Лекция 8. Синтез КИХ-фильтров методом окон

1. Синтез идеального КИХ-фильтра.
2. Синтез КИХ-фильтра методом окон.
3. Итерационная процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон.

8.1. Синтез идеального КИХ-фильтра

Постановка задачи: синтезировать *идеальный* КИХ-фильтр с ЛФЧХ.

Синтез ЦФ заключается в расчете передаточной функции (4.6):

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}. \tag{4.6}$$

Следовательно, *синтез КИХ-фильтра сводится к расчету* ИХ $h(n)$.

Решение задачи

Проиллюстрируем на примере ФНЧ.

В качестве КИХ-фильтра выберем КИХ-фильтра *1-го типа*.

АЧХ идеального ФНЧ $A_и(\hat{\omega})$ представлена на рис. 8.1.

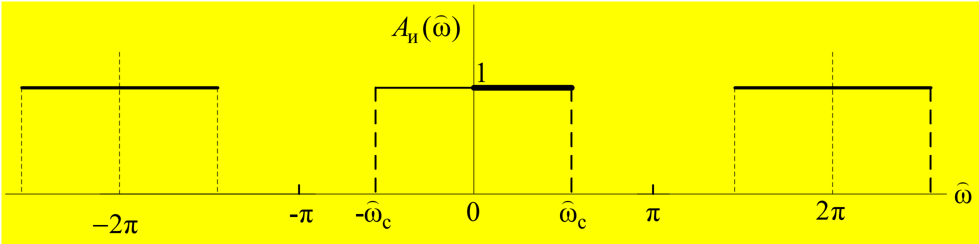


Рис. 8.1. АЧХ идеального ФНЧ

В *основной полосе частот* $[0\,;\pi]$:

$$A_и(\hat{\omega})=\left|H_и(e^{j\hat{\omega}})\right|=\begin{cases}1, & 0\le\hat{\omega}\le\hat{\omega}_c;\\ 0, & \hat{\omega}_c<\hat{\omega}\le\pi.\end{cases} \tag{8.1}$$

ЛФЧХ $\varphi(\hat{\omega})$ КИХ-фильтра 1-го (см. табл. в Лекции 7):

$$\varphi(\hat{\omega})=-\frac{R}{2}\hat{\omega}. \tag{8.2}$$

ЧХ идеального ФНЧ:

$$H_и(e^{j\hat{\omega}})=\left|H_и(e^{j\hat{\omega}})\right|e^{j\arg\left\{H_и(e^{j\hat{\omega}})\right\}}=A_и(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \tag{8.3}$$

Периодичность функции $H_и(e^{j\omega T})$ позволяет ее представить в виде *ряда Фурье в частотной области*:

$$H_и(e^{j\hat{\omega}})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_и(n)e^{-j\hat{\omega}n}, \tag{8.4}$$

где коэффициенты Фурье — ИХ идеального КИХ-фильтра:

$$h_и(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_и(e^{j\hat{\omega}})e^{j\hat{\omega}n}d\hat{\omega}. \tag{8.5}$$

Определим $h_и(n)$:

$$h_и(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_и(\hat{\omega})e^{-j\frac{R}{2}\hat{\omega}}e^{j\hat{\omega}n}d\hat{\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\hat{\omega}_c}^{\hat{\omega}_c} e^{j\hat{\omega}\left(n-\frac{R}{2}\right)}d\hat{\omega}=$$

$$h_{\text{и}}(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{e^{j\widehat{\omega}(n-\frac{R}{2})}}{j\left(n-\frac{R}{2}\right)} \right|_{-\widehat{\omega}_{\text{c}}}^{\widehat{\omega}_{\text{c}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\widehat{\omega}_{\text{c}}(n-\frac{R}{2})} - e^{-j\widehat{\omega}_{\text{c}}(n-\frac{R}{2})}}{j\left(n-\frac{R}{2}\right)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left[\widehat{\omega}_{\text{c}}\left(n-\frac{R}{2}\right)\right]}{\left(n-\frac{R}{2}\right)}$$

В точке $n = \frac{R}{2}$ имеем неопределенность (0/0). Раскроем ее (определим производные по n в числителе и знаменателе):

$$\frac{\widehat{\omega}_{\text{c}}}{\pi} \cdot \frac{\cos\left[\widehat{\omega}_{\text{c}}\left(n-\frac{R}{2}\right)\right]}{1} = \frac{\widehat{\omega}_{\text{c}}}{\pi}.$$

Окончательно:

$$h_{\text{и}}(n) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left[\widehat{\omega}_{\text{c}}\left(n-\frac{R}{2}\right)\right]}{\left(n-\frac{R}{2}\right)}, & n \neq \frac{R}{2}; \\ \frac{\widehat{\omega}_{\text{c}}}{\pi}, & n = \frac{R}{2}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Импульсная характеристика $h_{\text{и}}(n)$ (см. рис. 8.2, *а*):

1. Симметрична относительно $n = \frac{R}{2}$.

1. $h_{\text{и}}(n)$ — бесконечная, а мы синтезируем КИХ-фильтр.

2. $h_{\text{и}}(n)$ — реакция, которая предшествует воздействию, а значит, нарушается условие *физической реализуемости*, т. е. идеальный КИХ-фильтр физически не реализуем.

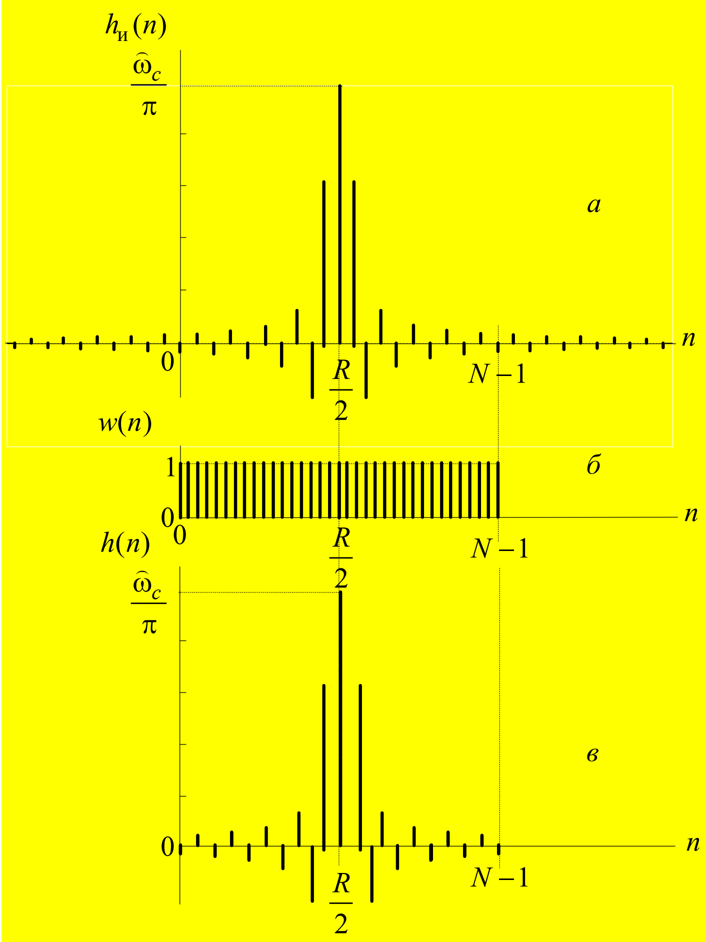


Рис. 8.2. ИХ идеального КИХ-фильтра (*а*), окно Дирихле (*б*), ИХ КИХ-фильтра (*в*)

8.2. Синтез КИХ-фильтра методом окон

ИХ *реального* КИХ-фильтра равна (рис. 8.2, *в*):

$$h(n) = \begin{cases} h_и(n), & 0 \le n \le N-1; \\ 0, & n < 0 \text{ и } n > N-1. \end{cases} \tag{8.7}$$

Ее можно представить в виде произведения (см. рис. 8.2 б):

$$h(n) = h_и(n)w(n) \ , \tag{8.8}$$

где весовая функция $w(n)$ — прямоугольное окно (*окно Дирихле*):

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1; \\ 0, & n < 0 \text{ и } n > N-1. \end{cases} \tag{8.9}$$

Изменение ИХ приводит к *усечению* ряда Фурье (8.4), а следовательно, изменению идеальной АЧХ.

В частотной области произведению (8.8) соответствует *свертка*.

Однако мы не будем ее определять, а рассмотрим качественно, к каким изменениям *идеальной* АЧХ приведем применение окна Дирихле. С этой целью найдем его *Фурье-изображение*:

$$W(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j\hat{\omega}}\right)^n = \frac{1-e^{-jN\hat{\omega}}}{1-e^{-j\hat{\omega}}} =$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\hat{\omega}N}{2}}\left(e^{j\frac{\hat{\omega}N}{2}} - e^{-j\frac{\hat{\omega}N}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}\left(e^{j\frac{\hat{\omega}}{2}} - e^{-j\frac{\hat{\omega}}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)} e^{-j\hat{\omega}\frac{R}{2}}.$$

Множитель $e^{-j\hat{\omega}\frac{R}{2}}$ характеризует линейный сдвиг ФЧХ КИХ-фильтра.

Свертка идеальной АЧХ с Фурье-изображением окна Дирихле — *амплитудная функция* КИХ-фильтра $B(\hat{\omega})$ — представлена рис. 8.3:

$$A(\hat{\omega}) = \left|B(\hat{\omega})\right|. \tag{8.10}$$

Применение окна Дирихле приводит к следующим изменением идеальной АЧХ:

1. Вместо «горизонталей» в ПП и ПЗ имеем пульсации с максимальной амплитудой на границах ПП и ПЗ, равной 0,09.

   С ростом длины КИХ-фильтра пульсации становятся более высокочастотными, но максимальная амплитуда остается неизменной — 0,09.

   Этот феномен называют **эффектом Гиббса**,

2. Вместо «вертикали» между ПП и ПЗ появляется *переходная полоса*.

   С ростом длины КИХ-фильтра ширина переходной полосы уменьшается.

3. Середина переходной полосы — *частота разрыва* $\hat{\omega}_c$ — соответствует $B(\hat{\omega}) = 0,5$.

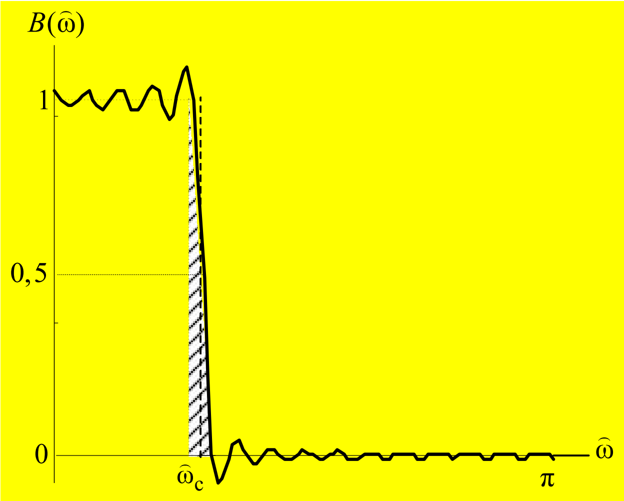


Рис. 8.3. Амплитудная функция КИХ-фильтра ФНЧ с окном Дирихле (эффект Гиббса)

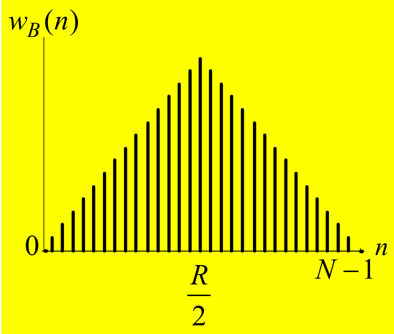
Для *устранения эффекта Гиббса* применяют другие окна: Кайзера, Хэмминга, Хэнна, Хэннинга и др. (рис. 8.4).

«Платой» за устранение эффекта Гиббса (уменьшение δ_1 и δ_2) является *расширение переходной полосы*. Поэтому при заданных граничных частотах ПП и ПЗ приходится увеличивать порядок (длину) КИХ-фильтра.

Это не позволяет синтезировать **оптимальный** КИХ-фильтр — минимально возможного порядка при заданных требованиях к АЧХ.

Это — *недостаток* метода окон.

Достоинство метода окон заключается в его простоте и следовательно, возможности реализации в реальном времени.



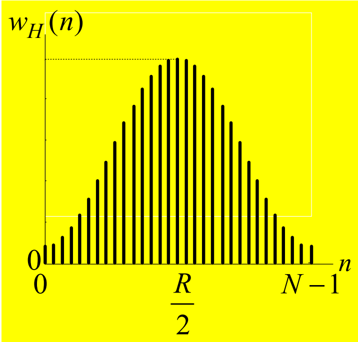


Рис. 8.4. Окно Бартлетта (треугольное). Окно Хэмминга

8.3. Итерационная процедура синтеза КИХ-фильтра методом окон

1. Задание требований к АЧХ.
2. Выбор окна и *оценка* порядка КИХ-фильтра.

   Длина окна N связана с порядком КИХ-фильтра R: $N = R + 1$.
3. Синтез КИХ-фильтра — расчет передаточной функции $H(z)$.

   Для КИХ-фильтра это сводится к расчету *импульсной характеристики* $h(n)$.
4. Уточнение порядка КИХ-фильтра в результате проверки выполнения требований к АЧХ:
   - ✓ если *не выполняются* — порядок КИХ-фильтра увеличивают.
   - ✓ если *выполняются* — порядок КИХ-фильтра уменьшают.

   В результате определяют *минимальный порядок* $R_{\min}$, при котором выполняются требования к АЧХ.

   При увеличении/уменьшении порядка *необходимо обращать внимание на тип избирательности и тип КИХ-фильтра*!
5. Выбор структуры КИХ-фильтра — прямая или прямая приведенная.