движения***:

$$v_\tau = a_\tau t + v_0; \qquad s = a_\tau \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0, \qquad (1.16)$$

где v_0 и s_0 – начальные значения величин v_τ и s.

ПРИМЕР

Найти траекторию точки М, радиус кривизны траектории, а также скорость и ускорение в момент времени $t = 0,$ если движение точки задано уравнениями $x = 5\,cos2t$ м, $y = 3\,sin2t$ м.

Решение

Уравнение траектории. Используем тригонометрическое тождество $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ и исключим время из уравнений движения:

$$(x/5)^2 + (y/3)^2 = 1.$$

Из этого уравнения следует, что траекторией точки является эллипс с полуосями 5 м и 3 м, центр которого находится в начале координат.

Положение точки при $t = 0$ определим через ее координаты: $x|_{t=0}$ =5 м, $y|_{t=0}$ =0, откуда следует, что точка M – крайняя точка эллипса (рис. 1.9).

Скорость точки найдем по ее проекциям с помощью формул [1.6]:

$$v_x = \dot{x} = 10\,sin2t, \quad v_y = \dot{y} = 6\,cos2t\,.$$

При $t = 0$ $v_x|_{t=0} = 0,$ $v_y\big|_{t=0} = 6$ м/с, откуда видно, что вектор скорости направлен по оси y.

Модуль скорости равен $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 6$ м/с.

Ускорение точки тоже определяем по проекциям по формулам (1.9):

$$a_x = \dot{v}_x = -20\,cos2t, \quad a_y = \dot{v}_y = -12\,sin2t.$$

При $t = 0$ имеем: $a_x|_{t=0} = -20$ м/с², $a_y\big|_{t=0} = 0,$ откуда видно, ускорение направлено против оси y.

Модуль ускорения равен $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_e}^2} = 20$ м/с².

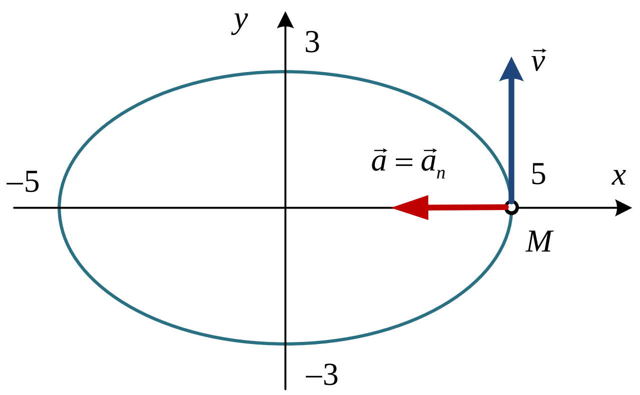


Рис. 1.9

Из рисунка видно, что ускорение перпендикулярно скорости, то есть является нормальным ускорением. Касательное ускорение в данный момент времени отсутствует. Убедимся в этом.

Касательное ускорение найдем по формуле (1.15):

$$|a_\tau| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right| = 0.$$

Нормальное ускорение вычислим как геометрическую разность между полным и касательным ускорениями:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = 20\ \text{м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории найдем из формулы (1.12).

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{6^2}{20} = 1.8\ \text{м}.$$

Задача решена

2. Тема: ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Поступательное движение твердого тела

Твердое тело состоит из бесконечного количества материальных точек, заполняющих некоторый объем без пустот. Если твердое тело движется, то вместе с ним движутся и все принадлежащие ему материальные точки.

Уравнения движения твердого тела должны позволять в любой момент времени определить положение и кинематические характеристики любой его точки.

Простейшими видами движения твердого тела являются ***поступательное и вращательное движения***.

***Поступательным движением* называется движение, при котором любой отрезок принадлежащий телу перемещается, оставаясь параллельным своему первоначальному направлению.**

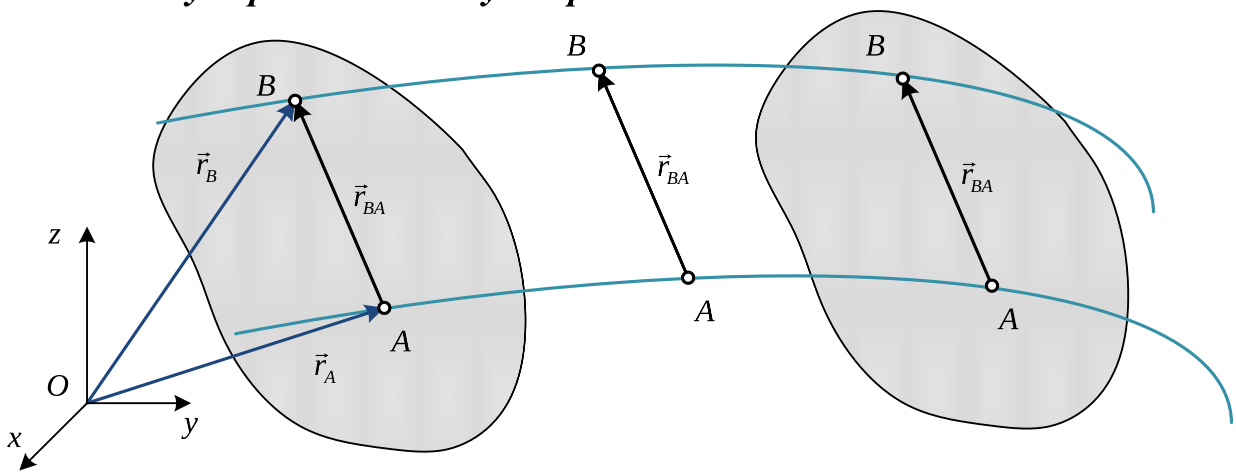


Рис. 2.1

ТЕОРЕМА

Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают тождественные, то есть совпадающие при наложении, траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.

Доказательство

Пусть тело движется поступательно.

Выберем две точки *A* и *B*, проведя соответствующие радиус-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$. Покажем также вектор $\vec{r}_{BA}$, проведенный из точки *A* в точку *B*.

При поступательном движении вектор $\vec{r}_{BA}$ не изменяет направления и не меняет длины (тело абсолютно твердое), то есть $\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{const}$.

В этом случае траектория точки B получается сдвигом траектории точки A на вектор $\vec{r}_{\text{BA}}$. Две траектории будут тождественны.

Из рисунка видно, что $\vec{r}_{\text{B}} = \vec{r}_A + \vec{r}_{\text{BA}}$.

Продифференцируем равенство: $\dot{\vec{r}}_{\text{B}} = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{\text{BA}}$.

Так как $\dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_B$ $\dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A$ $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{0}$, то $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.

То есть в любой момент времени скорости всех точек равны по величине и направлению.

Дифференцируя равенство еще раз, получим, что $\vec{a}_B = \vec{a}_A$. Ускорения всех точек тела также векторно равны.

Теорема доказана.

ВЫВОД:

Поступательное движение твердого тела полностью определяется движением какой-либо его точки, например центра тяжести. В этом случае имеют смысл выражения «скорость тела» или «ускорение тела». При других формах движения каждая точка тела имеет свою скорость и свое ускорение.

2.2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение тела, при котором все точки тела, лежащие на некоторой прямой, остаются неподвижными, называется ***вращательным движением***. При этом сама прямая называется ***осью вращения***.

Точки, не лежащие на оси, при движении описывают окружности в плоскостях, которые перпендикулярны к оси вращения.

Проведем через ось вращения полуплоскость, которая в начальный момент времени занимает положение Π. В процессе вращения эта плоскость (рис. 2.2) будет поворачиваться на угол φ, который меняется в зависимости от времени:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называется ***уравнением вращательного движения твердого тела***.

Знак угла φ определяется по правилу правого винта.

Угол измеряется в радианах, то есть $[\varphi] = \text{рад}$.

Основные кинематические характеристики такого движения - ***угловая скорость и угловое ускорение***.

Угловой скоростью называется лежащий на оси вращения вектор $\vec{\omega}$, проекция которого на эту ось равна производной по времени от угла поворота:

$$\omega_z = \dot{\varphi}. \tag{2.2}$$

Эта проекция называется ***алгебраическим значением угловой скорости***.

Модуль угловой скорости равен $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$, а его размерность $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

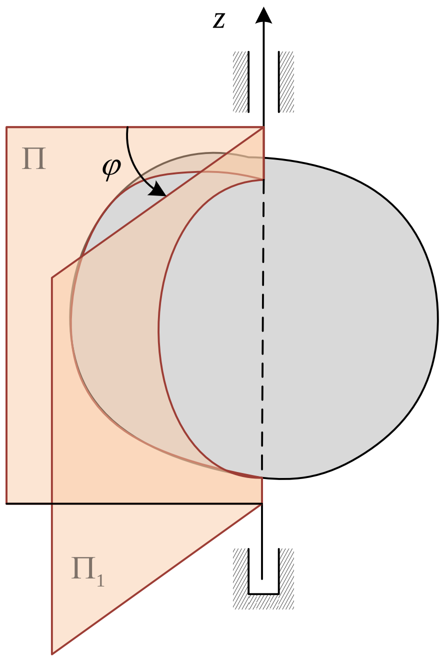


Рис. 2.2

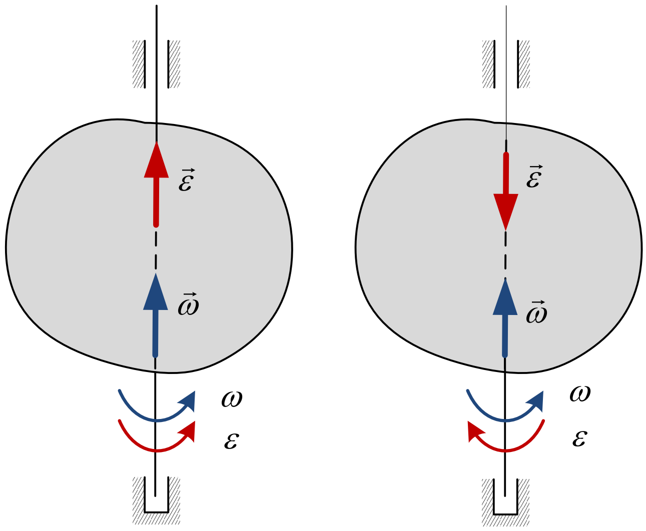


Рис. 2.3

При $\omega_z > 0$ угол поворота φ увеличивается, а при $\omega_z < 0$ уменьшается.

В технике угловую скорость часто измеряют в оборотах в минуту, обозначая ее буквой «n». Связь между n и ω дается формулой:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Угловым ускорением называется величина $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$, равная производной по времени от угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

При этом проекция вектора углового ускорения на ось z будет равна

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}. \qquad (2.3)$$

Она называется ***алгебраическим значением углового ускорения***.

Модуль углового ускорения равен $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$. Его размерность $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$.

Знаки углового ускорения и угловой скорости позволяют установить является вращение замедленным или ускоренным (рис. 2.3).

При $\omega_z \cdot \varepsilon_z > 0$ вращение является ускоренным (направления векторов совпадают), а при $\omega_z \cdot \varepsilon_z < 0$ – замедленным (направления векторов противоположны).

Угловая скорость и угловое ускорение характеризуют вращение тела, как целого. Скорости и ускорения отдельных точек тела при этом будут отличаться.

2.3. Равномерное и равнопеременное вращение

Равномерным называется такое вращение тела, при котором угловая скорость все время остается постоянной: $\omega_z = const$. Тогда $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0$.

При равномерном вращении $d\varphi/dt = \omega_z = const$. Интегрируя это равенство, получим ***уравнение равномерного вращения***:

$$\varphi = \omega_z t + \varphi_0.$$

Это уравнение определяет величину угла поворота в любой момент времени.

Равнопеременным называется вращение тела, при котором величина углового ускорения все время остается постоянной: $\varepsilon_z = const$. Оно бывает ***равноускоренным*** или ***равнозамедленным***.

Дважды интегрируя равенство $\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z = const,$ получим выражения для угловой скорости и угла поворота, то есть уравнения равнопеременного вращения:

$$\omega_z = \varepsilon_z t + \omega_0; \qquad \varphi = \frac{\varepsilon_z t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0,$$

где φ_0 и ω_0 – начальные значения угла поворота и угловой скорости.

2.4. Скорость точки вращающегося тела

Рассмотрим твердое тело, совершающее вращение вокруг оси *z* (рис. 2.4).

Точки, лежащие на оси вращения, при этом будут находиться в неподвижности.

Любая точка *M*, не лежащая на оси вращения, будет двигаться по окружности, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения *z*.

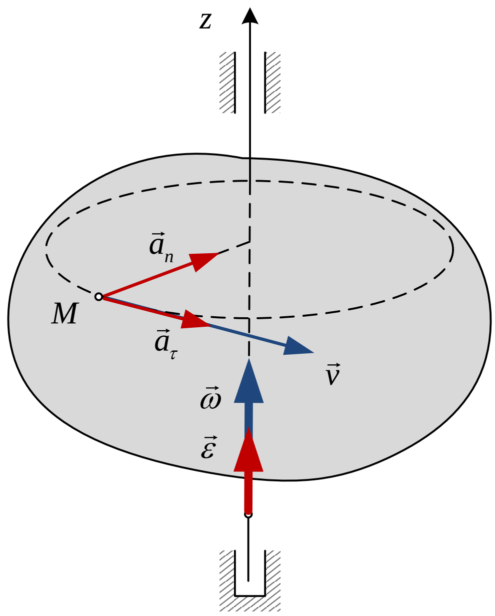


Рис. 2.4

Рассмотрим, как найти скорость и ускорение точки *M*, которая удалена от оси вращения на расстояние R, если для вращающегося тела известна угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ (рис. 2.4).

Найдем скорость точки М

Глядя навстречу оси вращения покажем траекторию точки М (рис. 2.5).

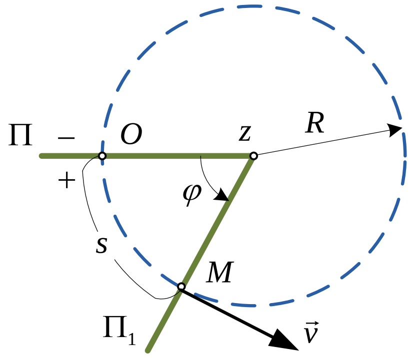


Рис. 2.5

За начало отсчета дуговой координаты s примем точку *O*, которая лежит в неподвижной полуплоскости *П*. Подвижную полуплоскость $П_1$ проведем через точку *M*.

Положительное направление отсчета дуговой координаты s пусть соответствует правилу правого винта.

Из геометрии известно соотношение между углом и длиной дуги: $s = \varphi R$.

Дифференцируя его по времени, найдем скорость точки:

$$v_\tau = \dot{s} = \dot{\varphi} R = \omega_z R.$$

Для модулей соответствующих скоростей получим:

$$v = \omega R \qquad (2.4)$$

Ясно, что **модули скоростей точек пропорциональны их расстояниям до оси вращения, а коэффициентом пропорциональности является модуль угловой скорости.**

2.5. Ускорение точки вращающегося тела

Определим ускорение точки М

Из кинематики точки известно, что полное ускорение является векторной суммой касательного и нормального ускорений (рис. 2.4):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau$ - касательное ускорение, которое при рассмотрении твердого тела называют ***вращательным ускорением***,

$\vec{a}_n$ - нормальное ускорение, которое при рассмотрении твердого тела называют ***центростремительным или осестремительным ускорением***.

В ряде книг вместо $\vec{a}_\tau$и $\vec{a}_n$ применяются обозначения $\vec{a}_{\text{ВР}}$ и $\vec{a}_{\text{ЦС}}$.

Найдем алгебраическое значение касательного ускорения:

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \frac{d}{dt}(\omega_z R) = \varepsilon_z R.$$

При этом модуль касательного ускорения:

$$a_\tau = \varepsilon\, R. \qquad (2.5)$$

Нормальное ускорение определяется по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R},$$

Откуда $$a_n = \omega^2 R. \qquad (2.6)$$

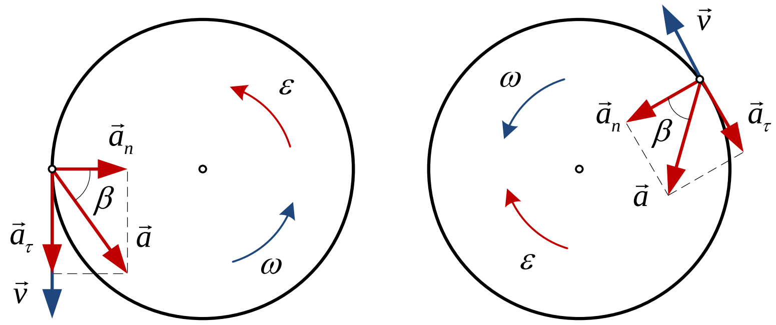


Рис. 2.6

2.6. <u>Скорость и ускорение точки вращающегося тела в векторной форме</u>

Формулы для определения скорости и ускорения точки вращающегося тела могут быть представлены в векторной форме.

Выберем на оси вращения произвольную точку *O* (рис. 2.7). Положение произвольной точки *M*, которая при вращении тела описывает окружность радиусом *R*, укажем с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки *O*.

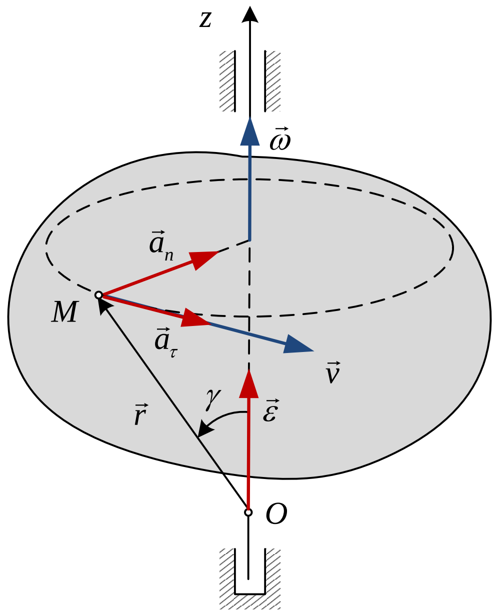


Рис. 2.7

Рассмотрим вектор $|\vec{\omega} \times \vec{r}|$.

По модулю этот вектор равен скорости, так как

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega\, r\, sin\gamma = \omega\, R = v.$$

Направление этого вектора тоже совпадает с направлением скорости.

Поэтому справедливо равенство

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) известна как формула Эйлера, которая позволяет определить скорость произвольной точки вращающегося тела.

Дифференцируя ее по времени найдем ускорение точки M:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Видно, что первое слагаемое является касательным (вращательным) ускорением:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \qquad (2.10)$$

а второе представляет собой нормальное (центростремительное) ускорение:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \qquad (2.11)$$

Полное ускорение равняется их векторной сумме.

2.7. Преобразование форм движения

В движущихся элементах машин часто происходят преобразования движений:

- преобразование одного вращательного движения в другое, а также
- преобразование вращательного движения в поступательное (и наоборот).

Преобразования эти происходят с помощью

- зубчатых или фрикционных передач (рис. 2.8,а, рис. 2.8,в)
- ременных или цепных передач (рис. 2.8,б)

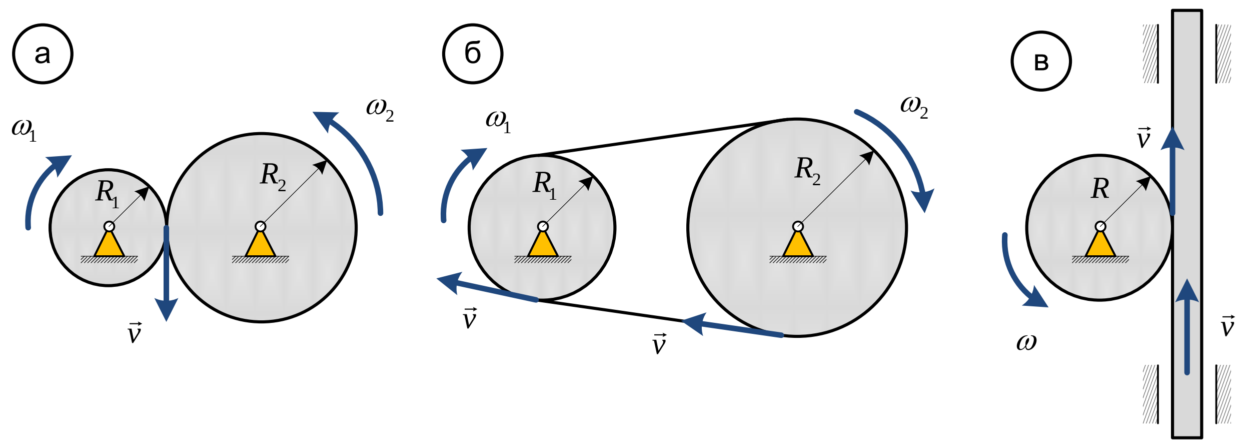


Рис. 2.8

Связи между скоростями двух различных движений называются ***кинематическими связями***.

Они устанавливаются из ***условия отсутствия проскальзывания между взаимодействующими телами***, то есть из условия равенства скоростей двух тел в точке их соприкосновения.

Так для рис. 2.8,а справедливым является соотношение

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \tag{2.12}$$

или

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{2.13}$$

которое получено из условия, что в точке соприкосновения $v_1 = v_2$ (скорость точки первого тела равна скорости точки второго тела) .

В соответствии с этим соотношением, угловые скорости обратно пропорциональны соответствующим радиусам.

В случае зубчатой передачи, в которой зацепляются зубчатые колеса с числом зубьев n_1 и n_2, такое же по смыслу равенство можно записать в виде:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Для передачи, показанной на рис. 2.8,в, имеем соотношение

$$v = \omega R.$$

2.8. Механические аналогии

Можно заметить, что формулы поступательного и вращательного движений с точки зрения математики совпадают, отличаясь только набором входящих в них символов.

Например, при замене кинематических характеристик поступательного движения на кинематические характеристики вращательного движения уравнения поступательного движения автоматически превращаются в формулы вращательного движения.

Убедимся в этом, составив следующую таблицу:

ТАБЛИЦА МЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ	
Поступательное движение тела (движение материальной точки)	***Вращательное движение тела***
Уравнение поступательного движения $s = s(t)$	Уравнение вращательного движения $\varphi = \varphi(t)$
Модуль скорости $v = \lvert\dot{s}\rvert$	Модуль угловой скорости $\omega = \lvert\dot{\varphi}\rvert$
Модуль касательного ускорения $a_\tau = \lvert\ddot{s}\rvert$	Модуль углового ускорения $\varepsilon = \lvert\ddot{\varphi}\rvert$
Равномерное движение $v_\tau = const, \quad s = v_\tau t + s_0$	Равномерное вращение $\omega_z = const, \quad \varphi = \omega_z t + \varphi_0$
Равнопеременное движение $a_\tau = const, \quad v_\tau = a_\tau t + v_0,$ $s = \frac{a_\tau t^2}{2} + v_0 t + s_0$	Равнопеременное вращение $\varepsilon_z = const, \quad \omega_z = \varepsilon_z t + \omega_0,$ $\varphi = \frac{\varepsilon_z t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$

.

3. Тема: ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. ЗАДАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Плоскопараллельным или плоским движением называется движение твердого тела, при котором его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Установим способ задания плоского движения.

Рассмотрим тело, совершающее плоское движение относительно неподвижной плоскости Oxy (рис.3.1). Выделим в теле два сечения: сечение S в плоскости Oxy и сечение S' в плоскости $O'x'y'$. Рассмотрим отрезок, соединяющий точки M и M', которые принадлежат соответственно сечениям S и S'. Пусть отрезок MM' будет перпендикулярен к выбранным сечениям.

В процессе движения точка M не будет выходить из плоскости Oxy, а точка M' – из плоскости $O'x'y'$. Сам отрезок в любой момент времени будет параллельным оси z, и его движение, следовательно, является поступательным.

Отсюда следует, что все точки отрезка MM' движутся совершенно одинаково. Тогда для описания движения отрезка MM' достаточно описать движение только одной точки , например, точки M. Следовательно, для описания движения всего тела достаточно описать движение только одного сечения, например, сечения S.

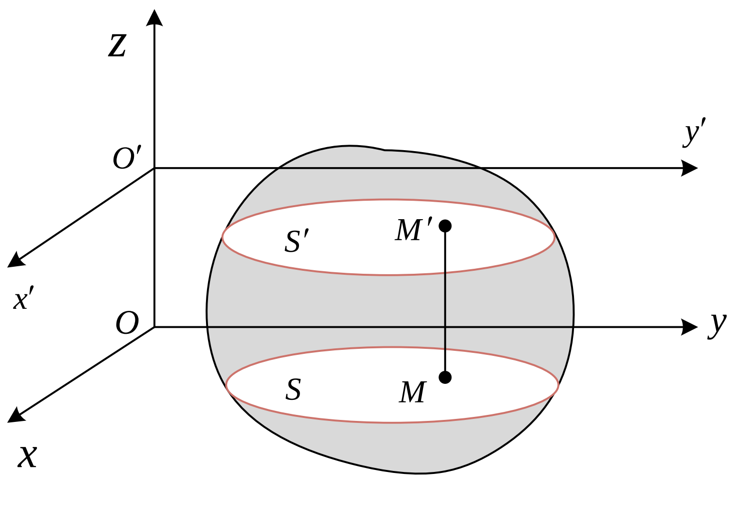


Рис. 3.1

Вывод: ***описание плоскопараллельного движения тела сводится к описанию движения одного сечения тела (плоской фигуры) относительно неподвижной плоскости.***

Рассмотрим движение плоской фигуры (рис. 3.2). Для этого выберем неподвижную систему координат Oxy. Выберем на плоской фигуре точку C, которую будем называть ***полюсом*** и проведем через нее систему координат, которая будет двигаться вместе с телом. Положение точки C в любой момент времени определяется координатами полюса. Само тело при этом может поворачиваться вокруг полюса. Величину этого поворота определяет угол φ (угол между осями x и x').

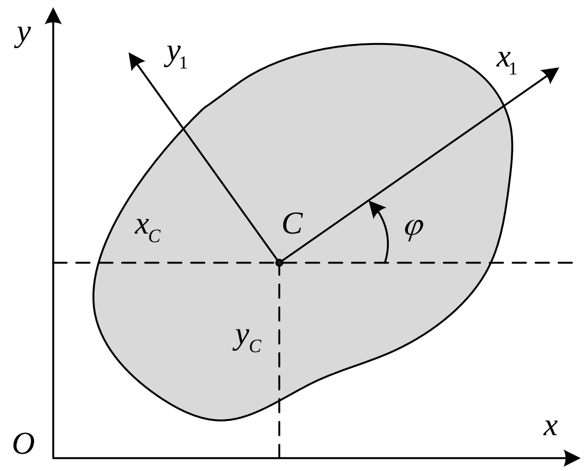


Рис.3.2

Координаты полюса и угол поворота при движении меняются, то есть зависят от времени. Соответствующие формулы называются ***уравнениями плоскопараллельного движения***:

$$\begin{cases} x_C = x_C(t) \\ y_C = y_C(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Из этих уравнений можно найти ***основные кинематические характеристики тела при плоском движении***:

- скорость $\vec{v}_C$ и ускорение $\vec{a}_C$ полюса,
- угловую скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ тела.

Важно заметить, что:

- плоское движение можно представить как совокупность двух движений: поступательного и вращательного,

- угол поворота (φ) и кинематические характристики вращательной части движения ($\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$) не зависят от выбора полюса,
- координаты полюса (x_C, y_C) и кинематические характеристики поступательной части движения ($\vec{v}_C$ и $\vec{a}_C$) зависят от выбора полюса.

Уравнения (3.1) позволяют найти скорость и ускорение полюса ($\vec{v}_C$ и $\vec{a}_C$). Ниже рассмотрим, как найти скорости и ускорения других точек тела.

3.2. Теорема о сложении скоростей при плоском движении

ТЕОРЕМА

Скорость точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса и скорости, которую эта точка имеет в относительном вращении этой фигуры вокруг полюса:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}. \tag{3.2}$$

Доказательство

Рассмотрим плоскую фигуру. Выберем на ней две точки *C* и *M*. Точку *C* будем считать полюсом (рис. 3.3). Покажем радиус-векторы $\vec{r}_C$ и $\vec{r}_M$, а также вектор $\vec{r}_{MC}$, проведенный из точки *C* к точке *M*.

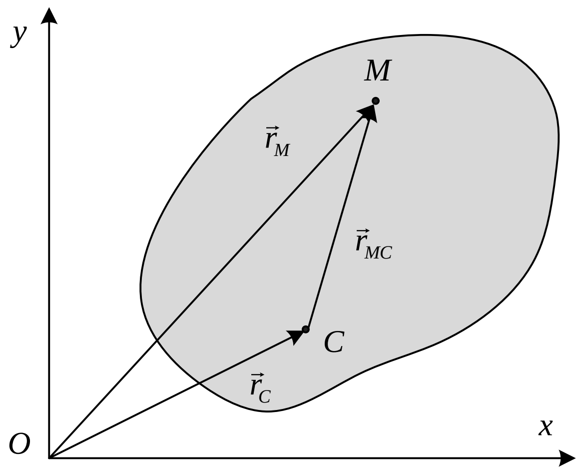


Рис. 3.3

Для любого момента времени справедливым будет равенство

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}_{MC}.$$

Дифференцируя равенство, получим:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC},$$

где $\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M$ - скорость точки *M*,

$\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C$ - скорость точки *C*,

$\vec{v}_{MC} = \dot{\vec{r}}_{MC}$ - скорость точки *M* в движении тела, происходящем относительно полюса *C*. Это движения является вращением, поскольку модуль вектора $r_{MC} = const.$

Теорема доказана.

Направление и модуль вектора $\vec{v}_{MC} = \dot{\vec{r}}_{MC}$ определяется по правилам, принятым для вращательного движения:

- скорость перпендикулярна отрезку МС и направлена в сторону вращения,
- модуль скорости вычисляется по ***формуле Эйлера***:

$$v_{MC} = \omega\, r_{MC} \tag{3.3}$$

Графически направление и модуль скорости $\vec{v}_M$ можно получить, построив параллелограмм на векторах $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{C}}$ и $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{MC}}$, как это показано на рис. 3.4,а.

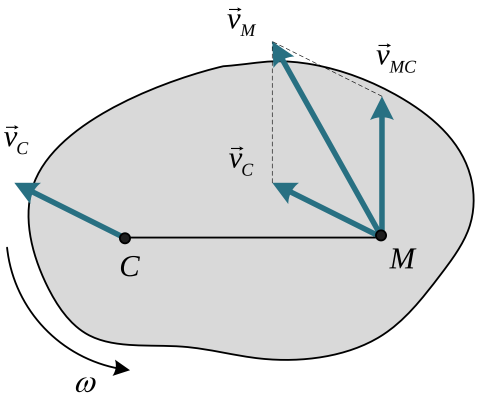


Рис. 3.4

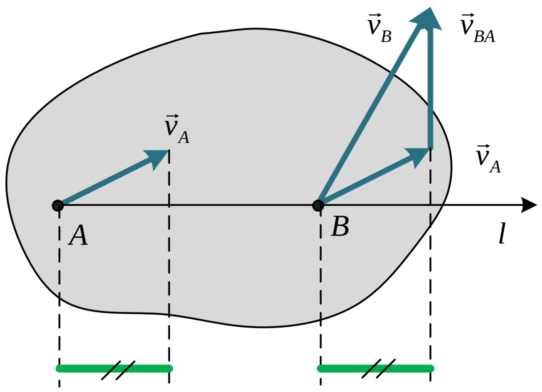


Рис. 3.5

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ:

Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой.

В этом легко убедиться. Возьмем на оси l две точки, выберем одну из них (пусть точку *A*) в качестве полюса, и запишем скорость другой точки с помощью теоремы о сложении скоростей:

$$\vec{v}_{\mathrm{B}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{BA}}.$$

Спроектировав это равенство на ось l, получим, что

$$[\vec{v}_{\mathrm{B}}]_l = [\vec{v}_{\mathrm{A}}]_l \ , \tag{3.4}$$

поскольку проекция скорости $\vec{v}_{BA}$ на ось l равна нулю (рис. 3.5).

3.3. Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю: $v_P = 0$.

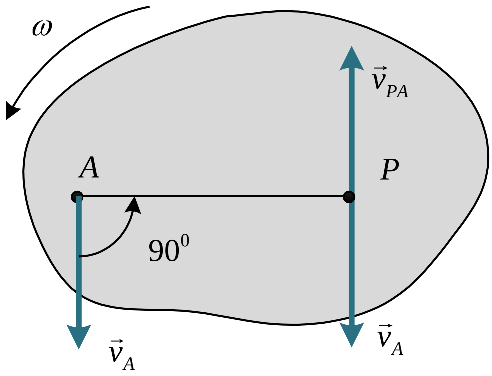


Рис. 3.6

Покажем, что такая точка всегда существует.

Пусть некоторое тело (рис. 3.6) вращается с угловой скоростью ω.

Рассмотрим произвольную точку A, скорость которой в данный момент равна $\vec{v}_A$. От направления этого вектора в сторону вращения фигуры отложим прямой угол и в полученном направлении проведем луч. На этом луче отложим отрезок $|AP| = \frac{v_A}{\omega}$.

Покажем, что полученная точка P будет иметь нулевую скорость.

Примем точку A за полюс. Тогда по теореме о сложении скоростей скорость точки P будет равна:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Заметим что:

1. Скорость $\vec{v}_{PA}$ перпендикулярна отрезку PA и направлена в сторону противоположную скорости $\vec{v}_A$;
2. Модули скоростей $\vec{v}_{PA}$ и $\vec{v}_A$ равны, поскольку $v_{PA} = \omega|PA| = \omega\frac{v_A}{\omega} = v_A$.

Отсюда ясно, что $\vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{0}$, и точка P действительно является мгновенным центром скоростей.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Положение МЦС на движущейся фигуре не является неизменным, в процессе движения его положение постоянно меняется:
2. МЦС может находиться вне тела;
3. Если угловая скорость тела в данный момент равна нулю, то МЦС располагается в бесконечности. В этом случае скорости всех точек тела одинаковы. Движение тела в данный момент времени называют мгновенно поступательным, в отличие от поступательного движения, при котором $\omega = 0$ в любой момент времени.

Выберем в качестве полюса МЦС.

Тогда скорость произвольной точки M будет равна:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}.$$

ВЫВОД:

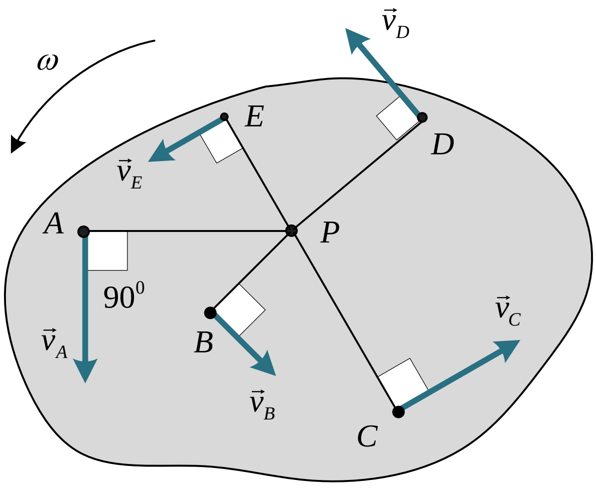
скорость произвольной точки М плоской фигуры равняется скорости, которую она имеет в относительном вращении вокруг МЦС.

Следовательно:

1. скорость $\vec{v}_M$ направлена перпендикулярно отрезку PM в сторону вращения;
2. модуль ее в соответствии с формулой (3.3) равен

$$v_M = \omega\, r_{MP}. \tag{3.5}$$

Картина распределения скоростей точек движущейся плоской фигуры имеет вид, показанный на рис. 3.7.



$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_D}{PD} = \frac{v_E}{PE}$$

Рис. 3.7

3.4. Нахождение мгновенного центра скоростей

Рассмотрим несколько простых приемов, позволяющих в процессе решения задач определить местоположение МЦС.

1. Известна угловая скорость фигуры ω и скорость любой ее точки $\vec{v}_A$ (рис. 3.8,а).

   Для определения МЦС надо:

   - Повернув вектор скорости $\vec{v}_A$, на 90^0 в сторону вращения тела, найти направление, на котором лежит МЦС;

- На найденном направлении отложить отрезок AP равный $AP = \frac{v_A}{\omega}$ и получить положение точки P, которая является мгновенным центром скоростей.

2. Известны направления скоростей двух точек плоской фигуры $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ и эти скорости не параллельны друг другу (рис. 3.8, б).
   Для определения МЦС надо из точек A и B восстановить перпендикуляры к направлению скоростей до точки их пересечения P, которая и будет точкой МЦС.
   При этом $$\frac{v_A}{|AP|} = \frac{v_B}{|BP|} = \omega.$$
3. Скорости двух точек плоской фигуры $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны друг другу и перпендикулярны отрезку AB.
   МЦС находится из условия, что модули скоростей точек A и B пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС:
   $$\frac{v_A}{|AP|} = \frac{v_B}{|BP|} = \omega.$$
   Возможны два варианта:
   - МЦС находится между точками A и B, когда скорости направлены в разные стороны (рис.3.8, в);
   - МЦС находится за пределами отрезка AB, когда скорости не равны и направлены в одну сторону (рис. 3.8, г).

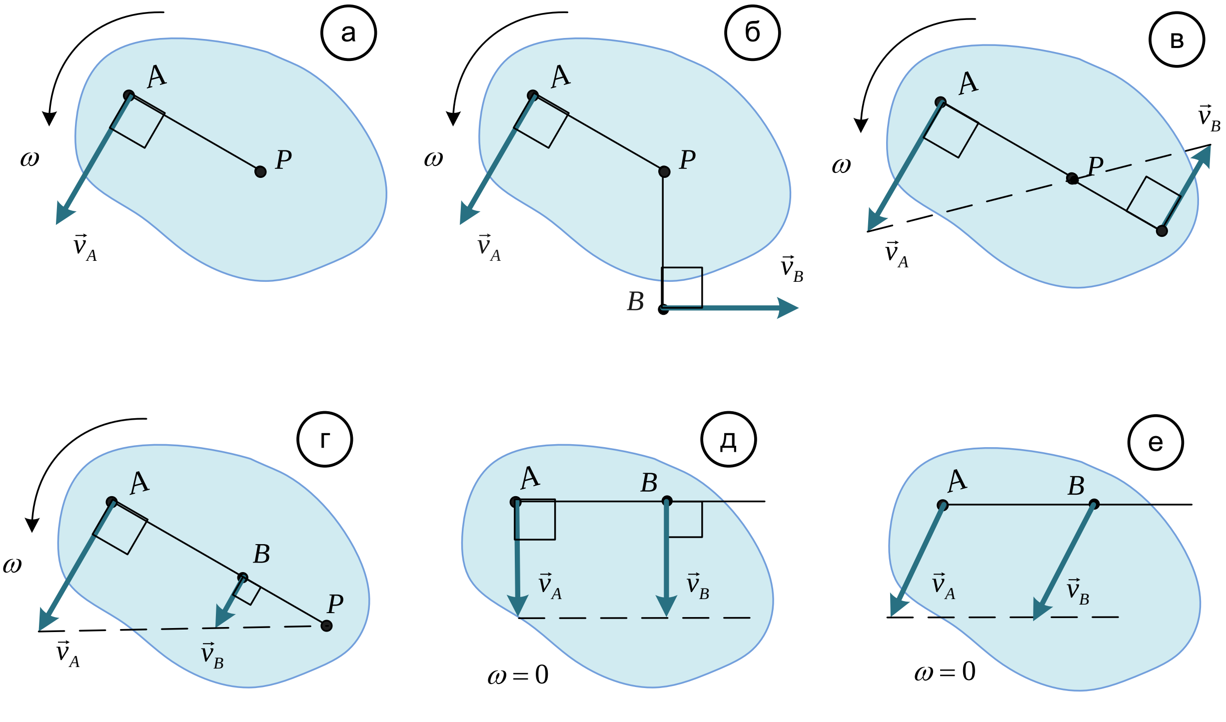


Рис. 3.8

4. Скорости двух точек плоской фигуры $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ равны по модулю и параллельны друг другу. При этом они могут быть перпендикулярны или неперпендикулярны отрезку AB.
   МЦС в этом случае располагается в бесконечности. Скорости всех точек тела одинаковы. Движение тела является мгновенно поступательным и $\omega = 0$.
5. При качении тела по неподвижной поверхности (Рис. 3.9) скорости соприкасающихся точек равны в том случае, если отсутствует проскальзывание между телами. Тогда МЦС находится в точке соприкосновения тела с поверхностью.

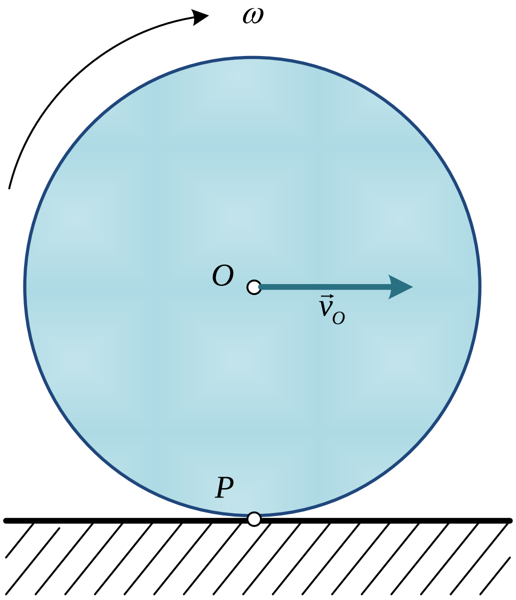


Рис. 3.9

3.5. Теорема о сложении ускорений

ТЕОРЕМА

Ускорение точки плоской фигуры равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения, которое имеет эта точка в относительном вращении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}. \tag{3.6}$$

Доказательство

По теореме о сложении скоростей имеем:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}.$$

Продифференцируем это равенство по времени. Получим:

$$\dot{\vec{v}}_M = \dot{\vec{v}}_C + \dot{\vec{v}}_{MC},$$

где $\dot{\vec{v}}_M$ – ускорение точки M, $\dot{\vec{v}}_C$ – ускорение точки C,

$\dot{\vec{v}}_{MC}$ – ускорение точки M в системе отсчета, связанной с точкой C, то есть ее ускорение во вращении фигуры вокруг точки C (вокруг полюса).

Теорема доказана.

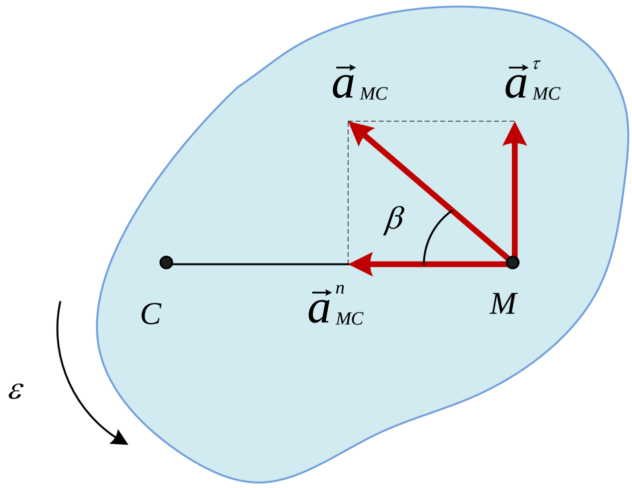


Рис. 3.10

Ускорение $\vec{a}_{MC}$ определяется по правилам вращательного движения, то есть равно сумме вращательного и центростремительного ускорений (рис. 3.10):

$$\vec{a}_{MC} = \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC}. \qquad (3.7)$$

Тогда полное ускорение точки *M* будет равно:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC}.$$

3.6. Скорости и ускорения точек колеса

ПРИМЕР

Пусть колесо радиусом *R*=1м катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Скорость центра колеса $v_0 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а ускорение центра колеса по направлению совпадает со скоростью и равно $a_0 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Определить скорости и ускорения точек *A, B, C, P,* расположенных на ободе колеса (рис. 3.11).

Решение

1. Определение скоростей

МЦС колеса – точка P. Относительно точки P колесо вращается по часовой стрелке. Соединим точку P с точками A, B, C и покажем направления скоростей в сторону вращения по перпендикуляру к отрезкам AP, BP, CP.

Угловую скорость колеса получим из формулы, которая связывает угловую скорость со скоростью центра колеса: $v_0 = \omega \cdot R$, из которой получается, что $\omega = \frac{v_0}{R} = 1\,\frac{1}{c}$.

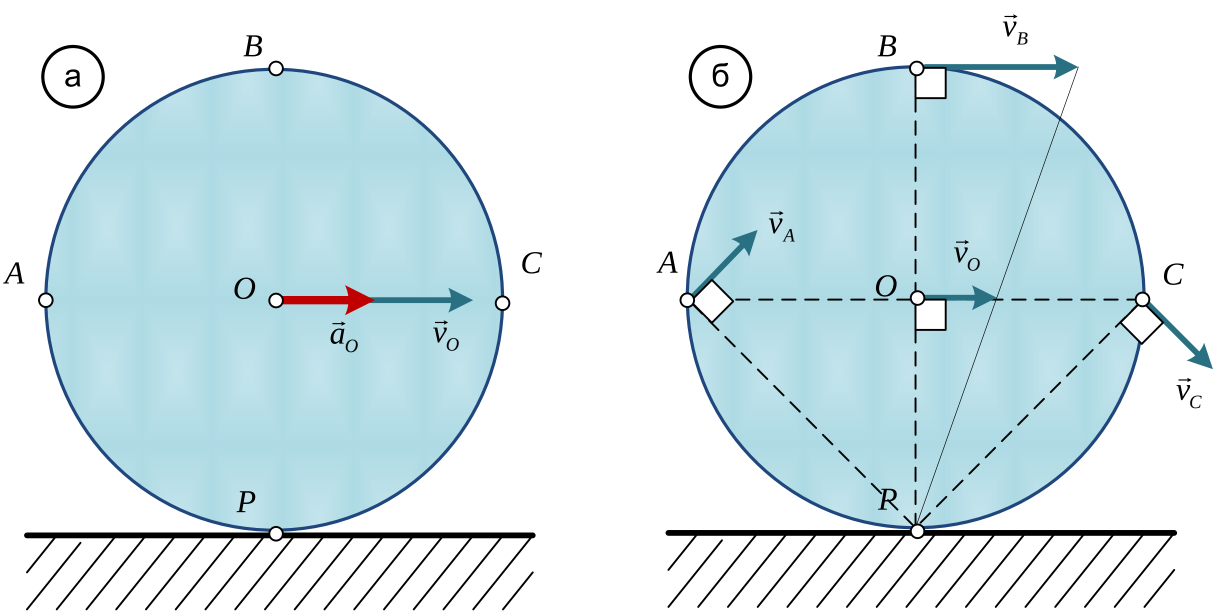


Рис. 3.11

Модули скоростей получим по формуле Эйлера $v_{MC} = \omega\, r_{MC}$ (3.3):

$$v_A = \omega \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad v_B = \omega \cdot 2R = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad v_C = \omega \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Определение ускорений

Расстояние от точки O до МЦС (точки P) всегда постоянно. Кроме того точка O движется прямолинейно. В этом случае угловое ускорение можно найти следующим образом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_O}{OP}\right) = \frac{\dot{v}_O}{R} = \frac{a_O}{R}.$$

То есть в данный момент времени

$$\varepsilon = \frac{a_O}{R} = \frac{1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1\text{м}} = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Выберем в качестве полюса центр колеса (точку O) и используем для определения ускорения произвольной точки M теорему о сложении ускорений:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO} = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{MO} + \vec{a}^{n}_{MO}.$$

Вращательные ускорения точек *A, B, C, P* во вращении колеса относительно полюса *O* по модулю будут одинаковы и направлены перпендикулярно к соответствующему радиусу в сторону углового ускорения:

$$a^{\tau}_{PO} = a^{\tau}_{AO} = a^{\tau}_{BO} = a^{\tau}_{CO} = \varepsilon \cdot R = 1\,\frac{1}{c^2} \cdot 1\text{м} = 1\,\frac{\text{м}}{c^2}.$$

Нормальные ускорения точек *A, B, C, P* во вращении колеса относительно полюса *O* по модулю будут одинаковы и направлены к центру колеса:

$$a^{n}_{PO} = a^{n}_{AO} = a^{n}_{BO} = a^{n}_{CO} = \omega^2 \cdot R = 1^2\,\frac{1}{c^2} \cdot 1\text{м} = 1\,\frac{\text{м}}{c^2}.$$

Суммируя в каждой точке три вектора ускорения по формуле

$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{MO} + \vec{a}^{n}_{MO}$, получим, что

$$a_P = a_C = 1\,\frac{\text{м}}{\text{c}^2} \quad \text{и} \quad a_{\text{A}} = a_{\text{B}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,\frac{\text{м}}{\text{c}^2}.$$

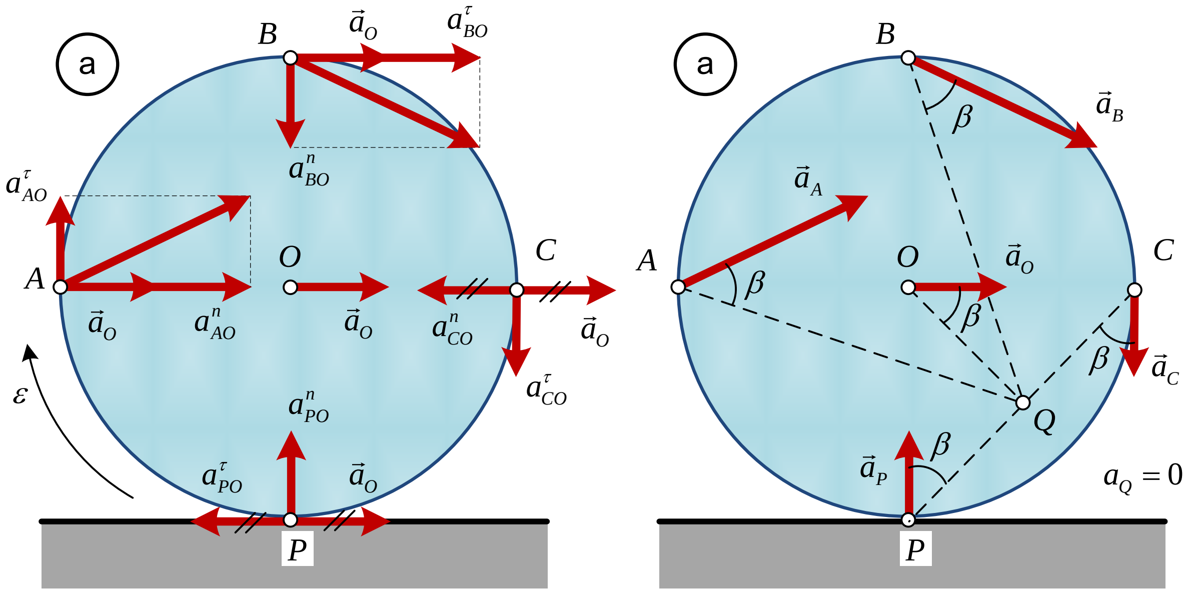


Рис. 3.12

Если на середине отрезка *CP* отметить точку *Q*, то можно заметить, что:

- Ускорения в точках, расположенных на одинаковых расстояниях от точки *Q* (точках *P, O, C*) одинаковы по величине;
- Ускорения в точках, расположенных на разных расстояниях от точки Q пропорциональны расстояниям до этих точек $\left(\frac{AQ}{OQ} = \frac{a_A}{a_O} = \sqrt{5}\right)$;

- Ускорения в точках A, B, C, P направлены таким образом, что составляют одинаковый угол β с отрезками, соединяющими эти точки с точкой Q;
- Ускорение в самой точке Q при этом равно нулю.

Точка тела Q, ускорение которой в данный момент равно нулю, называется ***мгновенным центром ускорений***.

Существуют правила, по которым всегда можно найти положение мгновенного центра ускорений (МЦУ), после чего определение ускорение других точек тела сильно упрощается.

4. Тема: СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

4.1 ПОНЯТИЕ О СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ

Сложным движением называют такое движение точки, которое рассматривается одновременно в двух системах отсчета.

Примером является движение человека внутри движущегося вагона, в то время как вагон проезжает мимо неподвижной платформы. Движение человека можно рассматривать в системе координат, связанной с вагоном, или в системе координат, связанной с платформой (то есть с Землей).

При описании сложного движения одну из систем отсчета считают ***неподвижной или основной*** (система $O_1x_1y_1$ на рис. 4.1) . Другая система отсчета рассматривается как ***подвижная*** (система Oxy на рис. 4.1).

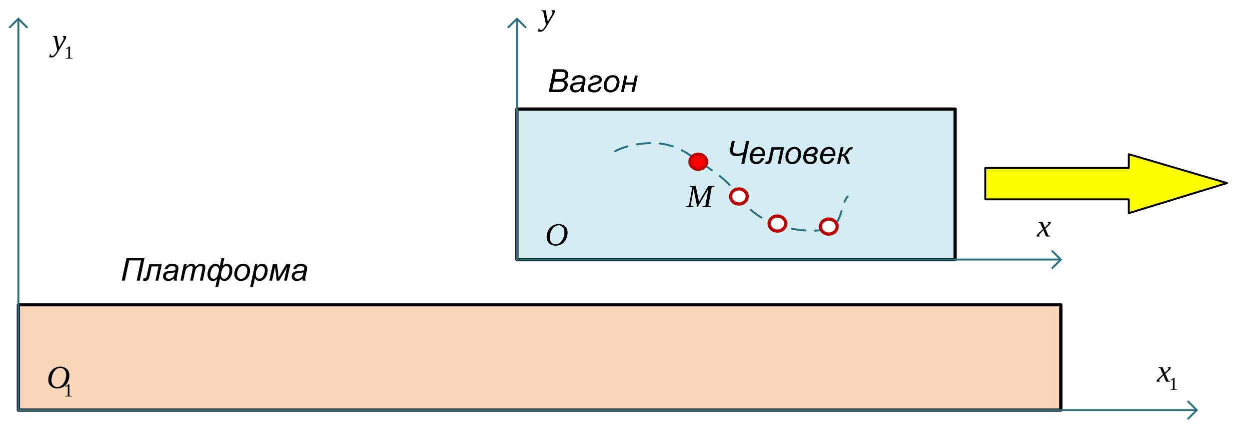


Рис. 4.1

В таких случаях можно выделить три вида движения: ***абсолютное, относительное и переносное***.

1. ***Абсолютным движением*** называется движение точки по отношению к неподвижной системе координат (движение человека по отношению к платформе). Характеристиками абсолютного движения являются ***абсолютная скорость*** $\vec{v}_a$ и ***абсолютное ускорение*** $\vec{a}_a$, то есть скорость и ускорение точки относительно неподвижной системы координат (относительно платформы). Они обозначаются индексом «а».
2. ***Относительным движением*** называется движение точки по отношению к подвижной системе координат (движение человека относительно вагона). Характеристиками относительного движения являются ***относительная скорость*** $\vec{v}_r$ и ***относительное ускорение*** $\vec{a}_r$, то есть скорость и ускорение точки относительно подвижной системы координат (относительно вагона). Они обозначаются индексом «*r*».
3. ***Переносным движением*** называется движение подвижной системы координат относительно неподвижной. В подвижной системе координат положение точки М все время меняется. ***Переносной скоростью*** $\vec{v}_e$ и ***переносным ускорением*** $\vec{a}_e$ называется скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Они обозначаются индексом «*e*».

ПРИМЕР

Башенный кран переносит груз *P* (рис. 4.2,а). При этом он вращается вокруг своей оси (угол φ меняется), а тележка крана двигается по его стреле (расстояние *R* меняется). Высота груза *P* остается постоянной.

Высота груза не меняется и, следовательно, груз *P* двигается в горизонтальной плоскости (рис. 4.2, б), расположенной на высоте *H*.

Будем считать систему координат, связанную с Землей, абсолютной, а систему отсчета, связанную с краном, относительной. Тогда движение груза относительно крана является относительным движением, движение груза относительно Земли является абсолютным движением, а переносным движением является вращение крана.

Относительная скорость груза $\vec{v}_r$ направлена по радиусу от оси крана.

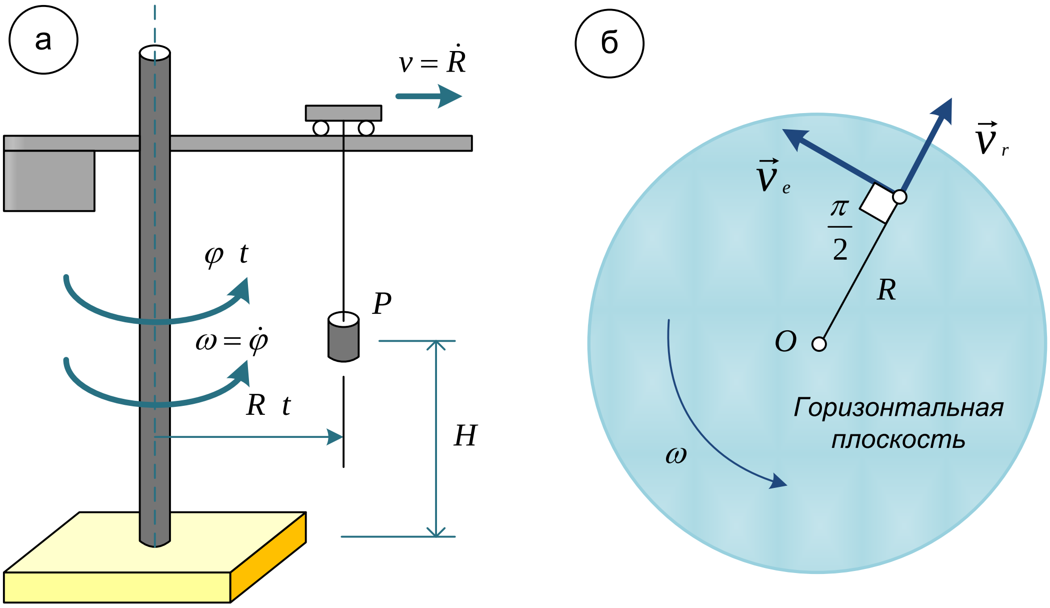


Рис. 4.2

Переносной скоростью является скорость, которую точка, в которой находится груз, имеет в результате поворота крана. Она направлена в сторону вращения крана перепендикулярно к отрезку ОР и по модулю равна

$$v_e = \omega \cdot OP = \omega R.$$

Абсолютная скорость груза P пока неизвестна.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА заключается в том, чтобы по известным характеристикам относительного и переносного движений находить кинематические характеристики абсолютного движения.

4.2. Сложение скоростей при сложном движении

ТЕОРЕМА

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

Доказательство

Пусть $Oxyz$– подвижная система отсчета с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, в которой движущаяся точка M указана радиус-вектором $\vec{r}$ и имеет координаты x, y, z.

Пусть $Ox_1y_1z_1$–неподвижная система отсчета, в которой положение точек M и O определяется векторами $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0$.

Ясно, что $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, так как $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}$ и $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

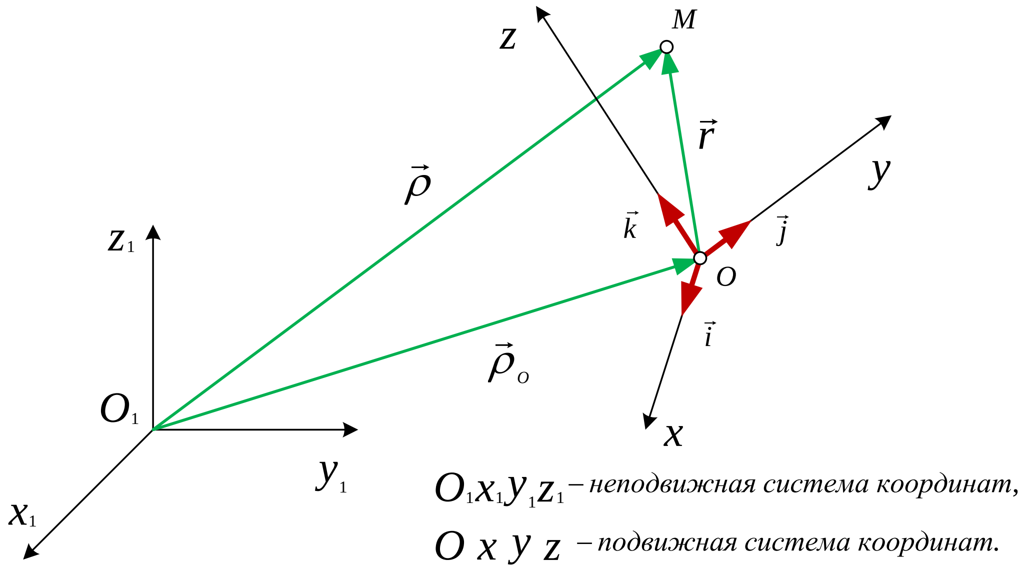


Рис. 4.3

Относительная скорость $\vec{v}_r$ (скорость точки относительно подвижной системы координат) получается дифференцированием по времени вектора $\vec{r}$ в предположении, что орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ неподвижны $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = const)$, а координаты x, y, z меняются:

$$\vec{v}_r = \dot{\vec{r}}\Big|_{\substack{\vec{i}=const\\ \vec{j}=const\\ \vec{k}=const}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \qquad \text{(a)}$$

Переносная скорость $\vec{v}_e$ (скорость, которую точка приобретает в результате движения подвижной системы координат относительно неподвижной) получается дифференцированием по времени вектора $\vec{\rho}$, в ходе которого учитывается, что при переносном движении изменение координат точки происходит только за счет изменения вектора $\vec{\rho}_O$, а также за счет поворота ортов подвижной системы координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координаты точки M в подвижной системе координат x, y, z не изменяются (точка двигается вместе с системой).

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{\rho}}\Big|_{\substack{x=const\\ y=const\\ z=const}} = \dot{\vec{\rho}}_O + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}. \qquad \text{(б)}$$

Абсолютная скорость $\vec{v}_a$ (скорость точки относительно неподвижной системы координат) определяется как производная по времени от радиус-вектора $\vec{\rho}$, в ходе которого учитывается, что все, входящие в выражение величины являются переменными.

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}. \qquad \text{(в)}$$

Сравнивая формулы (а), (б) и (в) видим, что справедливо равенство

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \qquad (4.1)$$

Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ:

В относительном, переносном и абсолютном движении точка описывает разные траектории, и соответствующие скорости всегда направлены по касательным к этим траекториям.

Так, в примере о подъемном кране, траектория относительного движения груза есть прямая линия (рис. 4.4,а), траектория точки в переносном движении есть окружность (рис. 4.4,б), а траектория абсолютного движения есть расширяющаяся спираль (рис. 4.4,в).

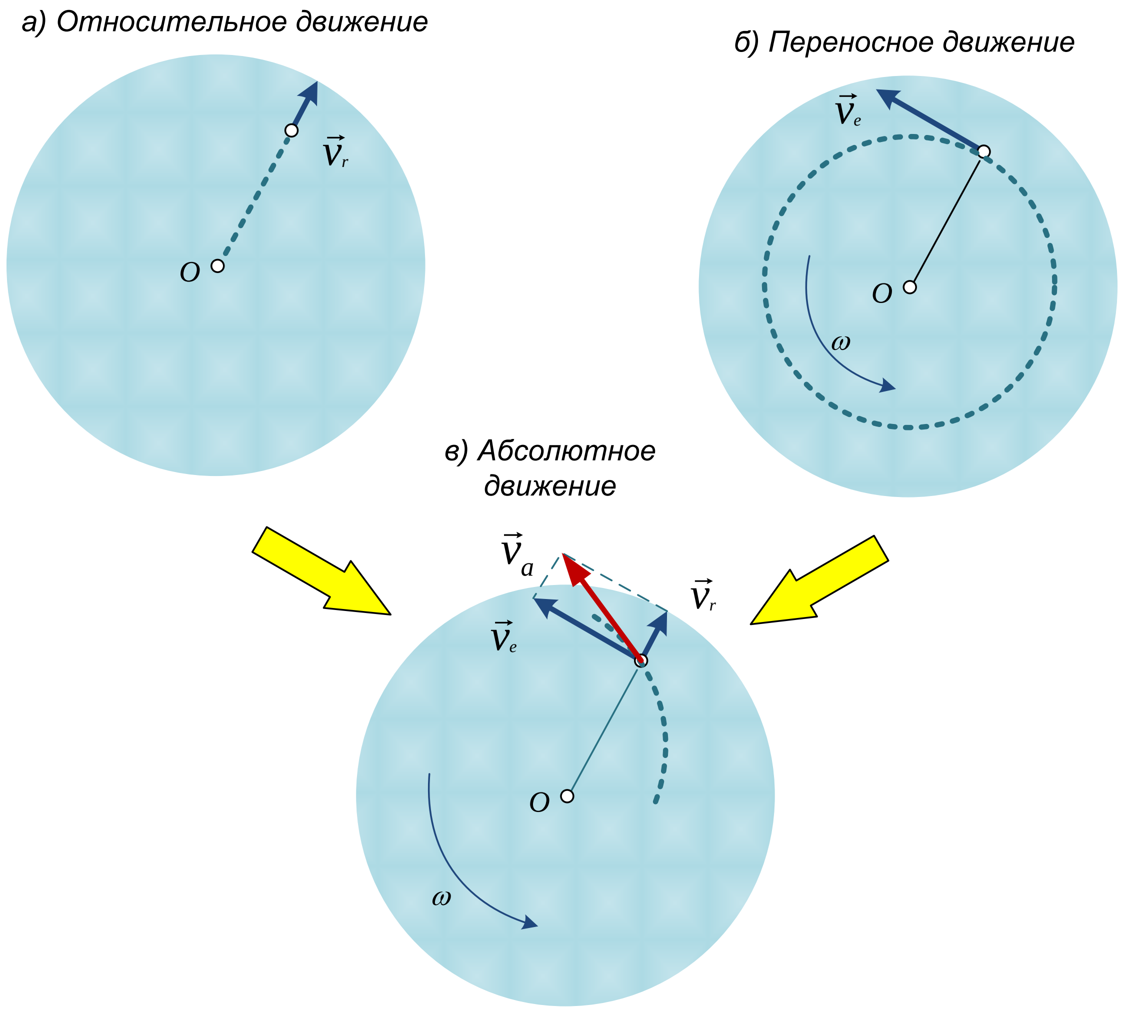


Рис. 4.4

4.3. Теорема Кориолиса о сложении ускорений

Рассмотрим, как определяются при сложном движении точки ускорения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ (ускорение точки относительно подвижной системы координат) получается дифференцированием по времени вектора относительной скорости $\vec{v}_r$.

При этом предполагается, что орты $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ неподвижны $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} = const)$, а координаты x, y, z меняются:

$$\vec{a}_r = \dot{\vec{v}_r}\Big|_{\substack{\vec{\imath}=const\\ \vec{\jmath}=const\\ \vec{k}=const}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}. \qquad \text{(а)}$$

<u>Переносное ускорение</u> $\vec{a}_e$ (ускорение, которое точка приобретает в результате движения подвижной системы координат относительно неподвижной) получается дифференцированием по времени вектора $\vec{v}_e$.

При этом учитывается, что при переносном движении изменение координат точки просходит только за счет изменения вектора $\vec{\rho}_O$, а также за счет поворота ортов подвижной системы координат $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Координаты точки M в подвижной системе координат x, y, z при этом не изменяются (точка двигается вместе с системой).

$$\vec{a}_e = \dot{\vec{v}_e}\Big|_{\substack{x=const\\ y=const\\ z=const}} = \ddot{\vec{\rho}}_O + x\ddot{\vec{\imath}} + y\ddot{\vec{\jmath}} + z\ddot{\vec{k}}. \qquad \text{(б)}$$

<u>Абсолютное ускорение</u> $\vec{a}_a$ (ускорение точки относительно неподвижной системы координат) определяется как производная по времени от вектора абсолютной скорости $\vec{v}_a$.

При этом учитывается, что все, входящие в выражение величины являются переменными.

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}_a} = \ddot{\vec{\rho}}_O + \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \underline{\underline{2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right)}} + x\ddot{\vec{\imath}} + y\ddot{\vec{\jmath}} + z\ddot{\vec{k}}. \qquad \text{(в)}$$

Сравнивая формулы (а), (б) и (в) видим, что в выражение для абсолютного ускорения кроме переносного и относительного ускорений входит еще одна группа слагаемых, которая представляет собой ускорение называемое ***<u>ускорением Кориолиса</u>***:

$$\vec{a}_{cor} = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right).$$

Таким образом, справедливой является следующая теорема:

ТЕОРЕМА

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме относительного и переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor}. \qquad (4.2)$$

4.4. Вычисление ускорения Кориолиса

Сложное движение точки впервые описал французский механик ***Гюстав Гаспар Кориолис*** *(1792-1843). Дополнительное ускорение, которое Кориолис получил теоретически, позже было обнаружено экспериментально и получило его имя.*

Ускорение Кориолиса можно вычислять более просто, если использовать формулы Пуассона, которые показывают, как изменяются единичные векторы системы координат (орты), в то время как сама система координат поворачивается относительно некоторой оси u (рис 4.5).

Формулы Пуассона имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \times \vec{\imath} \\ \dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \times \vec{\jmath} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} \end{cases}.$$

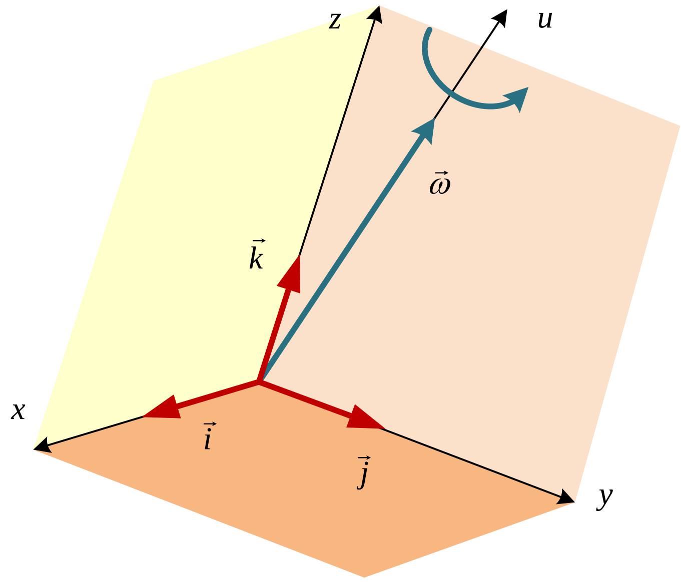


Рис. 4.5

Если учесть, что угловая скорость единичных векторов фактически представляет собой угловую скорость переносного движения, то можно записать:

$$\vec{a}_{cor} = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right) = 2\vec{\omega}_e \times \left(\dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}\right).$$

Поскольку $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_r$ - относительная скорость, то

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \qquad (5.3)$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки. Модуль кориолисова ускорения при этом равен

$$a_{cor} = 2\,\omega_e\, v_r\, sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r) \qquad (5.4)$$

Из этой формулы видно, что кориолисово ускорение может быть равно нулю в трех случаях:

1. Когда переносное движение является поступательным (угловая скорость переносного движения равна нулю $\vec{\omega}_e = 0$;
2. Когда отсутствует относительное движение (относительная скорость точки равна нулю$\vec{v}_r = 0$;
3. Когда векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ праллельны друг другу, то есть кгда точка движется вдоль оси вращения.

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу Жуковского.

<u>Правило Жуковского</u>

Чтобы найти направление кориолисова ускорения надо:

1. ***спроектировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения;***
2. ***повернуть полученную проекцию на 90^0 по ходу вращения.***

ПРИМЕР

Круглая платформа (рис. 4.6) вращается вокруг точки *O* в соответствии с уравнением $\varphi = 0.1t^2$ рад. По радиусу платформы двигается человек (точка *M*) в соответствии с уравнением $s = |OM| = 0.2t^2$ м.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t = 5\ c$.

Решение

Неподвижную систему координат свяжем с Землей, а подвижную – с платформой. Тогда вращение платформы относительно Земли будет переносным движением, а перемещение человека относительно платформы – относительным движением. Абсолютным движением будет движение человека (точки *M*) относительно Земли.

1. Положение точки *M* в рассматриваемый момент времени определим, вычислив расстояние от нее до оси вращения:

При t=5c получаем $|OM| = s|_{t=5c} = 0.2 \cdot 5^2 = 5$м.

2. Определяем скорость точки

Относительная скорость точки равна $v_r = \dot{s}|_{t=5c} = 0.4t|_{t=5c} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Угловая скорость вращения платформы – это угловая скорость переносного движения $\omega_e = \dot{\varphi}|_{t=5c} = 0.2t|_{t=5c} = 1\frac{1}{\text{с}}$.

Переносная скорость точки – это скорость той точки, в которой в данное время находится человек. Она направлена перпендикулярно к радиусу платформы и по модулю равна $v_e = \omega_e|OM| = 1\frac{1}{\text{с}} \cdot 5\text{м} = 5\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Абсолютная скорость равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

По модулю абсолютная скорость равна

$$v_a = \sqrt{{v_r}^2 + {v_e}^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5.4\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

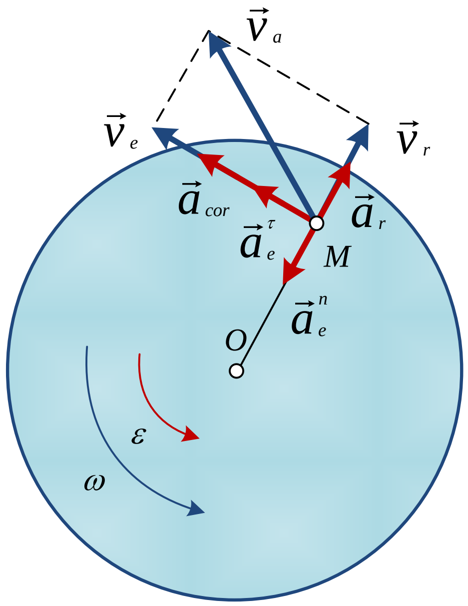


Рис. 4.6

3. Определяем ускорение точки.

Относительное движение точки является прямолинейным, поэтому ее относительное ускорение – это ускорение касательное:

$$a_r = \dot{v}_r = 0.4\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Переносное ускорение точки – это ускорение той точки платформы, в которой в данный момент времени находится человек. Оно складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n.$$

Вращательное ускорение по модулю равно

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot |\text{OM}| = 0.2\frac{1}{\text{с}^2} \cdot 5\text{м} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d(0.2t)}{dt} = 0.2\frac{1}{c^2}.$

Центростремительное ускорение по модулю равно

$$a_e^n = \omega^2 \cdot |OM| = 1^2 \cdot 5 = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

Модуль кориолисова ускорения равен

$$a_{cor} = 2\,\omega_e\,v_r\,sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r) = 2\,\omega_e\,v_r\,sin\,90^0 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для определения направления кориолисова ускорения используем правило Жуковского, повернув вектор относительной скорости на 90^0 по ходу вращения. Векторно суммируем все ускорения и находим абсолютное ускорение точки:

$$a_a = \sqrt{(a_{cor} + a_e^\tau)^2 + (a_e^n - a_r)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (5-0.4)^2} = 6.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: Скорость и ускорение точки равны $v_a = 5.4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a_a = 6.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

4.5. Кориолисово ускорение при движении тел по поверхности Земли

Любое тело, движущееся относительно поверхности Земли, получает кориолисово ускорение.

Поскольку модуль угловой скорости Земли очень мал, результат этого ускорения можно наблюдать либо при очень больших скоростях движения (движение пуль, снарядов, ракет), либо при длительном действии сил (движение рек, поездов).

Учитывая, что вектор угловой скорости Земли направлен от южного полюса к северному, легко определить направление кориолисова ускорения в зависимости от направления движения тела, учитывая, что

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

1. При движении тела на север кориолисово ускорение направлено на запад.
2. При движении тела на юг кориолисово ускорение направлено на восток.
3. При движении тела на восток кориолисово ускорение направлено от земной оси.
4. При движении тела на запад кориолисово ускорение направлено к земной оси.

Обобщая можно сказать, что в северном полушарии кориолисово ускорение направлено влево по ходу движения (рис. 4.6).

Примеры действия кориолисова ускорения в северном полушарии:

- отклонение Гольфстрима и других течений,
- отклонение воздушных потоков,

- закручивание против часовой стрелки циклонов,
- реки подмывают правый берег,
- правый рельс на железных дорогах изнашивается быстрее.

В южном полушарии кориолисово ускорение имеет обратное направление, поэтому перечисленные эффекты проявляются зеркально по отношению к северному полушарию.

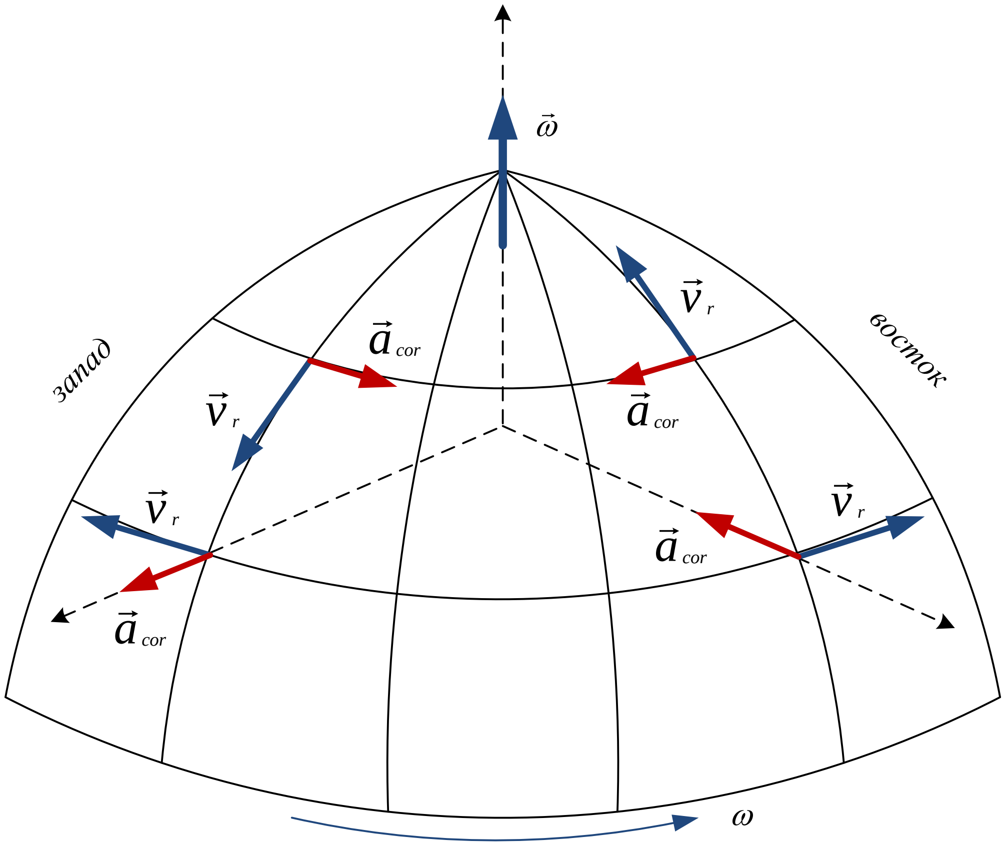


Рис. 4.7