Глава 11

Формула Гаусса-Остроградского

11.1 Необходимые сведения из теории

Мы уже привлекали формулу Гаусса-Остроградского на восьмом занятии для вычисления объемов тел. Здесь же займемся систематическим применением этой формулы к анализу различных поверхностных и объемных интегралов. В отличие от восьмого занятия, где формула Гаусса-Остроградского записывалась в декартовой системе координат:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\,, \tag{11.1}$$

ниже будем преимущественно использовать ее инвариантную, независящую от выбора системы координат, форму:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A}\, dV\,. \tag{11.2}$$

Здесь $\vec{n}$ –единичный вектор внешней нормали к замкнутой поверхности $\mathcal{S}$, ограничивающей область $\mathcal{V}$ интегрирования в объемном интеграле.

При решении задач данного занятия полезно вспомнить, что в декартовой системе координат компонентами вектора $\vec{n}$ служат *направляющие косинусы* $\{\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma\}$ –косинусы углов наклона этого вектора к осям координат (x, y, z). Напомним еще, что $\{P, Q, R\}$ –компоненты, вдоль указанных осей, интегрируемого векторного поля $\vec{A}$.

Замечание 11.1 Физики предпочитают записывать соотношение (2) на языке вектора набла:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) dS\,.$$

Эту формулу легко запомнить, пользуясь мнемоническим правилом, согласно которому при переходе от поверхностного интеграла к объемному надо просто заменить в скалярном произведении вектор $\vec{n}$ на вектор набла.

Инвариантность соотношения (2) — его независимость от выбора системы координат, обусловлена инвариантностью понятия дивергенции, обсужденной на занятии 9. Подчеркнем, представление формулы Гаусса-Остроградского в инвариантной форме демонстрирует ее фундаментальный характер и делает более естественным использование этой формулы в разнообразных приложениях.

Кроме извлечения выгод из инвариантной формы записи формулы Гаусса-Остроградского, еще одной особенностью данного занятия будет проведение вычислений на языке вектора набла, делающее операции с векторными полями проще и нагляднее.

В заключение отметим, что формула Гаусса-Остроградского лежит в основе многих фундаментальных законов природы. Проиллюстрируем сказанное парой примеров, иллюстрирующих использование формулы Гаусса-Остроградского при выводе основных уравнений математической физики.

Пример 11.1 **Вывод уравнения непрерывности.** Пусть в пространстве движется сплошная среда, плотность которой в произвольной точке с радиус-векто ром $\vec{r}$ и в текущий момент времени t равна $\rho(\vec{r}\,,t)$. Мысленно выделим произвольную неподвижную область $\mathcal{V}$ пространства, ограниченную замкнутой поверхностью $\mathcal{S}$. Масса среды, заключенной в данной области в момент t, равна объемному интегралу

$$M(t) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}\,,t)\, dV\,.$$

Пусть далее $\vec{G}\,(\vec{r}\,t)$ –векторная плотность потока, такая что масса среды, протекающей через элементарную площадку dS в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}$ за время dt, равна $dm = (\vec{G}\cdot\vec{n}\,)dS\,dt$. Если внутри области $\mathcal{V}$ нет источников и стоков, то скорость убывания массы среды в выбранном объеме $\mathcal{V}$ равна полному потоку среды из ограничивающей его замкнутой поверхности $\mathcal{S}$:

$$-\frac{dm}{dt} = -\iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{G}\cdot\vec{n}\,)\, dS\,. \tag{11.3}$$

Здесь, как и всюду прежде, $\vec{n}$ –единичный вектор внешней нормали к поверхности $\mathcal{S}$. Заменив, с помощью формулы Остроградского-Гаусса, входящий в (3) поверхностный интеграл на объемный, придем к тождеству:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{G}\right\} dV \equiv 0\,.$$

Из произвольности области $\mathcal{V}$ следует, что тождество это будет справедливо лишь если всюду равно нулю подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}\,,t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{G}\,(\vec{r}\,,t) = 0\,. \tag{11.4}$$

Элементарные физические соображения подсказывают, что поток сплошной среды равен $\vec{G} = \rho\,\vec{u}$, где $\vec{u}(\vec{r},t)$ –поле скорости движения среды. Таким образом, мы пришли к одному из фундаментальных уравнений гидромеханики — уравнению непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho\,\vec{u}) = 0\,. \tag{11.5}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ плотность среды всюду была одинаковой: $\rho(\vec{r}, t = 0) = \rho_0 = \text{const}$. Если среда несжимаема, то ее плотность и в дальнейшем останется неизменной: $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 = \text{const}$, а уравнение непрерывности вырождается в тождество

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{r}, t) \equiv 0\,. \tag{11.6}$$

Векторные поля, удовлетворяющие данному тождеству называют *вихревыми* поскольку их векторные линии не имеют начала и конца и образуют замкнутые контуры. Физическими примерами вихревых полей служат поля скорости практически несжимаемых атмосферы и океана.

Пример: Уравнение диффузии. Получим, с помощью формулы Гаусса-Остроградского, еще одно важное уравнение математической физики. Пусть $\rho(\vec{r}, t)$ –концентрация частиц чернильной капли, помещенной в стакан воды. Из физики известно, что за счет хаотических столкновений молекул чернил с молекулами воды чернильная капля с течением времени расплывается. Причем, согласно *закону Фика*, векторная плотность потока чернил равна

$$\vec{G} = -D \operatorname{grad} \rho(\vec{r}, t)\,. \tag{11.7}$$

Здесь D –так называемый *коэффициент диффузии.* Подставив правую часть закона Фика в уравнение (4), придем к знаменитому уравнению диффузии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho\,. \tag{11.8}$$

Замечание 11.2 Можно показать, что точно такому же уравнению подчиняется поле температур неравномерно нагретого однородного тела. Только коэффициент D в этом случае заменяется на коэффициент температуропроводности.

11.2 Задачи в классе

Задача 11.1

(4378) Применяя формулу Гаусса-Остроградского, преобразовать следующий поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$$

в объемный. Здесь поверхность $\mathcal{S}$ ограничивает конечный объем $\mathcal{V}$, а

$$\{\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma\}$$

–направляющие косинусы внешней нормали к гладкой поверхности $\mathcal{S}$.

Решение 11.1 Из вида поверхностного интеграла легко установить, чему равны компоненты векторного поля $\vec{A}$:

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Его геометрический смысл очевиден: это единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения с координатами (x, y, z):

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Дивергенцию данного векторного поля вычислим, оперируя вектором набла:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)$$

и вспомнив из предыдущих занятий, что

$$\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} \Longrightarrow \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Следовательно, искомая дивергенция поля $\vec{A}$ примет вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{r^3}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,) + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}\,.$$

Подставив полученное выражение в правую часть формулы Гаусса-Остроградского (2), получим окончательно:

$$I = 2\iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{dV}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 2\iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{dV}{r}\,.$$

Задача 11.2
(4380) Преобразовать к объемному поверхностный интеграл:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS\,. \tag{$*$}$$

Решение 11.2 Внимательно взглянув на подынтегральное выражение, нетрудно догадаться, что интегрируемое векторное поле, обозначим его

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}\,]$$

–равно ротору векторного поля $\vec{A} = \vec{i}\,P + \vec{j}\,Q + \vec{k}\,R$. Следовательно, исследуемый интеграл равен

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,)dS\,.$$

А как мы знаем из предыдущего занятия, дивергенция ротора произвольного векторного поля тождественно равна нулю: $(\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}\,]) \equiv 0$. Соответственно, равен нулю объемный

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}\,dV\,,$$

а вслед за ним и исследуемый интеграл.

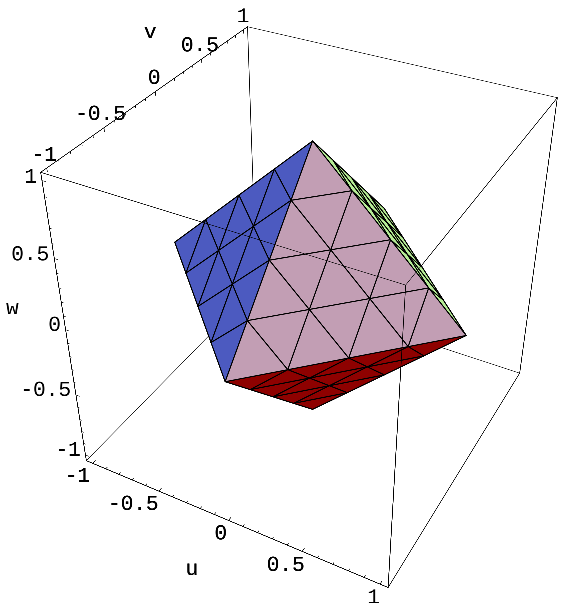

Рис. 11.1: Иллюстрация к задаче 3: График октаэдра в новой системе координат (u, v, w). На октаэдре нанесены линии пересечения его координатными плоскостями.

Задача 11.3
(4389) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить интеграл:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x - y + z)\, dydz + (y - z + x)\, dzdx + (z - x + y)\, dxdy\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\,.$$

Решение 11.3 Интегрируемое векторное поле равно:

$$\vec{A} = \vec{i}\,(x - y + z) + \vec{j}\,(y - z + x) + \vec{k}\,(z - x + y)\,.$$

Его дивергенцию легко сосчитать, пользуясь выражением для дивергенции в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x + y) = 3\,.$$

Таким образом, поверхностный интеграл сводится к объемному интегралу:

$$I = 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} dxdydz\,.$$

Осталось вычислить объем фигуры, ограниченной указанной в условии поверхностью. Проблема однако состоит в том, что мы плохо представляем себе геометрическую форму фигуры, объем которой предстоит найти. Поэтому естественно перейти в новую систему координат, в которой данная поверхность описывается геометрически более наглядными выражениями.

Первое, что приходит в голову — взять за новые координаты стоящие под знаком модулей комбинации x, y, z:

$$\begin{cases} u = x - y + z\,, \\ v = y - z + x\,, \\ w = z - x + y\,. \end{cases}$$

При этом уравнение поверхности примет "более прозрачный" вид:

$$|u| + |v| + |w| = 1\,.$$

Вычислим прежде всего якобиан

$$J = \frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(u,v,v)}$$

перехода от старых координат x, y, z к новым u, v, w. Он необходим чтобы свести объемный интеграл в пространстве (x,y,z) к объемному интегралу в пространстве u,v,w. Поскольку мы не располагаем явными формулами, выражающими старые координаты через новые, воспользуемся известным равенством:

$$\frac{1}{J} = \frac{\mathcal{D}(u,v,w)}{\mathcal{D}(x,y,z)}\,.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \iff J = \frac{1}{4}\,.$$

Заметим еще, что в деформированном пространстве, где (u,v,w) играют роль декартовых координат, интересующая нас область $\mathcal{V}'$ приобрела простую геометрическую форму — это симметричный октаэдр, ограниченный в каждом октанте плоскостью, отсекающей от осей единичные отрезки. Так в первом октанте $u > 0,\ v > 0,\ w > 0$ это плоскость, заданная уравнением $u + v + w = 1$. Соответственно, кусок октаэдра в 1-м (как и во всех остальных) октанте представляет из себя пирамиду с площадью основания, равной $1/2$ и высотой 1. Объем такой пирамиды равен $1/6$, а объем всего октаэдра равен $8/6 = 4/3$. Следовательно:

$$I = \frac{3}{4} \iiint\limits_{\mathcal{V}'} du dv dw = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1\,.$$

Те кто забыл объем пирамиды или предпочитают более формальный подход к решению задачи, могут непосредственно вычислить интеграл по области, находящейся в 1-м октанте:

$$I = \frac{3}{4} 8 \iiint\limits_{\substack{u+v+w \le 1 \\ u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0}} du dv dw = 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = 1\,.$$

Задача 11.4
(4390) Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS\,,$$

где $\mathcal{S}$ –часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ –направляющие косинусы ее внешней нормали.

Решение 11.4 Чтобы иметь возможность применить формулу Гаусса-Остроградского, замкнем коническую поверхность "крышкой" –кругом в плоскости $z = h$: $x^2 + y^2 < h^2$. Найдем вначале вклад от круглой крышки. Он равен:

$$L = \iint\limits_{\sigma} h^2 dxdy\,,$$

где σ –указанный круг радиуса h и площадью $\pi\, h^2$. Здесь учтено также, что

$$\cos\alpha = \cos\beta = 0 \qquad \cos\gamma = 1 \qquad \text{а на поверхности крышки} \quad z = h\,.$$

Следовательно, $L = \pi\, h^4$.

Из теоремы Гаусса-Остроградского следует, что сумма вкладов конической поверхности и крышки равна объемному интегралу:

$$I + L = I + \pi\, h^4 = 2 \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x + y + z)\, dV\,.$$

По-видимому, исходя из симметрии области интегрирования, полученный объемный интеграл удобнее всего вычислить, перейдя в цилиндрическую систему координат:

$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \quad \Rightarrow \quad dV = \rho\, d\rho d\varphi\, dz\,.$$

В итоге получим:

$$I + \pi\, h^4 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^z \rho\, d\rho[\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + z]\,.$$

Учитывая, что интегралы от тригонометрических функций по периоду 2π равны нулю, имеем:

$$I + \pi\, h^4 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z\, dz \int_0^z \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z^3\, dz = 2\pi\frac{h^4}{4} = \pi\frac{h^4}{2}\,.$$

Отсюда

$$I = -\pi\frac{h^4}{2}\,.$$

Задача 11.5
(4391) Доказать формулу:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{S}} \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}})\, dS\,,$$

где $\mathcal{S}$ –замкнутая поверхность, ограничивающая объем $\mathcal{V}$, $\vec{n}$ –внешняя нормаль к поверхности $\mathcal{S}$ в текущей ее точке $(x,\, y,\, z)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\,,$$

и $\vec{r}$ –радиус-вектор, идущий от точки наблюдения (x_0, y_0, z_0) к точке поверхности (x, y, z).

Решение 11.5 Перепишем поверхностный интеграл в более привычной для нас векторной форме. Для этого заметим, что $\cos(\vec{r} \overset{\wedge}{,} \vec{n})$ равен скалярному произведению единичной нормали $\vec{n}$ и единичного вектора $\vec{r}/r$, направленного вдоль радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\cos(\vec{r} \overset{\wedge}{,} \vec{n}) = \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}\right)\,.$$

Следовательно, поверхностный интеграл в формуле Гаусса может быть записан в виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}\right) dS\,,$$

где $\vec{n}$ –единичный вектор внешней нормали. Формула Гаусса-Остроградского преобразует этот интеграл в объемный от дивергенции

$$\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}\,.$$

Замечание 11.1 Мы сразу выписали результат, поскольку уже вычисляли дивергенцию единичного вектора в направлении радиус-вектора на этом занятии, в задаче 1. Тот факт, что прежде радиус-вектор был выпущен из начала координат, а сейчас из некоторой точки с координатами (x_0, y_0, z_0), не меняет сути дела, поскольку дивергенция векторного поля не зависит от системы координат, а лишь от поведения в окрестности рассматриваемой точки, в нашем случае точки с координатами (x, y, z).

Таким образом, мы доказали требуемую формулу.

Задача 11.6
(4392) Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x,y,z) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\cos(\vec{r} \overset{\wedge}{,} \vec{n}\,)}{r^2}\, dS\,,$$

где $\mathcal{S}$ –простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем $\mathcal{V}$, $\vec{n}$ –внешняя нормаль к поверхности $\mathcal{S}$ в ее точке (x, y, z), $\vec{r}$ –радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (x_0, y_0, z_0), а

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\,.$$

Рассмотреть два случая:
а) когда поверхность не окружает точку (x_0, y_0, z_0),
б) когда поверхность окружает точку (x_0, y_0, z_0).

Решение 11.6 Мы еще не понимаем, чем отличаются случаи, обговоренные в условии задачи. Поэтому не будем различать их, пока не столкнемся с непредвиденными затруднениями. Запишем интеграл Гаусса в векторной форме:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) \, dS \,,$$

где векторное поле $\vec{A}$ равно:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} \,.$$

Преобразуем поверхностный интеграл с помощью формулы Гаусса-Остроградского, для чего вычислим дивергенцию фигурирующего в поверхностном интеграле векторного поля:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = -\frac{3}{r^5}(\vec{r} \cdot \vec{r}) + \frac{3}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \,.$$

Поскольку дивергенция векторного поля $\vec{A}$ всюду равна нулю, равен нулю объемный интеграл от дивергенции, а значит, по формуле Гаусса-Остроградского, равен нулю и поверхностный гауссов интеграл.

Аккуратно проверим цепочку рассуждений, приводящих к последнему выводу. Внимательно проанализировав ее мы поймем, что она безупречна, лишь если точка (x_0, y_0, z_0) лежит *вне области* $\mathcal{V}$, ограниченной интегрируемой замкнутой поверхностью. В этом случае векторное поле $\vec{A}$ внутри области $\mathcal{V}$ и на ее границе непрерывно дифференцируемо, а его дивергенция равна нулю.

Напомним еще, что замкнутая поверхность $\mathcal{S}$ –простая, то есть может быть получена непрерывными деформациями сферы. При этом все пространство разделяется на внутренность $\mathcal{V}$ поверхности $\mathcal{S}$ и внешнее пространство. Следовательно, мы строго доказали лишь, что интеграл Гаусса равен нулю для всех точек пространства, лежащих вне поверхности $\mathcal{S}$, поскольку только в этом случае дивергенция интегрируемого поля заведомо существует и непрерывна в объеме $\mathcal{V}$.

Пусть теперь точка (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой области $\mathcal{V}$. В этой точке векторное поле недифференцируемо, и не имеет смысла говорить о каком-либо значении дивергенции в данной точке. Соответственно, теперь уже нельзя утверждать, что объемный интеграл от $\operatorname{div} \vec{A}$ равен нулю.

Чтобы обойти возникшую проблему, окружим данную точку сферой Σ с центром в этой точке и радиусом ε –настолько малым, чтобы сфера Σ целиком находилась внутри поверхности $\mathcal{S}$. Применим формулу Гаусса-Остроградского к области $\mathcal{V}_\varepsilon$, находящейся между поверхностями S и Σ. Поскольку особая точка (x_0, y_0, z_0) вырезана из области интегрирования $\mathcal{V}_\varepsilon$, то объемный интеграл вновь равен нулю, и мы приходим к равенству $I + I_\varepsilon = 0$, где за I_ε обозначен интеграл по указанной сфере:

$$I_\varepsilon = \iint\limits_{\pm} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n}\,)}{r^3} dS \,.$$

Его легко вычислить. Действительно, входящее сюда скалярное произведение всюду одинаково и равно $(\vec{r}, \vec{n}\,) = -\varepsilon$ (знак минус появился здесь

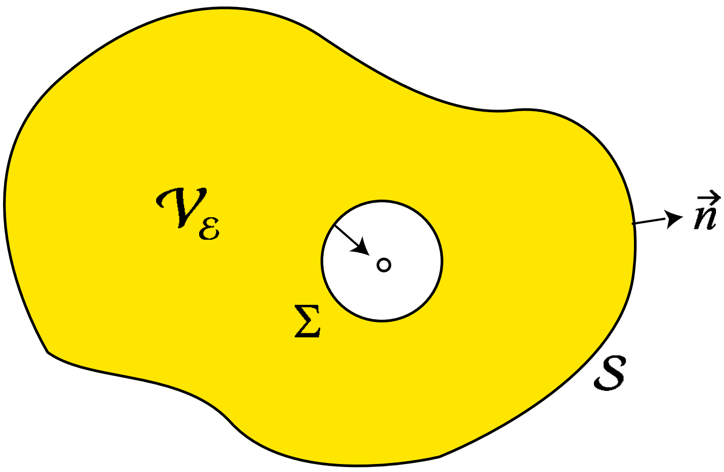

Рис. 11.2: Иллюстрация к задаче 6: Здесь изображен двумерный аналог поверхности $\mathcal{S}$ и вырезанной из ее внутренности сферы Σ с центром в точке наблюдения. Указаны две внешние нормали к общей поверхности $\mathcal{S}+\Sigma$. Оттенена внутренняя область $\mathcal{V}_\varepsilon$, где дивергенция поля $\vec{A}$ тождественно равна нулю

потому, что вектор нормали, внешний к области V_ε, направлен внутрь сферы). Кроме того и r во всех точках сферы принимает одинаковое значение $r=\varepsilon$. Таким образом,

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi\,.$$

Следовательно, если точка (x_0, y_0, z_0) находится внутри поверхности $\mathcal{S}$, то гауссов интеграл равен $I=-I_\varepsilon = 4\pi$.

Замечание 11.1 При хорошем пространственном воображении мы могли бы прийти к полученным результатам с помощью более наглядных геометрических аргументов. Для этого достаточно сообразить, что

$$\frac{\cos(\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{n}\,)}{r^2}\,dS = \pm d\Omega\,,$$

где $d\Omega$ –телесный угол, под которым из точки (x_0, y_0, z_0) виден бесконечно малый элемент поверхности dS. Причем телесный угол берется со знаком плюс, если векторы $\vec{r}$ и $\vec{n}$ образуют острый угол, а $\cos(\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{n}\,)$ больше нуля, и со знаком минус в противном случае. В итоге, если точка (x_0, y_0, z_0) находится вне поверхности, то вклады в интеграл Гаусса от "противостоящих" элементов поверхности, вырезанных одной и той же векторной трубкой векторного поля $\vec{r}$, взаимно уничтожаются, и гауссов интеграл равен нулю. Напротив, если точка (x_0, y_0, z_0) находится внутри поверхности $\mathcal{S}$, то сумма всех бесконечно малых телесных углов, составляющих гауссов интеграл, равна полному телесному углу $\Omega = 4\pi$.

Замечание 11.2 Следуя описанной геометрической интерпретации гауссова интеграла, мы легко можем ответить на более сложный, чем в условии задачи, вопрос: Что будет, если точка наблюдения лежит на поверхности $\mathcal{S}$?

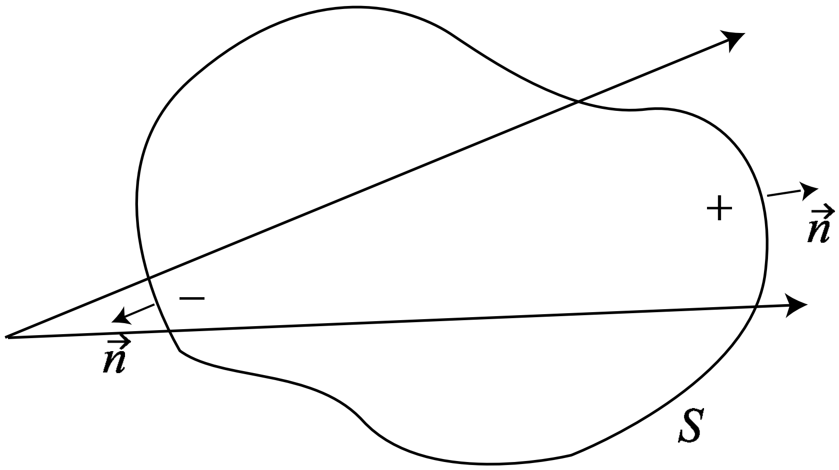

Рис. 11.3: Иллюстрация замечания к задаче 6: Двумерный аналог расчета заданного поверхностного интеграла с помощью телесных углов в случае, когда точка наблюдения находится вне поверхности. Расположенные внутри телесного угла участки поверхности вносят в интеграл одинаковый вклад. Причем вклад от ближнего участка поверхности берется со знаком минус, а дальнего — со знаком плюс.

Ответ на данный вопрос звучит так: Если это точка гладкого участка поверхности, к которой можно провести единственную касательную плоскость, то мы "видим" заключенную внутри поверхности область под телесным углом 2π. Ему, соответственно, равен и гауссов интеграл. Если же область $\mathcal{V}$ имеет форму куба, то интеграл Гаусса в вершине куба равен $4\pi/8 = \pi/2$.

Замечание 11.3 Наличие аналогичной проблемы несуществования дивергенции векторного поля внутри области интегрирования $\mathcal{V}$, когда начало координат попадает в эту область, мы "прозевали" при решении первой задачи данного занятия. Более строгие рассуждения, подобные приведенным в последней задаче, показывают однако, что интеграл по маленькой сфере, окружающей начало координат, стремится к нулю при стремлении радиуса сферы к нулю. А значит формула $(*)$ первой задачи справедлива всегда.

11.3 Домашнее задание

4376, 4377, 4379, 4381

Задача 11.7
Применяя формулу Гаусса-Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy \,,$$

где гладкая поверхность $\mathcal{S}$ ограничивает область $\mathcal{V}$ конечного объема.

Решение 11.7 Этот поверхностный интеграл равен объемному от дивергенции векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\, x^3 + \vec{j}\, y^3 + \vec{k}\, z^3 \,.$$

Дивергенцию легко вычислить:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 3\, r^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)\,,$$

а значит

$$I = 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} r^2\, dV \,.$$

Замечание 11.1 Конечно, трансформация поверхностного интеграла в объемный — не самоцель. Подобные преобразования совершают надеясь на то, что объемный интеграл окажется чем-то удобнее исходного поверхностного интеграла. Например, он может иметь геометрически более наглядную структуру или приводит к более простым вычислениям для конкретных поверхностей $\mathcal{S}$. В нашем случае, в частности, симметрия подынтегрального выражения в объемном интеграле позволяет избежать громоздкие выкладки при подсчете интеграла по сфере радиуса R с центром в начале координат. В самом деле, в случае сферы вычисления проводятся в одну строчку:

$$I = 12\pi \int_0^R r^4\, dr = \frac{12}{5} \pi\, R^5 \,.$$

Задача 11.8
(4377) Преобразовать поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} yz\, dydz + zx\, dzdx + xy\, dxdy \,.$$

Решение 11.8 Дивергенция вектора $\vec{A} = \vec{i}\, yz + \vec{j}\, zx + \vec{k}\, xy$ равна нулю, а значит равен нулю и обсуждаемый поверхностный интеграл.

Задача 11.9
(4379) Преобразовать поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma \right) dS \,.$$

Решение 11.9 Векторное поле, от которого берется данный поверхностный интеграл 2-го типа, равен градиенту скалярного поля $U(\vec{r})$. Следовательно, поверхностный интеграл равен объемному интегралу от лапласиана этой функции:

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \Delta U\, dV \,.$$

Задача 11.10
(4381) Доказать, что если $\mathcal{S}$ –замкнутая простая поверхность, и $\vec{\ell}$ –любое постоянное направление, то

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \cos(\vec{n} \,\widehat{,}\, \vec{\ell}) \, dS = 0 \,.$$

Решение 11.10 Перепишем подынтегральное выражение на языке скалярных произведений, считая для определенности вектор $\vec{\ell}$ единичным:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{n} \cdot \vec{\ell}) \, dS \,.$$

Поскольку векторное поле $\vec{\ell}$, от которого берется поверхностный интеграл, постоянно, дивергенция его тождественно равна нулю, и следовательно, по формуле Гаусса-Остроградского, равен нулю указанный поверхностный интеграл.