ЛЕКЦИЯ 5

Дискретные случайные величины

§ 5.1. Понятие случайной величины

Когда подбрасывается игральная кость, то появляются случайные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом определить, какое именно появится число, заранее невозможно.

Точно также невозможно определить, сколько человек зайдёт в течение часа в ближайший магазин, или сколько вызовов в течение этого часа поступит на городскую станцию скорой помощи[1].

Но при всей случайности исходов, образующих полную группу этих опытов-наблюдений, с ними связана одна закономерность. Каждый из этих опытов определяет (одну или несколько) случайную величину, принимающую числовые значения, связанные с исходами, каждому из которых соответствует определённая вероятность.

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – пространство элементарных событий некоторого опыта, а $X = \{x\}$ – конечное (или сравнимое с множеством натуральных чисел[2]) числовое множество.

Определение 5.1. *Функция, отображающая пространство Ω в множество X, называется дискретной случайной величиной.*

Определённая таким образом дискретная случайная величина обозначается $X = X(\omega)$.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Опыт с подбрасыванием игральной кости. Пространство Ω определяют события выпало «1» очко, выпали «2» очка, ..., выпали «6» очков. Если задать множество X, состоящее из первых 6 чисел натурального ряда, то можно определить случайную величину $X = X(\omega)$ как «число очков, выпавших при однократном подбрасывании кости».
2. Опыт с магазином. Событием ω является посещение магазина очередным покупателем. Каждому такому событию можно поставить в соответствие число покупателей, оказавшихся вместе в магазине в данный час. Таким образом, случайная величина $Y = Y(\omega)$ – «число покупателей в магазине в течение часа».
3. Опыт с последовательным подбрасыванием n монет. Событиями являются выпадение «герба» или «решётки». Можно определить несколько случайных величин на множестве этих событий: случайная величина

[1] Конечно, хотелось бы, чтобы их вообще не было, но об этом можно только мечтать.

[2] Такое множество называется *счётным множеством*, то есть множеством, каждому элементу которого можно единственным образом поставить во взаимно однозначное соответствие натуральное число.

$Z = Z(\omega)$ – «число выпадений *герба*», случайная величина $T = T(\omega)$ – «число выпадений *решётки*», случайная величина $V = V(\omega)$ – «число серий выпадения двух *гербов* подряд».

Далее возникает вопрос, о способах задания дискретной случайной величины.

Если задавать случайную величину перечислением множества её значений, то может оказаться, что у разных случайных величин могут оказаться одинаковые множества значений. Например, при подбрасывании одной монеты множество значений случайной величины X – «число выпадений *герба*» состоит из двух чисел $\{0,\ 1\}$. Точно также, при рождении одного ребёнка в родильном доме случайная величина Y – «число родившихся мальчиков» тоже состоит из двух чисел $\{0,\ 1\}$. Но эти случайные величины отличаются друг от друга, так как событиям из областей их определения соответствуют разные вероятности. В случае с монетой вероятность каждого события равна $0,5$, а, согласно статистике, вероятность рождения мальчика $0,515$ (соответственно нерождения $0,485$).

Следовательно, для задания случайной величины недостаточно задать только множество её значений. Необходимо также определить вероятности событий, связанных с этими значениями.

§ 5.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Предположим, что $X = X(\omega)$ – дискретная случайная величина, единственными значениями которой являются числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

Так как каждое из этих значений является образом некоторого события:

$$x_1 = X(\omega_1),\ x_2 = X(\omega_2),\ \ldots,\ x_n = X(\omega_n),$$

то вероятности $P(\omega_i)$ определяют вероятности[1] $P(\omega_i : X = x_i)$, которые для краткости обозначим через

$$p_i = P(X = x_i),\ \ (i = \overline{1,\ n}).$$

Поскольку для каждого ω_i существует только одно значение $x_i = X(\omega_i)$, то события $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ образуют полную группу событий опыта. Поэтому *сумма вероятностей этих событий равна единице*:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Если множество значений дискретной случайной величины X сравнимо с множеством натуральных чисел, то есть является

[1] То есть вероятности событий, заключающихся в том, что случайная величина X принимает значение x_i.

бесконечным множеством, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$$

сходится, а его сумма равна единице.

Определение 5.2. *Отображение, при котором каждому возможному значению дискретной случайной величины соответствует вероятность события, при котором случайная величина принимает это значение, называется законом распределения дискретной случайной величины.*

Так как закон распределения является числовой функцией, то его можно задать в виде таблицы, или графика, или аналитически с помощью некоторой формулы. Рассмотрим первые два из этих способов.

5.2.1. Табличное задание закона распределения

При табличном задании значения случайной величины упорядочивают по возрастанию, записывая в первой строке таблицы, а соответствующие значения вероятностей располагают во второй её строке:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

(5.2)

Критерием правильности составления закона распределения является условие (5.1).

Задача 5.1. *Дан закон распределения дискретной случайной величины* δ

δ	2	5	8	11
p	0,46	?	0,11	0,14

Найдите неизвестную вероятность.

Решение. Так как таблица представляет закон распределения дискретной случайной величины δ, то сумма вероятностей во второй строке должна быть равна единице.

Пусть неизвестная вероятность равна p.

Тогда, $$0,46 + p + 0,11 + 0,14 = 1.$$

Следовательно, $p = 1 - 0,46 - 0,11 - 0,14 \Rightarrow \boxed{p = 0,29.}$

Задача 5.2. *Делопроизводитель написал три письма и подписал три конверта. Затем, произвольным образом, разложил письма по конвертам и отправил. Случайная величина X — число адресатов, получивших свои письма. Составьте закон распределения X.*

Решение. Разложить три письма по конвертам с адресами можно следующим образом:

положить в один из конвертов первое письмо, **и** *положить в один из оставшихся конвертов второе письмо* **и** *положить в один из оставшихся после этих действий конвертов третье письмо*[1].

Так как положить первое письмо в конверт можно **тремя** способами **и** положить второе письмо (после того, как в один из конвертов положено первое) можно только **двумя** способами **и** положить третье письмо (после того, как в в двух конвертах уже лежат письма) можно только **одним** способом, то общее число способов, согласно **принципу произведения**, $n = 3 \cdot 2 \cdot 1! \Rightarrow n = 6$.

Случайная величина X может принимать четыре значения:
1) $X = 0$, если ни один из адресатов не получил своё письмо.
2) $X = 1$, если только один из адресатов получил своё письмо.
3) $X = 2$, если только два адресата получили свои письма.
4) $X = 3$, если все адресаты получили свои письма.

Рассмотрим каждое из этих событий отдельно:
Первое из событий $X = 0$ может наступить в двух случаях:
а) первый получит письмо, адресованное второму, второй – третьему, третий – первому;
б) первый получит письмо, адресованное третьему, второй – первому, третий – второму.
Поэтому, $p(\{\mathrm{X{=}0}\} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow p(\{\mathrm{X{=}0}\} = \dfrac{1}{3}$.

Второе из событий $X = 1$ может наступить в трёх случаях:
а) первый получит письмо, адресованное ему, второй – третьему, третий – второму;
б) первый получит письмо, адресованное третьему, второй – своё, третий – первому;
в) первый получит письмо, адресованное второму, второй – первому, третий – своё.
Поэтому, $p(\{\mathrm{X{=}1}\} = \dfrac{3}{6} \Rightarrow p(\{\mathrm{X{=}1}\} = \dfrac{1}{2}$.

Третье из событий $X = 2$ не наступит никогда,
следовательно, $p(\{\mathrm{X{=}2}\} = 0$.

Так как четвёртое событие $X = 3$ может наступить только в одном случае, то $p(\{\mathrm{X{=}1}\} = \dfrac{1}{6}$.

[1] Другое решение заключается в том, чтобы увидеть, что это задача на **перестановки** из трёх элементов, а значит, $n = 3! \Rightarrow n = 6$.

В силу того, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{6}=1$, можно утверждать, что закон распределения дискретной случайной величины X имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Задача 5.3. *В магазине имеется 10 автомобилей определённой марки. Среди них 6 чёрного цвета, 3 серого и 1 белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Случайная величина Y — число случайно проданных автомобилей чёрного цвета. Составьте закон распределения Y.*

Решение. Общее число выбранных автомобилей **три** из **десяти**, при этом при выборе порядок не имеет значения, то выбор реализуется с помощью сочетаний:

$$n=C_{10}^{3}\Rightarrow n=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\Rightarrow n=120.$$

Установим значения, которые может принимать дискретная случайная величина Y:
Число чёрных автомобилей, среди купленных может быть $Y=0$, или $Y=1$, или $Y=2$, или $Y=3$.

Определим соответствующие события и их вероятности:
1. $Y=0$: $A_0=$*куплены нуль чёрных автомобилей из 6 чёрных* **и**
$B_0=$*куплены три нечёрных автомобиля из четырёх нечёрных.*

Найдём число благоприятных исходов, соответствующих $Y=0$.

$$m(A_0)=C_6^0\Rightarrow m(A_0)=1;\;\; m(B_0)=C_4^3\Rightarrow m(B_0)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\Rightarrow m(B_0)=4.$$

Согласно **принципу произведения** число благоприятных исходов

$$m(\{\mathrm{Y{=}0}\}=m(A_0)\cdot m(B_0),\Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}0}\}=1\cdot 4\Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}0}\}=4.$$

Следовательно, вероятность

$$p(\{\mathrm{Y{=}0}\}=\frac{4}{120}\Rightarrow p(\{\mathrm{Y{=}0}\}=\frac{1}{30}.$$

2. $Y=1$: $A_1=$*куплены один чёрный автомобиль из 6 чёрных* **и**
$B_1=$*куплены два нечёрных автомобиля из четырёх нечёрных.*

Найдём число благоприятных исходов, соответствующих $Y=1$.

$$m(A_1)=C_6^1\Rightarrow m(A_1)=6;\;\; m(B_1)=C_4^2\Rightarrow m(B_1)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\Rightarrow m(B_1)=6.$$

Согласно **принципу произведения** число благоприятных исходов

$$m(\{\mathrm{Y{=}1}\}=m(A_1)\cdot m(B_1),\Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}1}\}=6\cdot 6\Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}1}\}=36.$$

Следовательно, вероятность

$$p(\{\mathrm{Y{=}1}\} = \frac{36}{120} \Rightarrow p(\{\mathrm{Y{=}1}\} = \frac{3}{10}.$$

3. $Y = 2$: $A_2 =$*куплены два чёрных автомобиля из 6 чёрных* **и**
$B_2 =$*куплен один нечёрный автомобиль из четырёх нечёрных.*

Найдём число благоприятных исходов, соответствующих $Y = 2$.

$$m(A_2) = C_6^2 \Rightarrow m(A_2) = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \Rightarrow m(A_2) = 15;$$

$$m(B_2) = C_4^1 \Rightarrow m(B_2) = 4.$$

Согласно **принципу произведения** число благоприятных исходов

$$m(\{\mathrm{Y{=}2}\} = m(A_2) \cdot m(B_2), \Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}2}\} = 15 \cdot 4 \Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}2}\} = 60.$$

Следовательно, вероятность

$$p(\{\mathrm{Y{=}2}\} = \frac{60}{120} \Rightarrow p(\{\mathrm{Y{=}2}\} = \frac{1}{2}.$$

4. $Y = 3$: $A_3 =$*куплены три чёрных автомобиля из 6 чёрных* **и**
$B_3 =$*куплены нуль нечёрных автомобилей из четырёх нечёрных.*

Найдём число благоприятных исходов, соответствующих $Y = 3$.

$$m(A_3) = C_6^3 \Rightarrow m(A_3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \Rightarrow m(A_3) = 20;$$

$$m(B_3) = C_4^0 \Rightarrow m(B_3) = 1.$$

Согласно **принципу произведения** число благоприятных исходов

$$m(\{\mathrm{Y{=}3}\} = m(A_3) \cdot m(B_3), \Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}3}\} = 20 \cdot 1 \Rightarrow m(\{\mathrm{Y{=}3}\} = 20.$$

Следовательно, вероятность

$$p(\{\mathrm{Y{=}3}\} = \frac{20}{120} \Rightarrow p(\{\mathrm{Y{=}3}\} = \frac{1}{6}.$$

Так как $\frac{1}{30} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$, то можно утверждать, что закон распределения дискретной случайной величины Y имеет следующий вид:

Y	0	1	2	3
p	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Задача 5.4. *Экзаменатор задаёт студенту, прогулявшему весь семестр, дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой из заданных вопросов равна* $0,8$. *Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не отвечает на очередной вопрос. Случайная величина* Z *— число дополнительно заданных вопросов.*

1.*Составьте закон распределения* Z.

2. *Найдите наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов.*

Решение. Теоретически, в случае студента-всезнайки и неутомимого преподавателя, случайная величина Z может принимать бесконечное число целочисленных значений, начиная от единицы.

Попробуем установить вероятности первых событий, а затем, закон их изменения:

1. $Z = 1$: $A_1 =$*студент не ответил на первый вопрос.*

$$p(\{\mathrm{Z{=}1}\}) = 1 - 0,8 \Rightarrow p(\{\mathrm{Z{=}1}\}) = 0,2.$$

2. $Z = 2$: $A_2 =$*студент ответил на первый вопрос* **и**

$B_2 =$*не ответил на второй вопрос.*

Так как A_2 и B_2 – независимые события, то

$$p(\{Z = 2\}) = p(\{A_2\}) \cdot p(\{B_2\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{Z = 2\}) = 0,8 \cdot (1 - 0,8) \Rightarrow p(\{Z = 2\}) = 0,16.$$

3. $Z = 3$: $A_{31} =$*студент ответил на первый вопрос* **и**

$A_{32} =$*студент ответил на второй вопрос* **и**

$B_3 =$*не ответил на третий вопрос.*

Так как A_{31}, A_{32} и B_3 – независимые события, то

$$p(\{Z = 3\}) = p(\{A_{31}\}) \cdot p(\{A_{32}\}) \cdot p(\{B_3\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{Z = 3\} = (0,8)^2 \cdot (1 - 0,8) \Rightarrow p(\{Z = 3\}) = 0,128.$$

Можно догадаться, что

$$p(\{Z = 4\} = (0,8)^3 \cdot (1 - 0,8) \Rightarrow p(\{Z = 4\} = 0,1024.$$

Вероятности соответствующих событий, начиная со второго события, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 0,8$ и первым членом $b_1 = 0,2$.

Таким образом, событию $\{Z = k\}$ соответствует вероятность

$$0,2 \cdot (0,8)^{k-1}.$$

Согласно замечанию 5.1, множество значений дискретной случайной величины Z является счётным множеством, поэтому вероятности, соответствующие этим значениям, являются членами бесконечного ряда. Так как они являются одновременно членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то этот ряд сходится.

Найдём по известной формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ сумму членов этого ряда

$$S = \frac{0,2}{1 - 0,8} \Rightarrow S = 1.$$

Так как $S = 1$, то можно утверждать, что закон распределения для дискретной случайной величины имеет вид

Y	1	2	3	...	k	...
p	$0,2$	$0,16$	$0,128$	...	$0,2 \cdot (0,8)^{k-1}$	...

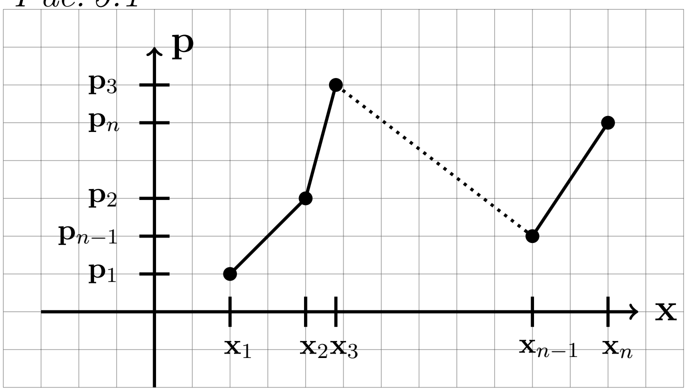
Видя перед глазами закон распределения легко ответить на второй вопрос задачи.

Наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов равно одному, так как именно этому событию соответствует наибольшая вероятность.

5.2.2. Графическое задание закона распределения

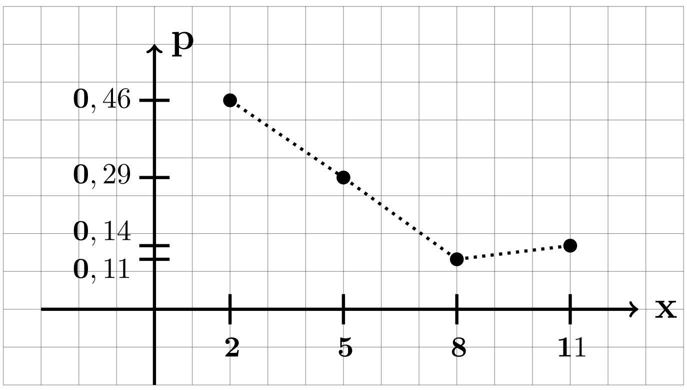
График закона распределения в декартовой системе координат, на горизонтальной оси которой откладываются значения x, а на вертикальной – вероятности, называется *многоугольником распределения*

Рис. 5.1



Задача 5.5. *В условиях задачи 5.1 постройте многоугольник распределения δ.*

Решение. В системе координат $x - p$ построим точки, взяв за их координаты соответствующие значения из полученного при решении задачи 5.1закона распределения дискретной случайной величины δ. Построенные точки соединим пунктирной линией:



§ 5.3. Функция распределения дискретной случайной величины

Ещё одной геометрической иллюстрацией дискретной случайной величины является её *функция распределения.*

Определение 5.3. *Функцией распределения случайной величины назы-*

вается функция, которая в каждой точке x числовой прямой определяет вероятность события, в котором случайная величина принимает значение, меньшее, чем x. То есть[1],

$$F(x) = P(X < x). \tag{5.3}$$

Таким образом, вероятность того, что $X < x$ зависит от x, поэтому функция $F(x)$ называется функцией распределения[2]

С точки зрения геометрии функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X в результате исхода попадет на координатную прямую левее x:

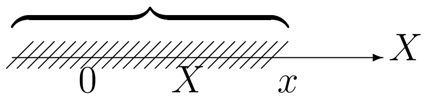


Рис. 5.2

Для дискретной случайной величины X, значения которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения имеет вид[3]

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) \tag{5.4}$$

или в развёрнутом виде

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k), \text{ где } x_k < x.$$

Построим график функции распределения $F(x)$ случайной величины X, заданной табличным законом распределения (5.2).

При $x \leq x_1$: $F(x) = P(X < x) = 0$.

При $x_1 < x \leq x_2$: $F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) = p_1$.

При $x_2 < x \leq x_3$: $F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$.

. . . .

При $x_{n-1} < x \leq x_n$: $F(x) = P(X < x) =$
$= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_{n-1}) = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}$.

При $x \geq x_n$: $F(x) = P(X < x) =$
$= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_{n-1}) + P(X = x_n) =$
$= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n$.

Функция распределения имеет неустранимые разрывы первого рода слева в тех точках, в которых дискретная случайная величина X принимает

[1]Под выражением $P(X < x)$ следует понимать вероятность события ω, в котором случайная величина принимает значение меньшее, чем x. Или в обозначениях: $P(X < x) = P(\omega : X < x)$.

[2]В старых учебниках по теории вероятностей, а также в приложениях функцию распределения называют *кумулятивной функцией* или *накопительной функцией*. Такое название вытекает из её определения: из него видно, как накапливается «количество вероятности».

[3]Неравенство $x_k < x$ означает, что суммирование относится ко всем значениям x_k, котороые по своей величине меньше x.

возможные значения, указанные в таблице (5.2) закона распределения. В интервалах между возможными значениями случайной величины функция $F(x)$ является постоянной. Сумма скачков функции распределения равна единице. График функции распределения дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция:

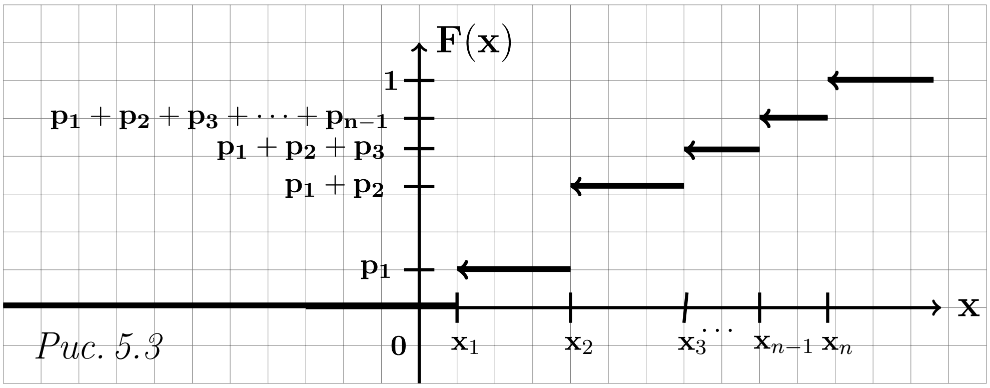


Рис. 5.3

Задача 5.6. *В условиях задачи 5.1 постройте график функции распределения δ.*

Решение. Используя алгоритм построения (см. стр.9), имеем:
При $x \le 2$: $F(x) = P(\delta < x) = 0$.

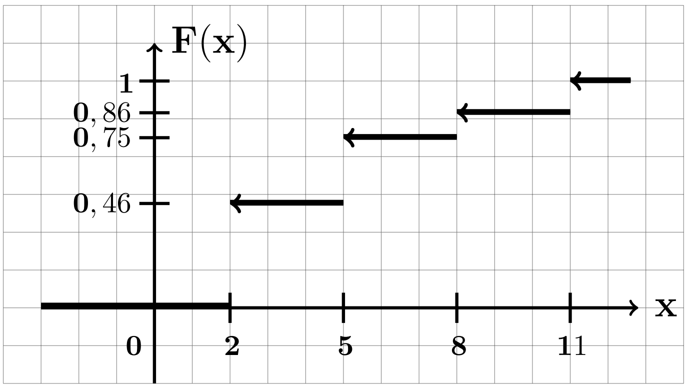
При $2 < x \le 5$: $F(x) = P(\delta < x) = P(\delta = 2) = 0,46$.

При $5 < x \le 8$: $F(x) = P(\delta < x) = P(\delta = 2) + P(\delta = 5) =$
$$= 0,46 + 0,29 = 0,75.$$

При $8 < x \le 11$: $F(x) = P(\delta < x) = P(\delta = 2) + P(\delta = 5) + P(\delta = 8) =$
$$= 0,46 + 0,29 + 0,11 = 0,86.$$

При $x \ge 11$: $F(x) = P(\delta < x) = P(\delta = 2) + P(\delta = 5) + P(\delta = 8) +$
$$+P(\delta = 11) \Rightarrow F(x) = P(\delta < x) = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0,46, & \text{если } 2 < x \le 5, \\ 0,75, & \text{если } 5 < x \le 8, \\ 0,86, & \text{если } 8 < x \le 11, \\ 1, & \text{если } x > 11. \end{cases}$$



Задача 5.7. *На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из которых запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Случайная величина H — число светофоров, пройденных машиной до первой остановки. Составьте закон распределения H и постройте график функции распределения H.*

Решение. Рассмотрим события, связанные с условием задачи, и определим их вероятности.

1. $H = 0$: $A_0 =$*автомобиль попал под запрещающий сигнал на первом светофоре.*

$$p(\{H = 0\}) = p(\{A_0\}) = 0,5.$$

2. $H = 1$: $A_1 =$*автомобиль проехал первый семафор без остановки* **и**
$B_1 =$*автомобиль попал под запрещающий сигнал на втором светофоре.*

Так как A_2 и B_2 — независимые события, то

$$p(\{H = 1\}) = p(\{A_1\}) \cdot p(\{B_1\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{H = 1\}) = (1 - 0,5) \cdot 0,5 \Rightarrow p(\{H = 1\}) = 0,25.$$

3. $H = 2$: $A_2 =$*автомобиль проехал первый и второй семафоры без остановки* **и**
$B_2 =$*автомобиль попал под запрещающий сигнал на третьем светофоре.*

Так как A_2 и B_2 — независимые события, то

$$p(\{H = 2\}) = p(\{A_2\}) \cdot p(\{B_2\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{H = 2\} = (1 - 0,5)^2 \cdot 0,5 \Rightarrow p(\{H = 2\}) = 0,125.$$

4. $H = 3$: $A_3 =$*автомобиль проехал первый, второй и третий семафоры без остановки* **и**
$B_3 =$*автомобиль попал под запрещающий сигнал на четвёртом светофоре.*

Так как A_3 и B_3 — независимые события, то

$$p(\{H = 3\}) = p(\{A_3\}) \cdot p(\{B_3\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{H = 3\} = (1 - 0,5)^3 \cdot 0,5 \Rightarrow p(\{H = 3\}) = 0,0625.$$

5. $H = 4$: $A_4 =$*автомобиль проехал все четыре семафора без остановки.*

$$p(\{H = 4\}) = p(\{A_4\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\{H = 4\} = (1 - 0,5)^4 \Rightarrow p(\{H = 4\}) = 0,0625.$$

Так как $0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,0625 = 1$, то можно утверждать, что закон распределения дискретной случайной величины H имеет следующий вид:

Y	0	1	2	3	4
p	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625$	$0,0625$

.

Далее, используя алгоритм построения (см. стр.9) и опыт решения задачи 5.7, имеем:

При $x \le 0$: $F(x) = P(H < x) = 0$.

При $0 < x \le 1$: $F(x) = P(H < x) = P(H = 0) = 0,5$.

При $1 < x \le 2$: $F(x) = P(H < x) = P(H = 0) + P(H = 1) =$
$= 0,5 + 0,25 = 0,75$.

При $2 < x \le 3$: $F(x) = P(H < x) = P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2) =$
$= 0,5 + 0,25 + 0,125 = 0,875$.

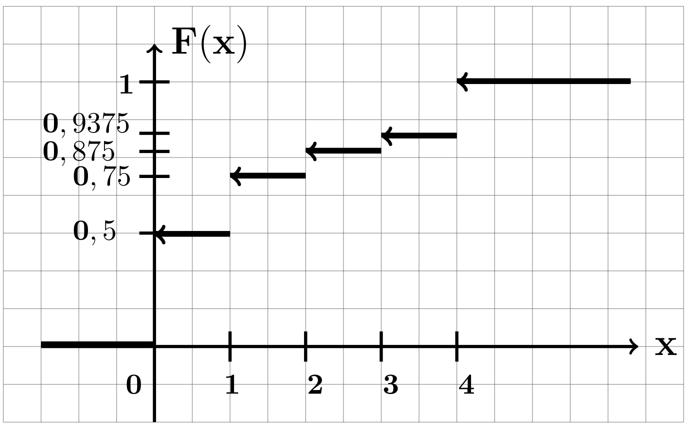
При $3 < x \le 4$: $F(x) = P(H < x) = P(H = 0) + P(H = 1) +$
$+P(H = 2) + P(H = 3) =$
$+0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,9375$.

При $x \ge 4$: $F(x) = P(H < x) = P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2) +$
$+P(H = 3) + P(H = 4) \Rightarrow F(x) = P(H < x) = 1$.

Собирая полученную информацию, имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0,5, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0,75, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0,875, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0,9375, & \text{если } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

На основании расчётов строим график $F(x)$:



5.3.1. Свойства функции распределения

Из определения 5.3 и рисунка 5.2 можно вывести следующие свойства функции распределения:

Свойство 5.1. $\forall\, x \; 0 \le F(x) \le 1$.

Это очевидно, так как $F(x)$ определяется с помощью вероятности события.

Свойство 5.2. $\boldsymbol{\forall x_1,\ x_2 :\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_1)}$.

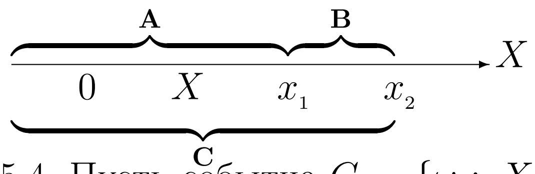


Рис. 5.4

Воспользуемся Рис.5.4. Пусть событие $C = \{\omega :\ X(\omega) < x_2\}$. Представим его как сумму событий

$$A = \{\omega :\ X(\omega) < x_1\} \text{ и } B = \{\omega :\ x_1 \le X(\omega) < x_2\}\text{: } C = A + B.$$

Так как A и B – несовместные события, то из теоремы **??** о сложении вероятностей следует, что $P(C) = P(A) + P(B)$.

То есть, $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$. Следовательно,

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Так как вероятность $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$ по определению, то

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

Свойство 5.3. $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0}$.

Если на Рис. 5.2 «заставить» точку x стремиться влево, то видно, что событие $\{\omega :\ X(\omega) < x\}$, состоящее в том, что случайная величина X окажется левее, чем x, становится невозможным, а его вероятность – равной нулю.

Свойство 5.4. $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1}$.

Точно также, перемещая точку x на рисунке 5.2 вправо, можно убедиться, что событие $\{\omega : X(\omega) < x\}$ в пределе становится достоверным. А значит его вероятность стремится к единице.

§ 5.4. Числовые характеристики дискретной случайной величины

5.4.1. Математическое ожидание распределения дискретной случайной величины

С точки зрения теории вероятности закон распределения полностью описывает случайную величину. Но получение всей содержащейся в нём информации во-первых избыточно во многих случаях, а во-вторых требует затрат на получение этой информации.

Для практических целей нужно иметь гораздо меньше информации, чтобы получить представление о поведении изучаемой случайной величины.

Если представлять множество значений случайной величины как некоторый интервал, расположенный на числовой прямой, то нужно знать «центр» этого интервала, то есть места, где расположена основная «масса вероятности». А также нужно знать «радиус» этого интервала, как «меру рассеяния» этой «массы вероятности» относительно «центра».

Пусть известен закон распределения дискретной случайной величины X:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

Определение 5.4. *Математическим ожиданием*[1] *случайной величины X называется скалярное произведение вектора значений случайной величины на вектор соответствующих им вероятностей.*

То есть,

$$\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n}. \tag{5.5}$$

Или, в сжатом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Задача 5.8. *В условиях задачи 5.1 найдите математическое ожидание δ.*

Решение. Согласно формуле 5.5,

$$M(X) = 2 \cdot 0,46 + 5 \cdot 0,29 + 8 \cdot 0,11 + 11 \cdot 0,14.$$

Выполнив вычисления, получаем $\boxed{M(X) = 4,79.}$

Задача 5.9. *В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных холодильника. Случайная величина P — число импортных холодильников из четырёх наудачу выбранных холодильников.*
1. Составьте закон распределения случайной величины P.
2. Вычислите математическое ожидание случайной величины P.

Решение. Рассмотрим события, связанные с условием задачи.

Найдём общее число вариантов выбора 4-х холодильников из имеющихся 8. Так как мы не делаем между холодильниками различий, то выбор реализуется с помощью сочетаний:

Далее, рассмотрим благоприятные варианты выбора и вычислим соответствующие вероятности событий.

$$n = C_8^4 \Rightarrow n = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \Rightarrow n = 70.$$

1. $P = 0$: $A_0 =$*выбрали 0 импортных холодильников из 3 импортных* **и**
$B_0 =$*выбрали 4 отечественных холодильника из 5 отечественных.*

[1]Термин *математическое ожидание* связан с ожиданием выигрыша в азартных играх, с желанием определить среднее значение предполагаемого выигрыша с помощью математики.

Так как события A_0 и B_0 являются независимыми, то согласно **принципу произведения**

$$m(\{P=0\}) = m(\{A_0\}) \cdot m(\{B_0\}).$$

$$m(\{A_0\}) = C_3^0 \Rightarrow m(\{A_0\}) = 1;$$

$$m(\{B_0\}) = C_5^4 \Rightarrow m(\{B_0\}) = 5.$$

Следовательно, $m(\{P=0\}) = 1 \cdot 5 \Rightarrow m(\{P=0\}) = 5$.

В итоге, из классического определения вероятности следует, что

$$p(\{P=0\}) = \frac{m(\{P=0\})}{n} \Rightarrow p(\{P=0\}) = \frac{5}{70} \Rightarrow p(\{P=0\}) = \frac{1}{14}.$$

2. $P=1$: $A_1 =$*выбрали 1 импортный холодильник из 3 импортных* **и**
$B_1 =$*выбрали 3 отечественных холодильника из 5 отечественных.*

Точно также, как и в пункте 1, определим $p(\{P=1\})$.

$$m(\{P=1\}) = m(\{A_1\}) \cdot m(\{B_1\}).$$

$$m(\{A_1\}) = C_3^1 \Rightarrow m(\{A_1\}) = 3;$$

$$m(\{B_1\}) = C_5^3 \Rightarrow m(\{B_1\}) = 10.$$

Следовательно, $m(\{P=1\}) = 3 \cdot 10 \Rightarrow m(\{P=1\}) = 30$.

В итоге, из классического определения вероятности следует, что

$$p(\{P=1\}) = \frac{m(\{P=1\})}{n} \Rightarrow p(\{P=1\}) = \frac{30}{70} \Rightarrow p(\{P=1\}) = \frac{3}{7}.$$

3. $P=2$: $A_2 =$*выбрали 2 импортных холодильника из 3 импортных* **и**
$B_2 =$*выбрали 2 отечественных холодильника из 5 отечественных.*

Также, как и в первых пунктах, определим $p(\{P=2\})$.

$$m(\{P=2\}) = m(\{A_2\}) \cdot m(\{B_2\}).$$

$$m(\{A_2\}) = C_3^2 \Rightarrow m(\{A_2\}) = 3;$$

$$m(\{B_2\}) = C_5^2 \Rightarrow m(\{B_2\}) = 10.$$

Следовательно, $m(\{P=2\}) = 3 \cdot 10 \Rightarrow m(\{P=2\}) = 30$.

В итоге, имеем

$$p(\{P=2\}) = \frac{m(\{P=2\})}{n} \Rightarrow p(\{P=2\}) = \frac{30}{70} \Rightarrow p(\{P=2\}) = \frac{3}{7}.$$

4. $P=3$: $A_3 =$*выбрали 3 импортных холодильника из 3 импортных* **и**
$B_3 =$*выбрали 1 отечественный холодильник из 5 отечественных.*

Аналогично пунктам 1-3, определим $p(\{P=3\})$.

$$m(\{P=3\}) = m(\{A_3\}) \cdot m(\{B_3\}).$$
$$m(\{A_3\}) = C_3^3 \Rightarrow m(\{A_3\}) = 1;$$
$$m(\{B_3\}) = C_5^1 \Rightarrow m(\{B_3\}) = 5.$$

Следовательно, $m(\{P=3\}) = 1 \cdot 5 \Rightarrow m(\{P=3\}) = 5$.

В итоге, имеем

$$p(\{P=3\}) = \frac{m(\{P=3\})}{n} \Rightarrow p(\{P=3\}) = \frac{5}{70} \Rightarrow p(\{P=3\}) = \frac{1}{14}.$$

Так как $\frac{1}{14} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = 1$, то можно утверждать, что закон распределения дискретной случайной величины P имеет следующий вид:

P	0	1	2	3
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Используя формулу 5.5, вычислим математическое ожидание дискретной случайной величины P:

$$M(P) = 0 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{1}{14} = 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow M(P) = 1,5.$$

Задача 5.10. *Из опыта сдачи экзамена некоторому преподавателю предыдущими поколениями студентов установлено, что сдать ему экзамен на «отлично» можно с вероятностью* $0,3$, *на «хорошо» – с вероятностью* $0,4$. *Какова вероятность получить у этого преподавателя другие оценки, если математическое ожидание случайной величины* S, *связанной с распределением оценок у данного преподавателя при случайно выбранном билете, равно* $3,9$.

Решение. Согласно Положению о высшей школе, S может принимать значения из множества $\{2\,3,\ 4,\ 5\}$.

Допустим, что x и y – вероятности того, что сдающий может соответственно получить оценки «неудовлетворительно» и «удовлетворительно».

Составим предполагаемый закон распределения дискретной случайной величины S:

S	2	3	4	5
p	x	y	$0,4$	$0,3$

Согласно условию 5.1, сумма вероятностей должна быть равна единице, поэтому

$$x + y + 0,4 + 0,3 = 1.$$

Кроме этого, согласно условию и формуле 5.5, имеем

$$2x + 3y + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 3,9.$$

Приведя подобные члены в каждом из уравнений, составим систему

$$\begin{cases} x + \ \ y = 0,3, \\ 2x + 3y = 0,8. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 0,1$, а $y = 0,2$.
Следовательно, у данного преподавателя можно получить

$$\boxed{\text{«удовлетворительно» с вероятностью 0,2 и «неудовлетворительно» с вероятностью 0,1.}}$$

Замечание 5.2. В том случае, когда дискретная случайная величина X принимает бесконечное множество значений (см. замечание 5.1), её математическое ожидание является суммой абсолютно сходящегося ряда:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

5.4.2. Вероятностный смысл математического ожидания

Предположим, что опыт состоит из n исходов, в которых дискретная случайная величина X приняла k_1 раз значение x_1, k_2 раз значение $x_2, \ldots,$ k_s раз значение x_s. При этом

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n.$$

Тогда сумма всех значений, принятых случайной величиной X равна:

$$S = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s.$$

Определим среднее арифметическое $\bar{X}$ всех значений, принятых случайной величиной. С этой целью разделим S на число исходов опыта n:

$$\bar{X} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_s x_s}{n},$$

или

$$\bar{X} = x_1 \frac{k_1}{n} + x_2 \frac{k_2}{n} + \cdots + x_s \frac{k_s}{n}. \tag{5.6}$$

Так как $\dfrac{k_1}{n}$ – относительная частота W_1 значения x_1 (см. **??**), $\dfrac{k_2}{n}$ – относительная частота W_2 значения x_2 и так далее, то перепишем представление (5.6) в виде

$$\bar{X} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \cdots + x_s W_s. \tag{5.7}$$

Будем считать, что число исходов опыта $n \to \infty$. Тогда, как следует из замечания (после определения 5.4) относительная частота стремится к вероятности появления события.

То есть, $W_1 \approx p_1$, $W_2 \approx p_2, \ldots, W_s \approx p_s$.

Заменим в представлении (5.7) относительные частоты соответствующими вероятностями:
$$\bar{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_s p_s.$$
Правая часть полученного приближённого равенства является математическим ожиданием случайной величины X.

Таким образом, $\bar{X} \approx M(X)$.

Следовательно, с точки зрения теории вероятности *математическое ожидание приблизительно*[1] *равно среднему арифметическому возможных значений дискретной случайной величины.*

5.4.3. Свойства математического ожидания

Свойство 5.5. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине*:
$$\boldsymbol{M(C) = C}.$$

Свойство 5.6. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*:
$$\boldsymbol{M(CX) = CM(X)}.$$

Свойство 5.7. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий*:
$$\boldsymbol{M(X+Y) = M(X) + M(Y)}.$$

Чтобы сформулировать следующее свойство, понадобится следующее

Определение 5.5. *Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения может принимать другая величина.*

Свойство 5.8. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:
$$\boldsymbol{M(XY) = M(X) \cdot M(Y)}.$$

Замечание 5.3. Естественно можно доказать, что свойства 5.7 и 5.8 имеют место для любого конечного числа случайных величин[2]:
$$M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n). \tag{5.8}$$
$$M(X_1 X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \ldots M(X_n). \tag{5.9}$$

[1] Чем большим является число исходов опыта n, тем более точным является данное равенство.
[2] С учётом взаимной независимости величин в случае их произведения.

5.4.4. Дисперсия дискретной случайной величины

Математическое ожидание как характеристика случайной величины даёт много информации о ней, но, как видно из следующих примеров, этой информации оказывается недостаточно.

Рассмотрим законы распределения двух случайных величин:

X	$-0,1$	$0,1$
p	$0,5$	$0,5$

Y	-100	100
p	$0,5$	$0,5$

Найдём математические ожидания каждой из случайных величин:
$M(X) = -0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 \Rightarrow M(X) = 0.$
$M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 \Rightarrow M(Y) = 0.$

Случайные величины X и Y имеют одинаковые математические ожидания, но их возможные значения не равны. При этом, в одном случае возможные значения располагаются вблизи математического ожидания, а в другом случае удалены от него.

Проблема заключается в отсутствии информации о рассеянии возможных значений случайных величин относительно математического ожидания.

Чтобы исследовать вопрос о рассеянии, рассмотрим *отклонение случайной величины от её математического ожидания.*

Определение 5.6. *Отклонением называется разность между случайной величиной X и её математическим ожиданием $M(X)$.*

Из определения следует, что отклонение $X - M(X)$ является случайной величиной, обладающей следующим свойством.

Теорема 5.1. *Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания равно нулю*:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Используя свойства 5.5 и 5.8 математического ожидания, имеем

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Из данной теоремы вытекает, что определять рассеяние возможных значений случайной величины с помощью математического ожидания отклонения невозможно. Объяснить это можно тем, что одни отклонения являются положительными числами, а другие – отрицательными. Поэтому их алгебраическая сумма обращается в нуль.

Вследствие этого возникают два варианта: исследовать математическое ожидание модуля отклонения[1] или квадрата отклонения. Практическое

[1]Так как модуль не является всюду дифференцируемой функцией, то при его исследовании возникает много проблем

применение получил второй вариант.

Определение 5.7. *Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания*:

$$\boldsymbol{D(X) = M(X - M(X))^2}. \tag{5.10}$$

Замечание 5.4. Из определения следует, что дисперсия случайной величины является неотрицательной константой.

При расчётах дисперсии её определение оказывается очень неудобным в силу большого числа вычислений. Поэтому рассмотрим следующую теорему.

Теорема 5.2. Формула вычисления дисперсии *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом её математического ожидания*:

$$\boldsymbol{D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2}. \tag{5.11}$$

Используя свойства 5.5 и 5.8 математического ожидания, получаем

$$M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X(M(X) + (M(X)^2) =$$

$$= M\left(X^2\right) - 2M(X)M(X) + (M(X)^2 =$$

$$= M\left(X^2\right) - 2(M(X))^2 + (M(X)^2 = M\left(X^2\right) - (M(X))^2.$$

Задача 5.11. *В условиях задачи 5.1 найдите дисперсию δ.*

Решение. Для того, чтобы вычислить дисперсию дискретной случайной величины δ с помощью формулы 5.11, дополним таблицу её закона распределения строчкой квадратов её значений:

δ^2	4	25	64	121
δ	2	5	8	11
p	0,46	0,29	0,11	0,14

Вычислим

$$M(\delta^2) = 4 \cdot 0,46 + 25 \cdot 0,29 + 64 \cdot 0,11 + 121 \cdot 0,14 \Rightarrow M(\delta^2) = 23,07.$$

Далее, возведём в квадрат найденное при решении задачи 5.9 значение математического ожидания δ:

$$(M(\delta))^2 = (4,79)^2 \Rightarrow (M(\delta))^2 = 22,94.$$

Вычитая его из $M(\delta^2)$:

$$23,07 - 22,94 = 0,13,$$

получаем значение дисперсии δ:

$$\boxed{D(\delta) = 0,13.}$$

Задача 5.12. *В условиях задачи 5.9 найдите дисперсию P.*

Решение. Аналогично решению задачи 5.11 дополним таблицу значений закона распределения случайной величины P строкой из квадратов её значений:

P^2	0	1	4	9
P	0	1	2	3
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

.

Вычислим

$$M(P^2) = 0 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{3}{7} + 9 \cdot \frac{1}{14} \Rightarrow M(P^2) = 2\frac{11}{14}.$$

Зная из решения задачи 5.9 значение $M(P) = 1,5$, найдём его квадрат:

$$(M(P))^2 = (1,5)^2 \Rightarrow (M(P))^2 = 2,25.$$

Вычитая найденное значение из $M(P^2)$:

$$2\frac{11}{14} - 2\frac{1}{4} = \frac{15}{28},$$

получаем значение дисперсии P:

$$\boxed{D(P) \approx 0,54.}$$

Задача 5.13. *Известно, что некоторая случайная величина может принимать значения* 0, 3 *и* 5. *Известно, что математическое ожидание равно 2, а дисперсия —* 3. *Найдите закон распределения случайной величины.*

Решение. Предположим, что события, соответствующие указанным значениям, наступают соответственно с вероятностями p_1, p_2 и p_3.

Тогда таблица закона распределения данной случайной величины вместе с дополнительной строкой квадратов её значений будет иметь следующий вид:

	0	9	25
P	0	3	5
p	p_1	p_2	p_3

.

Согласно условию 5.1, для вероятностей имеет место равенство:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Из условия задачи и формулы 5.5 для математического ожидания данной случайной величины можно составить следующее равенство:

$$0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 = 2.$$

Зная дисперсию случайной величины с помощью формулы 5.11 можно получить ещё одно равенство:

$$0 \cdot p_1 + 9 \cdot p_2 + 25 \cdot p_3 - 2^2 = 3.$$

Приведя подобные, составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + \ \ p_2 + \ \ \ \ p_3 = 1 \\ \quad + 3p_2 + \ \ 5p_3 = 2 \\ \quad + 9p_2 + 25p_3 = 7. \end{cases}$$

Решив систему, находим

$$p_1 = 0,4; \, p_2 = 0,5; \, p_3 = 0,1.$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины имеет такой вид:

P	0	3	5
p	0,4	0,5	0,1

.

5.4.5. Свойства дисперсии

Свойство 5.9. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю*:

$$\boldsymbol{D(C) = 0}.$$

Свойство 5.10. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предаварительно возведя его в квадрат*:

$$\boldsymbol{D(CX) = C^2 D(X)}.$$

Свойство 5.11. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$\boldsymbol{D(X + Y) = D(X) + D(Y)}.$$

Свойство 5.12. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$\boldsymbol{D(X - Y) = D(X) + D(Y)}.$$

Замечание 5.5. Заметим, что свойство 5.11имеет место для любого конечного числа взаимно независимых случайных величин:

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n). \tag{5.12}$$

5.4.6. Среднее квадратическое отклонение

Так как дисперсия определяет квадрат отклонения случайной величины от её среднего значения, то кроме неё вводят ещё одну характеристику.

Определение 5.8. *Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из её дисперсии*:

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}. \tag{5.13}$$

Задача 5.14. *В условиях задачи 5.1 найдите среднее квадратическое отклонение δ.*

Решение. Так как при решении задачи 5.11 было найдено значение дисперсии $D(\delta) = 0,13$, то, согласно формуле 5.13, имеем

$$\sigma(\delta) = \sqrt{0,13} \Rightarrow \boxed{\sigma(\delta) \approx 0,36.}$$

Предположим, что известны средние квадратические отклонения двух независмых случайных величин. О том, как выглядит среднее квадратическое отклонение их суммы, говорит следующая

Теорема 5.3. *Среднее квадратическое отклонение суммы двух независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов среднеквадратических отклонений этих величин:*

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}.$$

Задача 5.15. *Две случайные величины X и Y заданы своими законами распределения:*

X	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Y	−1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,4	0,1

.

1. *Вычислите* $M(X-2Y)$ и $D(X-2Y)$.
2. *Вычислите* $M(2X+3Y)$ и $D(2X+3Y)$.

Решение. вычислим для каждой из случайных величин математическое ожидание и дисперсию.

Согласно формуле 5.5

$$M(X) = 1\cdot 0,5 + 2\cdot 0,3 + 3\cdot 0,2 \Rightarrow M(X) = 1,7;$$
$$M(Y) = -1\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,4 + 2\cdot 0,1 \Rightarrow M(Y) = 0,4.$$

Для того, чтобы вычислить дисперсии, надстроим в каждой из таблиц строки квадратов значений величин:

X^2	1	4	9
X	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Y^2	1	0	1	4
Y	−1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,4	0,1

.

Далее, вычислим $M(X^2)$ и $M(Y^2)$.

$$M(X^2) = 1\cdot 0,5 + 4\cdot 0,3 + 9\cdot 0,2 \Rightarrow M(X^2) = 3,5;$$
$$M(Y^2) = 1\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,4 + 4\cdot 0,1 \Rightarrow M(Y^2) = 1.$$

С помощью 5.11 найдём дисперсии заданных случайных величин:

$$D(X) = 3,5 - (1,7)^2 \Rightarrow D(X) = 0,61;$$
$$D(Y) = 1 - (0,4)^2 \Rightarrow D(Y) = 0,84.$$

Используя свойства математического ожидания случайных величин (см.

5.6 и 5.7), определим математические ожидания заданных линейных комбинаций случайных величин:

$$M(X-2Y)=M(X)-2M(Y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(X-2Y)=1,7-2\cdot 0,4\Rightarrow M(X-2Y)=0,9;$$
$$M(2X+3Y)=2M(X)+3M(Y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(2X+3Y)=2\cdot 1,7+3\cdot 0,4\Rightarrow M(2X+3Y)=4,6.$$

Так как X и Y – независимые случайные величины, то с помощью свойств 5.10 и 5.11 вычислим дисперсии указанных линейных комбинаций случайных величин:

$$D(X-2Y)=D(X)-4M(Y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow D(X-2Y)=0,61+4\cdot 0,84\Rightarrow D(X-2Y)=3,97;$$
$$D(2X+3Y)=4D(X)+9D(Y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow D(2X+3Y)=4\cdot 0,61+9\cdot 0,84\Rightarrow D(2X+3Y)=10.$$

В итоге, имеем

$$\boxed{\begin{array}{l}M(X-2Y)=0,9;\ D(X-2Y)=3,97;\\ M(2X+3Y)=4,6;\ D(2X+3Y)=10.\end{array}}$$

Задача 5.16. *Подбрасывают два игральных кубика. Случайная величина X – сумма выпавших очков. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию.*

Решение. Каждый кубик имеет 6 одинаковых граней. Так как каждый кубик подбрасывается независимо от другого, то согласно **принципу произведения**, общее число вариантов выпадения двух цифр на кубиках равно $n=6\cdot 6$, то есть, $n=36$.

При этом сумма выпавших очков может принимать все целочисленные значения от двух (если выпадет вариант 1-1), до 12 (если выпадет вариант 6-6).

1. $X=2$ A_2=*на первой кости выпало 1 очко* **и** B_2=*на второй кости выпало 1 очко.*

$$P(X=2)=P(A_2)P(B_2)\Rightarrow P(X=2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow P(X=2)=\frac{1}{36}.$$

2. $X=3$ A_{31}=*на первой кости выпало 1 очко* **и** B_{31}=*на второй кости выпало 2 очка* **или** A_{32}=*на первой кости выпало 2 очка* **и** B_{22}=*на второй кости выпало 1 очко.*

$$P(X=3)=P(A_{31})P(B_{31})+P(A_{32})P(B_{32})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(X=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow P(X=3)=\frac{2}{36}.$$

3. $X=4$ A_{41}=*на первой кости выпало 1 очко* **и** B_{41}=*на второй кости выпало 3 очка* **или** A_{42}=*на первой кости выпало 2 очка* **и** B_{42}=*на второй кости выпало 2 очка* **или** A_{43}=*на первой кости*

выпало 3 очка **и** B_{43}=*на второй кости выпало 1 очко.*

$$P(X=3)=P(A_{31})P(B_{31})+P(A_{32})P(B_{32})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow P(X=3)=\frac{2}{36}.$$

Продолжив разбор вариантов выпадения очков для каждого значения суммы аналогичным образом, получим таблицу закона распределения для изучаемой случайной величины X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Складывая вероятности из второй строки:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=1,$$

убеждаемся в правильности составления закона распределения.

Умножая скалярно вектор значений X на вектор вероятностей

$$2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7,$$

находим математическое ожидание $M(X)=7$.

Далее, дополняя таблицу строкой квадратов значений случайной величины

X^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

вычисляем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$4\cdot\frac{1}{36}+9\cdot\frac{2}{36}+16\cdot\frac{3}{36}+25\cdot\frac{4}{36}+36\cdot\frac{5}{36}+49\cdot\frac{6}{36}+64\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+81\cdot\frac{4}{36}+100\cdot\frac{3}{36}+121\cdot\frac{2}{36}+144\cdot\frac{1}{36}=\frac{1974}{36}\approx 54,83.$$

После применения формулы 5.11 находим дисперсию

$$D(X)=54,83-49\Rightarrow D(X)\approx 5,83.$$

Замечание 5.6. Следует заметить, что эту задачу можно было бы решить со значительно меньшими усилиями, если рассматривать искомую случайную величину X как сумму двух случайных величин X_1 и X_2, каждая из которых представляет число выпавших очков на соответствующем кубике.

Так как кубики одинаковы, то $X_1 = X_2$.
Поэтому, $M(X_1) = M(X_2)$ и $D(X_1) = D(X_2)$.

Так как вероятность выпадения одной грани вверх величина постоянная и равная $\frac{1}{6}$, то

$$M(X_1) = M(X_2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(X_1) = M(X_2) = 3,5$$

Аналогично, вычисляем $M(X_1^2) = M(X_2^2)$

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(X_1^2) = M(X_2^2) = \frac{91}{6} \approx 15,16.$$

Следовательно, $D(X_1) = D(X_2) = 15,16 - (3,5)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D(X_1) = D(X_2) \approx 2,91.$$

Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии (см. 5.7 и 5.11)

$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2);\ D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2).$$

Поэтому, $M(X) = 2M(X_1),\ D(X) = 2D(X_1) \Rightarrow$

$$\boxed{M(X) = 7;\ D(X) = 5,82}.$$

§ 5.5. Одинаково распределённые независимые случайные величины

Предположим, что две независмые случайные величины X_1 и X_2 имеют одинаковые распределения. Очевидно, что они имеют и одинаковые числовые характеристики. Рассмотрим среднее арифметическое этих величин.

Обозначим среднее арифметическое этих величин

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Нижеследующие свойства определяют связь между числовыми характеристиками среднего арифметического и соответствующими характеристиками каждой из величин.

Пусть $M(X_1) = M(X_2) = a$, $D(X_1) = D(X_2) = D$, $\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \sigma$.

Свойство 5.13. *Математическое ожидание среднего арифметического двух одинаково распределённых независимых случайных величин равно математическому ожиданию каждой из этих величин:*

$$\boldsymbol{M(\bar{X}) = a}.$$

Свойство 5.14. *Дисперсия среднего арифметического двух одинаково распределённых независимых случайных величин в два раза меньше ди-*

сперсии каждой из них:

$$\boldsymbol{D(\bar{X}) = \frac{D}{2}}.$$

Свойство 5.15. *Среднее квадратическое отклонение среднего арифметического двух одинаково распределённых независимых случайных величин в $\sqrt{2}$ раз меньше среднего квадратического отклонения каждой из них:*

$$\boldsymbol{\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}}.$$

Замечание 5.7. Из свойства 5.15 следует, что среднее арифметическое двух независимых случайных величин имеет меньшее рассеяние, чем каждая из них. Очевидно можно предположить, что для большого количества взаимно независимых случайных величин их среднее арифметическое будет иметь значительно меньшее рассеяние, чем каждая из них. Этим и объясняется, что на практике при проведении большого числа измерений некоторой характеристики выбирают среднее арифметическое этих измерений.

Среди большого мира распределений вероятностей всевозможных дискретных случайных величин наибольший интерес на практике представляют рассмотренные ниже распределения.

§ 5.6. Примеры распределений дискретных случайных величин

5.6.1. Биномиальное распределение вероятностей

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 5.17. *В городе 3 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года, а также найдите математическое ожидание и дисперсию полученного распределения.*

Решение. Пусть случайная величина Y – число банков, обанкротиться в течение следующего года. По условию задачи Y может принимать значения из множества $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Поскольку вероятность банкротства для каждого банка $p = 0,2$ постоянна, то вероятность того, что каждый банк не обанкротится, $q = 0,8$ $(q = 1 - 0,2)$, также постоянна, следовательно, вычисление вероятностей банкротства для каждого банка определяется одной и той же формулой Бернулли (при $n = 3$)

$$\boldsymbol{P_n(k) = p^k q^{n-k}}..$$

Вычислим эти вероятности.
1. $P(Y=0)=C_3^0(0,2)^0\cdot(0,8)^3 \Rightarrow P(Y=0)=0,512.$

2. $P(Y=1)=C_3^1(0,2)^1\cdot(0,8)^2 \Rightarrow P(Y=1)=0,384.$

3. $P(Y=2)=C_3^2(0,2)^2\cdot(0,8)^1 \Rightarrow P(Y=0)=0,096.$

4. $P(Y=3)=C_3^3(0,2)^3\cdot(0,8)^0 \Rightarrow P(Y=0)=0,008.$

Так как сумма найденных вероятностей

$$0,512+0,384+0,096+0,008=1,$$

то закон распределения вероятностей для Y имеет следующий вид:

Y	0	1	2	3
p	0,512	0,384	0,096	0,008

.

Далее, согласно 5.5, вычислим математическое ожидание Y:

$$M(Y)=0\cdot 0,512+1\cdot 0,384+2\cdot 0,096+3\cdot 0,008 \Rightarrow M(Y)=0,6.$$

Построим над таблицей строку квадратов значений Y и определим $M(Y^2)$:

Y^2	0	1	4	9
Y	0	1	2	3
p	0,512	0,384	0,096	0,008

.

$$M(Y^2)=0\cdot 0,512+1\cdot 0,384+4\cdot 0,096+9\cdot 0,008 \Rightarrow M(Y^2)=0,84.$$

Вычитая из полученного результата квадрат математического ожидания, находим:

$$D(Y)=0,84-(0,6)^2 \Rightarrow D(Y)=0,48.$$

Анализируя решение этой задачи можно сделать несколько выводов:
1. Математическое ожидание Y и её дисперсии были вычислены благодаря построению закона распределения вероятностей.
2. Закон распределения вероятностей был построен потому, что случайная величина Y в условии задачи принимала всего три четыре значения.

Возникает вполне естественный вопрос: как искать математическое ожидание и дисперсию, описывающие основные характеристики случайной величины, если случайная величина принимает гораздо большее число значений?

Так как схема Бернулли встречается достаточно часто, то попробуем разобраться с характеристиками случайной величины, вероятности значений которой связаны со схемой Бернулли, в общем случае.

Предположим, что в некотором опыте, состоящем из n независимых исходов, интересующее нас событие A наступает в каждом из этих исходов с постоянной вероятностью p (соответственно не наступает с вероятностью $q = 1 - p$).

Число исходов, в которых может наступить событие A, будем рассматривать как случайную величину X.

Из схемы Бернулли, рассмотренной ранее, вытекает, что вероятность того, что событие A наступит k раз в данном опыте, определяется формулой Бернулли

$$\boldsymbol{P_n(k) = p^k q^{n-k}}.$$

Определение 5.9. *Дискретная случайная величина X называется распределённой по биномиальному закону, если вероятности событий $\{\omega_k : X = k\}$ определяются по формуле Бернулли.*

Построим закон распределения этой величины.
Интересующее нас событие A может в данном опыте наступить 0 раз, 1 раз, 2 раза, ..., $n-1$ раз, n раз. Подставляя в формулу Бернулли значения k, построим таблицу закона распределения:

X	0	1	2	...	k	...	$n-1$	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

.

Чтобы убедиться, что таблица истинна, вычислим сумму вероятностей

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^{n-1} p^{n-1} q + p^n.$$

Так как $q^n = C_n^0 q^n$, а $p^n = C_n^n p^n$, то

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^{n-1} p^{n-1} q + p^n =$$
$$= C_n^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n =$$
$$= (q + p)^n = 1^n = 1.$$

Поскольку сумма вероятностей равна 1, то распределение построено правильно.

Заметим, что сумма вероятностей, в итоге, превратилась в бином Ньютона $(q + p)^n$, который и дал название распределению – *биномиальное* распределение.

Далее, нам нужно вычислить математическое ожидание X. Но решать эту задачу «в лоб» с помощью 5.5 проблематично, так как для этого придётся залезть в дебри комбинаторики.

Подойдём к этой проблеме с другой стороны.
Представим, что случайная величина X – число появлений события A является суммой чисел появлений события A в отдельных испытаниях.

То есть, если случайная величина X_1 – число появлений A в первом испытании; случайная величина X_2 – число появлений A во втором испытании; ...; случайная величина X_n – число появлений A в n–м испытании, то

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Так как каждое из слагаемых в последнем равенстве представляет число появлений события в одном испытании, то закон распределения вероятностей для каждого из них можно описать в виде следующей таблицы:

$X_k = k$	0	1
p	q	p

Следовательно, $M(X_k) = 0 \cdot q + 1 \cdot p \Rightarrow M(X_k) = p, \;\; (k = \overline{1,n})$.

Согласно свойству 5.7 для математического ожидания

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

Подставив вместо каждого слагаемого в равенстве p, получим

$$\boldsymbol{M(X) = np}. \tag{5.14}$$

Применим этот подход для вычисления дисперсии биномиального распределения вероятностей.
Здесь нам придётся учесть что так как каждый исход в опыте не зависит от от другого исхода, то рассматриваемые случайные величины X_k взаимно независимы. Поэтому, согласно свойству 5.11

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Очевидно также, что

$$D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n).$$

Для вычисления $D(X_k)$ добавим в последний закон распределения строку квадратов значений X_k:

$X_k^2 = k^2$	0	1
$X_k = k$	0	1
p	q	p

Найдём $M(X_k^2)$:

$$M(X_k^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p \Rightarrow M(X_k^2) = p, \;\; (k = \overline{1,n}).$$

Вычитая из этого представления квадрат математического ожидания X_k, имеем

$$D(X_k) = p - p^2 \Rightarrow D(X_k) = p(1-p) \Rightarrow D(X_k) = pq \;\; (k = \overline{1,n}).$$

Подставляя последний результат в сумму для вычисления дисперсии X, имеем

$$\boldsymbol{D(X) = npq}. \tag{5.15}$$

Замечание 5.8. Если бы мы знали формулы 5.14 и 5.15 до решения задачи 5.17, то мы бы нашли математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Y гораздо быстрее. Теперь же остаётся только проверить правильность тех вычислений.

В задаче 5.17 $n = 3$, $p = 0,2$, $q = 0,8$. Поэтому,

$$M(Y) = 3{\cdot}0,2 \Rightarrow M(Y) = 0,6; D(Y) = 3{\cdot}0,2{\cdot}0,8 \Rightarrow D(Y) = 0,48.$$

То есть, ошибок ранее мы не допустили.

Замечание 5.9. В заключение заметим, что биномиальное распределение применяется там, где требуется оценка количества успехов в выборке, состоящей из n наблюдений, например, при проведении выборочного контроля за качеством производственных изделий, при котором отбор изделий для пробы производится по схеме случайной повторной выборки, то есть, когда проверенные изделия возвращаются в исходную партию. Тогда количество нестандартных изделий среди отобранных есть случайная величина с биномиальным законом распределения вероятностей.

Кроме этого, биномиальное распределение связано с задачами о случайных блужданиях и перемешиваниях.

С ростом n биномиальное распределение стремится к непрерывному нормальному распределению вероятностей.

Если же при $n \to \infty$ $p \to 0$, таким образом, что произведение $\lambda = np$ является величиной постоянной, биномиальное распределение вероятностей превращается в пуассоновское распределение.

5.6.2. Распределение Пуассона

Определение 5.10. *Дискретная случайная величина X называется распределённой по закону Пуассона, если вероятности событий $\{\omega_k : X = k\}$ определяются по формуле Пуассона:*

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}. \tag{5.16}$$

В отличие от биномиального распределения распределение Пуассона является бесконечным, то есть, случайная величина пробегает счётное множество значений. Поэтому её закон распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\ldots$

.

Чтобы убедиться, что таблица истинна, вычислим сумму вероятностей

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \cdots + \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \ldots.$$

Вынеся $e^{-\lambda}$, как общий множитель, за скобки, имеем

$$e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}\dots+\frac{\lambda^k}{k!}+\dots\right).$$

Если внимательно посмотреть на числовой ряд, образовавшийся в скобке, то можно увидеть, что он представляет из себя ряд Маклорена для функции e^{λ}. Заменив содержимое скобки на сумму ряда, получаем произведение $e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$.

Таким образом, мы показали, что сумма вероятностей равна 1, а значит, распределение построено правильно.

Используя формулу 5.5, вычислим математическое ожидание X:

$$M(X)=0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\lambda e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\dots+k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\dots.$$

С помощью знака сокращённого суммирования перепишем правую часть равенства в компактной форме и преобразуем

$$0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\lambda e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\dots+k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Так как при $k=0$ первое слагаемое суммы обращается в нуль, то изменим нижнее значение индекса суммирования на единицу:

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k(k-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k-1)!}e^{-\lambda}.$$

Представив $\lambda^k=\lambda\cdot\lambda^{k-1}$, вынесем $\lambda e^{-\lambda}$ за знак суммирования:

$$\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{k-1)!}.$$

Заменив переменную суммирования $k-1=m\Rightarrow m=0$, имеем

$$\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

Как мы видели выше, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$ является рядом Маклорена для функции e^{λ}. Следовательно, $M(X)=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{M(X)=\lambda}. \tag{5.17}$$

Далее, дополнив таблицу распределения Пуассона строкой для квадратов значений случайной величины

X^2	0	1	4	…	k^2	…
X	0	1	2	…	k	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

,

определим $M(X^2)$. Для этого представим скалярное произведение векторов строки квадратов и вероятностей в компактном виде и преобразуем

его:
$$0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\lambda e^{-\lambda}+4\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\cdots+k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda\cdot\lambda^{k-1}}{k(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}.$$
Представив $k=(k-1)+1$, перепишем последнюю сумму и разобъём её на две:
$$\lambda\sum_{k=1}^{\infty}((k-1)+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$
Заменив, как и в случае с математическим ожиданием (см. стр.32), $k-1=m\Rightarrow m=0$, преобразуем последнее равенство к виду
$$\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\right).$$
Так как $e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda$ (см. стр. 32), а $\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$, то
$$M(X^2)=\lambda^2+\lambda.$$
Поэтому, вычитая из этого результата квадрат математического ожидания $M(X)$, получаем:
$$\boldsymbol{M(X)=\lambda}. \tag{5.18}$$
Замечание 5.10. В заключение заметим, что распределение вероятностей Пуассона играет важную роль во многих задачах физики, теории связи, теории надежности, теории массового обслуживания.

Литература.

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1997. – 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш.шк., 1975. – 333 с.