

Лекция 1. Метод анализа иерархий (метод Т. Л. Саати)

Метод анализа иерархий (МАИ) состоит в декомпозиции проблемы на более простые составные части и дальнейшей обработке последовательности суждений эксперта по парным сравнениям. Метод анализа иерархий служит для обоснования принятия решений в условиях **определенности** и **многокритериальности**.

Метод базируется на следующих принципах.

Принцип декомпозиции. Данный принцип предусматривает структурирование проблемы в виде иерархии, что является первым этапом применения МАИ. Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня связан со всеми элементами последующего уровня. Простейшая полная иерархия проблемы многокритериального выбора включает в себя три уровня (рис. 1): цель, критерии, альтернативы.

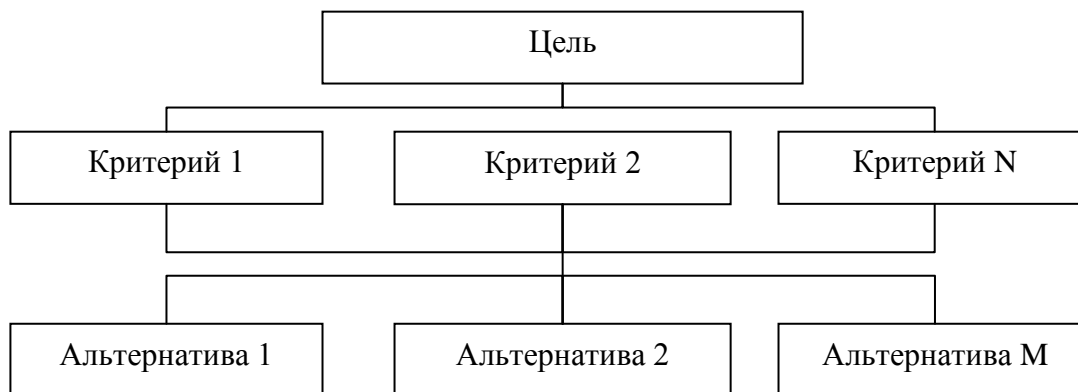


Рис.1. Иерархия проблемы

Принцип сравнительных суждений. Чтобы установить приоритеты критериев и получить оценки для альтернативных решений, в МАИ используется метод парных сравнений - строятся матрицы парных сравнений $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = w_i / w_j$, w_i -- «вес» i -го элемента иерархии.

Очевидно, что $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ (то есть диагональные элементы матрицы равны 1, матрица является обратносимметричной).

По каждой матрице определяется **вектор локальных приоритетов** и вычисляется **индекс согласованности мнений эксперта**.

Принцип синтеза приоритетов. Итак, будем считать, что:

1) построены **матрицы парных сравнений**: одна для **второго уровня иерархии** (для критериев), а на каждом последующем уровне – **столько матриц парных сравнений, сколько элементов содержит предшествующий уровень иерархии** (в каждой матрице – результаты сравнения по одному из критериев);

2) вычислены **векторы локальных приоритетов** по каждой матрице.

Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня иерархии сверху вниз. Локальные приоритеты альтернатив умножаются на приоритеты соответствующих критериев предшествующего уровня и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями. Таким образом, итоговой оценкой альтернативы в методе парных сравнений является вес альтернативы, вычисляемый как свертка весовых коэффициентов критериев (локальных критериев) всех уровней иерархии.

Алгоритм МАИ включает в себя следующие этапы:

1. формирование иерархии целей;
2. определение приоритетов;
3. расчет локальных векторов приоритетов;
4. проверка экспертных оценок на непротиворечивость (вычисление индекса согласованности);
5. расчет приоритетов целей и мероприятий для иерархии в целом на основе синтеза локальных приоритетов.

Рассмотрим эти этапы и проиллюстрируем их **на примере**.

Предприятию необходимо заключить договор о поставке товара либо с посредником 1, либо с посредником 2, либо с предприятием-изготовителем, либо с посредником 3. Выбор необходимо осуществить, оценив следующие факторы:

- *цена товара (руб.);*
- *объем партий товара (шт.);*
- *место расположения поставщика (км);*
- *возможность сбоя поставок (кол-во);*
- *сроки поставок (мес.);*
- *транспортные расходы (руб.).*

В таблице 1 приведены исходные данные для эксперта, на основе анализа которых он строит матрицы парных сравнений.

Таблица 1. Исходные данные

	<i>Цена товара</i>	<i>Объем партий товара</i>	<i>Место расположения поставщика</i>	<i>Сбой поставок</i>	<i>Сроки поставок</i>	<i>Транспортные расходы</i>
<i>Посредник 1</i>	<i>1000</i>	<i>500</i>	<i>1000</i>	<i>1</i>	<i>точно в срок</i>	<i>2000</i>
<i>Посредник 2</i>	<i>1800</i>	<i>200</i>	<i>500</i>	<i>2</i>	<i>1 месяц</i>	<i>1000</i>
<i>Предприятие-изготовитель</i>	<i>800</i>	<i>1000</i>	<i>1500</i>	<i>0</i>	<i>в течение 2 месяцев</i>	<i>3000</i>
<i>Посредник 3</i>	<i>2000</i>	<i>500</i>	<i>100</i>	<i>0</i>	<i>точно в срок</i>	<i>500</i>

Этап 1. Формирование иерархии целей. Производится декомпозиция проблемы принятия решений с выделением главных целей, подцелей и различных целевых функций (альтернатив). Элементы одинаковых уровней должны быть сопоставимы друг с другом с точки зрения возможности установления приоритетов.

Критерии всех уровней иерархии в методе анализа иерархий должны иметь общую направленность (либо положительную, либо отрицательную), то есть либо оцениваются выгоды (доход, прибыль), либо издержки.

Воспользовавшись методом Саати для решения данной проблемы, следует, в первую очередь, четко определить потенциальные выгоды, которые необходимо учитывать. Допустим, что в результате получены следующие иерархии выгод (рис. 2).

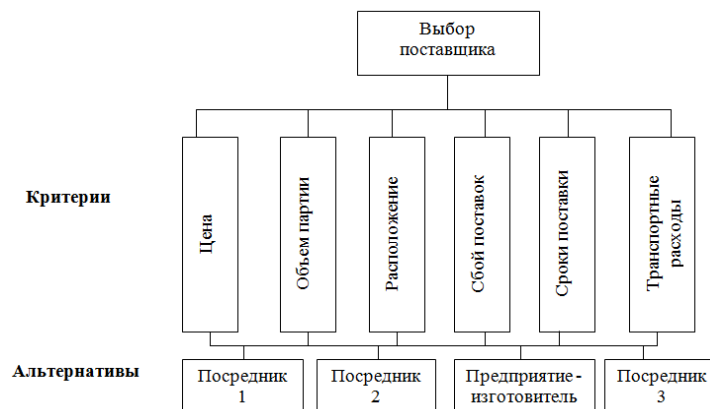


Рис. 2. Иерархия проблемы выбора поставщика

Этап 2. Определение приоритетов. Чтобы установить приоритеты критериев, получить оценки для альтернативных решений, строятся матрицы парных сравнений $A = \|a_{ij}\|$. Элемент a_{ij} матрица парных сравнений является результатом измерения по фундаментальной шкале степени предпочтительности альтернативы A_i по отношению к альтернативе A_j .

Следует помнить, что между собой сравниваются элементы принадлежащие к одному уровню иерархии. При построении матриц парных сравнений пользуются фундаментальной шкалой предпочтений (шкалой относительной важности) (табл. 2).

Таблица 2. Фундаментальная шкала предпочтений (шкала относительной важности)

a_{ij}	Пояснения
1	Равная важность сравниваемых элементов иерархии. Оба сравниваемых элемента имеют <i>одинаковую</i> значимость для элемента более высокого уровня
3	Умеренное превосходство i -го элемента иерархии над j -ым. Предшествующий опыт и оценка говорят <i>о немного большей</i> значимости одного элемента по сравнению с другим
5	Существенное или сильное превосходство i -го элемента. Предшествующий опыт и оценка говорят <i>о более высокой</i> значимости одного элемента по сравнению с другим
7	Значительное превосходство i -го элемента. <i>Очень высокая</i> значимость элемента явно проявилась в прошлом
9	Очень значительное превосходство i -го элемента. Речь идет <i>о максимально возможном различии</i> между двумя элементами
2, 4, 6, 8	Промежуточные степени превосходства. Значения попадают в интервал <i>между</i> определенными выше баллами значимости

Количество ответов экспертов для построения матрицы парных сравнений для n сравниваемых элементов равно $n*(n-1)/2$ или $n^2/2 - n/2$. При заполнении матрицы парных сравнений достаточно определить элементы, расположенные над главной диагональю матрицы. Элементы под диагональю согласно свойству обратной симметричности матрицы вычисляются по формуле $a_{ij} = 1/a_{ji}$.

Первоначально строится **матрица парных сравнений для критериев**, используемых в иерархии (табл. 3). Например, значение на пересечении строки 1 и столбца 2, равное 9, свидетельствует о максимально возможном приоритете критерия цены товара по сравнению с

объемом поставляемых партий. Соответственно объем партии очень мало значим в сравнении с ценой поставки, поэтому значение на пересечении 1-го столбца и второй строки равно 1/9.

Далее для каждого критерия строится матрица парных сравнений всех альтернатив. Например, если трехуровневая иерархия строится для 6 критериев и 4 альтернатив, то всего будет построено 7 матриц парных сравнений (1 матрица размерности 6×6 - для сравнения критериев и 6 матриц размерности 4×4 для сравнения альтернатив по каждому из критериев). Таким образом, общее количество матриц парных сравнений равно количеству критериев плюс 1 (для случая простейшей трехуровневой иерархии).

Этап 3. Расчет локальных векторов приоритетов. Для каждой матрицы мы можем рассчитать локальные приоритеты сравниваемых элементов. Каждой строке матрицы, а, следовательно, соответствующему элементу, ставим в соответствие **геометрическое среднее** ее элементов. Суммируя полученные результаты, **делим геометрические средние каждой из строк матрицы на эту сумму.**

В результате получаем **локальные приоритеты** соответствующих сравниваемых элементов.

Для рассматриваемого примера вектор локальных приоритетов по каждому из критериев вычислен в столбце 9 таблицы 3. В частности, локальный приоритет по критерию **Цена товара** получен как частное от деления 3,947 на 8,886.

Таблица 3. Оценка важности критериев

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Критерий	Цена товара	Объем партии	Место расположения	Сбой поставок	Сроки поставок	Транспортные расходы	Производство	$\sqrt[n]{}$ из производства	Локальный вектор приоритетов
Цена товара	1	9	5	7	4	3	3780	3,947	0,444
Объем партии	1/9	1	1/5	1/3	1/6	1/7	0,0002	0,237	0,027
Место расположения	1/5	5	1	3	1/2	1/3	0,495	0,891	0,100
Сбой поставок	1/7	3	1/3	1	1/4	1/5	0,007	0,439	0,049
Сроки поставок	1/4	6	2	4	1	1/2	6	1,348	0,152
Транспортные расходы	1/3	7	3	5	2	1	69,3	2,030	0,228
Итого	2,04	31,00	11,53	20,33	7,92	5,18		8,886	1,000

На этом этапе можно, в частности, сделать вывод о том, что наиболее значимым критерием при выборе поставщика является цена товара, а наименее значимым – объем поставляемых партий.

Этап 4. Проверка ограниченности оценки приоритетов. На этом этапе вычисляется так называемый **индекс согласованности (ИС)** суждений по каждой матрице

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

где n – размерность матрицы, а λ_{\max} **вычисляется следующим образом:**

- суммируется каждый столбец матрицы парных сравнений;

- сумма первого столбца умножается на первую компоненту локального вектора приоритетов (расположен в первой строке столбца 9 в примере), сумма второго столбца на вторую компоненту и т. д.;
- полученные произведения суммируются.

Затем необходимо сравнить ИС с той величиной, которая получилась бы при случайном выборе суждений по фундаментальной шкале (1/9 ... 9) для заданного значения. Значения этой величины, она называется **случайной согласованностью** (СС), известны и представлены в табл. 4. Заметим, что всегда согласованной является матрица размерности 2.

Значение СС зависит только от размерности матрицы парных сравнений.

Таблица 4. Случайная согласованность

Размерность матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Определив ИС и СС, находим **отношение согласованности** (для матриц размерности больше 2):

$$OC = \frac{ИС}{СС}$$

Если для конкретной матрицы окажется, что **ОС > 0,1**, то можно утверждать, что суждения эксперта, на основе которых заполнена исследуемая матрица, сильно **рассогласованы**, и ему надлежит заполнить матрицу заново, более внимательно используя при этом шкалу парных сравнений. В противном случае суждения эксперта принимаются.

Вычислим отношение согласованности по матрице парных сравнений критериев для нашего примера (см. табл. 3):

$$\lambda_{\max} = (2,04 \times 0,444) + (31,00 \times 0,027) + (11,53 \times 0,100) + (20,33 \times 0,049) + (7,92 \times 0,152) + (5,18 \times 0,228) = 6,277;$$

$$ИС = |\lambda_{\max} - n| / (n-1) = |6,277 - 6| / (6-1) = 0,055;$$

$$\text{Для } n=6 \text{ из табл. 4 получаем } СС=1,24. \text{ Тогда } ОС = ИС / СС = 0,055 / 1,24 = 0,045 \leq 0,1.$$

Полученное значение ОС не превосходит 0,1, что означает, что **оценки эксперта согласованы**.

Проверка рассогласованности позволяет выявить ошибки, которые мог допустить эксперт при заполнении матрицы парных сравнений. Ошибки (противоречия) могут быть следующими: например, эксперт указывает, что альтернатива А1 хуже, чем А2, а альтернатива А2 хуже, чем А3; но при этом эксперт указывает также, что А1 лучше, чем А3. Пример матрицы парных сравнений, содержащей такую ошибку, приведен в таблице:

	A1	A2	A3
A1	1	1/3	2
A2	3	1	1/5
A3	1/2	5	1

Возможны также ошибки следующего вида: эксперт указывает, что альтернатива А1 значительно хуже, чем А2, а альтернатива А2 значительно хуже, чем А3, но при этом эксперт указывает также, что А1 лишь немного хуже, чем А3. Пример матрицы парных сравнений с такой ошибкой приведен в таблице:

	A1	A2	A3
A1	1	1/7	1/3
A2	7	1	1/6
A3	3	6	1

На этом этапе последовательно вычисляются локальные векторы приоритетов и проверяется согласованность результатов каждого элемента иерархии. Выполним расчеты для нашего примера (см. таблицы 5 - 10).

Выявление приоритетов по фактору **Цена товара** представлено в таблице 5.

Таблица 5. Цена товара

Цена товара	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	Произведение	$\sqrt[4]{}$ из произведения	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	7	1/2	8	28	2,300	0,355
Посредник 2	1/7	1	1/8	2	0,36	0,435	0,067
Изготовитель	2	8	1	9	144	3,464	0,534
Посредник 3	1/8	1/2	1/9	1	0,007	0,289	0,044
Итого	3,27	16,50	1,74	20,00		6,488	1,00

Оценка согласованности мнений эксперта:

$$\lambda_{\max} = (3,27 \times 0,355) + (16,50 \times 0,067) + (1,74 \times 0,534) + (20,00 \times 0,044) = 4,076;$$

$$\text{ИС} = |4,076 - 4| / (4 - 1) = 0,025;$$

$$\text{ОС} = \text{ИС} / \text{СС} = 0,025 / 0,9 = \mathbf{0,028} \leq 0,1.$$

По критерию **Цена товара** наиболее приоритетным является изготовитель товара.

Таблица 6. Объем партии

Объем партии	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{}$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	4	1/6	1	0,904	0,143
Посредник 2	1/4	1	1/9	1/4	0,289	0,046
Изготовитель	6	9	1	6	4,243	0,669
Посредник 3	1	4	1/6	1	0,904	0,143
Итого	8,25	18	1,44	8,25	6,339	1,00

Оценка согласованности мнений эксперта:

$$\lambda_{\max} = (8,25 \times 0,143) + (18,0 \times 0,046) + (1,44 \times 0,669) + (8,25 \times 0,143) = 4,151;$$

$$\text{ИС} = |4,151 - 4| / (4 - 1) = 0,050;$$

$$\text{ОС} = 0,050 / 0,9 = \mathbf{0,056} \leq 0,1.$$

По критерию **Объем партии** наиболее приоритетным является изготовитель товара.

Таблица 7. Место расположения поставщика

Место расположения	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{}$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	1/5	3	1/7	0,541	0,085
Посредник 2	5	1	7	1/3	1,848	0,291
Изготовитель	1/3	1/7	1	1/9	0,270	0,042
Посредник 3	7	3	9	1	3,708	0,582
Итого	13,33	4,34	20,00	1,59	6,367	1,00

Оценка согласованности мнений эксперта:

$$\lambda_{\max} = (13,33 \times 0,085) + (4,34 \times 0,290) + (20,00 \times 0,042) + (1,59 \times 0,582) = 4,157;$$

$$\text{ИС} = |4,157 - 4| / (4 - 1) = 0,052;$$

$$\text{ОС} = 0,052 / 0,9 = \mathbf{0,058} \leq 0,1.$$

По критерию **Место расположения поставщика** наиболее приоритетным является посредник 3.

Таблица 8. Сбой поставок

Сбой поставок	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{}$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	5	1/5	1/5	0,669	0,11
Посредник 2	1/5	1	1/9	1/9	0,280	0,037
Изготовитель	5	9	1	1	2,590	0,427
Посредник 3	5	9	1	1	2,590	0,427
Итого	11,20	24	2,31	2,31	6,072	1,00

Оценка согласованности мнений эксперта:

$$\lambda_{\max} = (11,50 \times 0,11) + (24 \times 0,037) + (2,31 \times 0,427) + (2,31 \times 0,427) = 4,09;$$

$$\text{ИС} = |4,09 - 4| / (4 - 1) = 0,03;$$

$$\text{ОС} = 0,03 / 0,9 = \mathbf{0,032} \leq 0,1.$$

По критерию **Сбой поставок** наиболее высоким приоритетом обладают 2 поставщика: изготовитель товара и посредник 3.

Таблица 9. Сроки поставки

Сроки поставки	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{}$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	5	7	1	2,432	0,424
Посредник 2	1/5	1	3	1/5	0,589	0,103
Изготовитель	1/7	1/3	1	1/7	0,287	0,050
Посредник 3	1	5	7	1	2,432	0,424
Итого	2,34	11,33	18,00	2,34	5,740	1,00

Оценка согласованности мнений эксперта:

$$\lambda_{\max} = (2,34 \times 0,424) + (11,33 \times 0,103) + (18,00 \times 0,050) + (2,34 \times 0,424) = 4,051;$$

$$\text{ИС} = |4,051 - 4| / (4 - 1) = 0,017;$$

$$\text{ОС} = 0,017 / 0,9 = \mathbf{0,019} \leq 0,1.$$

По критерию **Сроки поставки** наиболее высоким приоритетом обладают 2 поставщика: посредник 1 и посредник 3.

Таблица 10. Транспортные расходы

Транспортные расходы	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{}$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	1/5	3	1/7	0,541	0,085
Посредник 2	5	1	7	1/3	1,848	0,29
Изготовитель	1/3	1/7	1	1/9	0,270	0,042
Посредник 3	7	3	9	1	3,708	0,582
Итого	13,33	4,34	20,00	1,59	6,367	1,00

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda_{\max} = (13,33 \times 0,085) + (4,34 \times 0,290) + (20,00 \times 0,042) + (1,59 \times 0,582) = 4,157;$$

$$\text{ИС} = |4,157 - 4| / (4 - 1) = 0,052;$$

$$\text{ОС} = 0,052 / 0,9 = \mathbf{0,058} \leq 0,1.$$

По критерию **Транспортные расходы** наиболее высоким приоритетом обладает посредник 3.

Этап 5. Расчет приоритетов для всей иерархии в совокупности

Теперь обратимся непосредственно к принципу синтеза приоритетов.

Локальные приоритеты альтернатив умножаются на приоритеты соответствующих критериев уровня и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями. В результате определяются **глобальные приоритеты альтернатив** с учетом приоритетов критериев. **Наиболее высокий рейтинг будет соответствовать альтернативе с наибольшим значением глобального приоритета.**

Расчет вектора глобальных приоритетов приведен в таблице 11. Красным выделены приоритеты критериев, вычисленные в таблице 3.

Таблица 11. Расчет глобального приоритета

	Векторы приоритетов						Глобальный приоритет (ГП)
	Цена товара	Объем партии	Место расположения поставщика	Сбой поставок	Сроки поставки	Транспортные расходы	
	0,444	0,027	0,100	0,049	0,152	0,228	
Посредник 1	0,355	0,143	0,085	0,11	0,424	0,085	0,259
Посредник 2	0,067	0,046	0,291	0,037	0,103	0,29	0,144
Изготовитель	0,534	0,669	0,042	0,427	0,050	0,042	0,297
Посредник 3	0,044	0,143	0,582	0,427	0,424	0,582	0,3
Сумма							1,00

$$ГП(1) = (0,444 \times 0,355) + (0,027 \times 0,143) + (0,100 \times 0,085) + (0,049 \times 0,109) + (0,152 \times 0,424) + (0,228 \times 0,085) = 0,259;$$

$$ГП(2) = (0,444 \times 0,067) + (0,027 \times 0,046) + (0,100 \times 0,291) + (0,049 \times 0,037) + (0,152 \times 0,103) + (0,228 \times 0,290) = 0,144;$$

$$ГП(изг) = (0,444 \times 0,534) + (0,027 \times 0,669) + (0,100 \times 0,042) + (0,049 \times 0,427) + (0,152 \times 0,050) + (0,228 \times 0,042) = 0,297;$$

$$ГП(3) = (0,444 \times 0,044) + (0,027 \times 0,143) + (0,100 \times 0,582) + (0,049 \times 0,427) + (0,152 \times 0,424) + (0,228 \times 0,582) = 0,3;$$

Сравнивая полученные значения глобальных приоритетов, определяем рейтинги всех поставщиков. В приведенном примере наибольший приоритет **0,3** оказался у **посредника 3**. Согласно проведенному оцениванию по МАИ предпочтение следует отдать именно этому поставщику.