Примеры постановок задач линейного программирования

Составлено к.ф.-м.н. доц.
О.Г. Кантор

Рассматриваются вопросы:

1. Примеры задач линейного программирования.

   1.1. Задача составления рациона.

   1.2. Задача использования ресурсов.

   1.3. Основные этапы записи модели линейного программирования.

2. Стандартная и каноническая формы записи модели линейного программирования.

3. Основные приемы перехода от произвольной записи модели к стандартной и канонической форме записи.

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

Исходные данные задачи

Поголовье 20000 цыплят
Средний расход корма на единицу на период планирования – 0,5 кг

Таблица1. Требования по питательности

Вид корма	Содержание питательных веществ кг/кг корма			Стоимость руб./кг
	кальций	белок	клетчатка	
Известняк	0.380	---	---	4
Зерно	0.001	0.09	0.02	15
Соевые бобы	0.002	0.50	0.08	40

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

Требования к кормовой смеси по питательности - смесь должна содержать:

1) не менее 0.8%, но не более 1.2% кальция;
2) не менее 22% белка;
3) не более 5% клетчатки.

Цель

Птицеводческой ферме необходимо составить рацион минимальной стоимости при соблюдении требований по питательности.

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

Процесс построения математической модели можно представить как ответы на следующие три вопроса:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель?

2. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

3. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнить условия, отраженные в содержательной постановке задачи?

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

1. **Неизвестными являются содержание в смеси кормов. Отсюда переменные задачи :**

x_1 - содержание известняка в смеси;

x_2 - содержание зерна в смеси;

x_3 - содержание соевых бобов в смеси.

2. Критерием эффективности при сравнении различных вариантов рациона служит стоимость смеси. Следовательно, целевая функция задачи будет иметь вид:

$$L = 4x_1 + 15x_2 + 40x_3 \to \min$$

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

3. Содержательный смысл ограничений.

1). Ограничение на минимальный недельный рацион для всего поголовья

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10000 \text{ кг}$$

2). Смесь должна содержать не менее 0.8% кальция

$$0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \geq 0.008(x_1 + x_2 + x_3)$$

3).Смесь должна содержать не более 1.2% кальция

$$0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 0.012(x_1 + x_2 + x_3)$$

4). Смесь должна содержать не менее 22% белка

$$0.09x_2 + 0.5x_3 \geq 0.22(x_1 + x_2 + x_3)$$

5). Смесь должна содержать не более 5% клетчатки

$$0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 0.05(x_1 + x_2 + x_3)$$

1. Примеры задач линейного программирования.
1.1. Задача составления рациона.

После преобразования модель задачи будет иметь вид:

$$L = 4x_1 + 15x_2 + 40x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 10000 \\ 0.372x_1 - 0.007x_2 - 0.006x_3 \geq 0 \\ 0.368x_1 - 0.011x_2 - 0.010x_3 \geq 0 \\ 0.220x_1 + 0.130x_2 - 0.280x_3 \geq 0 \\ 0.050x_1 + 0.030x_2 - 0.030x_3 \geq 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

1. Примеры задач линейного программирования.
1.2. Задача использования ресурсов.

Содержательная постановка задачи

Для отделочных работ поступает мраморная крошка 3-х видов и цветной цемент в количестве 50 т., 30 т., 40 т., 30 т.. Эти материалы используются для приготовления 2-х видов облицовочных растворов. Растворы получают при смешивании компонентов в пропорциях 2:3:2:1:2 и 2:1:2:1:4. Последний член пропорции приходится на прочие материалы, которые поступают без ограничения.

Определить оптимальный план приготовления облицовочных растворов, при котором достигается минимум стоимости неиспользованных материалов, если стоимость 1т материалов соответственно равна 500, 800, 300, 100 рублям.

1. Примеры задач линейного программирования.
1.2. Задача использования ресурсов.

Предварительный расчет параметров

$$c_1 = \frac{2}{10}500 + \frac{3}{10}800 + \frac{2}{10}300 + \frac{1}{10}100 = 410,$$

$$c_2 = \frac{2}{10}500 + \frac{1}{10}800 + \frac{2}{10}300 + \frac{1}{10}100 = 250,$$

$$c_0 = 50 \cdot 500 + 30 \cdot 800 + 40 \cdot 300 + 30 \cdot 100 = 64000.$$

Где,

c_1, c_2 - стоимость материалов, идущих на приготовление 1т растворов

c_0 - общая стоимость материалов

1. Примеры задач линейного программирования.
1.2. Задача использования ресурсов.

План приготовления растворов включает две переменные:

x_1 - количество раствора первого вида

x_2 - количество раствора второго вида.

Целевая функция задачи

$$L = c_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 = 64000 - 410 x_1 - 250 x_2 \to \min$$

1. Примеры задач линейного программирования.
1.2. Задача использования ресурсов.

Система ограничений включает один тип ограничений - ограничения по ресурсам, то есть расход всех имеющихся ресурсов не должен превышать их количество

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 50 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 \le 30 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 40 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \le 30. \end{cases}$$

1. Примеры задач линейного программирования.
1.2. Задача использования ресурсов.

Модель:

$$L = c_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 = 64000 - 410 x_1 - 250 x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 50 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 \le 30 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 40 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \le 30 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. Эквивалентные формы записи модели линейного программирования.

Стандартной задачей называется следующая форма записи задачи ЛП.

Среди всех неотрицательных решений, удовлетворяющих системе линейных неравенств, выбрать такое, при котором линейная форма F принимает минимальное значение

$$F = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 + \cdots & + a_{1n}x_n & \le b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + a_{23}x_3 + \cdots & + a_{2n}x_n & \le b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + a_{m3}x_3 + \cdots & + a_{mn}x_n & \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 0, \ldots, n$$

2. Эквивалентные формы записи модели линейного программирования

Канонической задачей называется следующая форма записи задачи ЛП.

Среди всех неотрицательных решений системы уравнений выбрать такое, при котором линейная форма P принимает минимальное значение

$$P = p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_t x_t \to \min$$

$$\begin{cases} \beta_{11} x_1 & + \beta_{12} x_2 & + \beta_{13} x_3 + \cdots & + \beta_{1t} x_t & = d_1 \\ \beta_{21} x_1 & + a_{22} x_2 & + \beta_{23} x_3 + \cdots & + \beta_{2t} x_t & = d_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \beta_{s1} x_1 & + \beta_{s2} x_2 & + \beta_{s3} x_3 + \cdots & + \beta_{st} x_t & = d_s \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 0, \dots, n$$

3. Основные приемы перехода от произвольной записи модели к стандартной и канонической форме записи.

1. Переход от неравенства типа $\leq$ к неравенству $\geq$ осуществляется умножением неравенства на -1. Например, неравенства

$$2x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq -2$$

эквивалентны.

2. Переход от задачи на отыскание максимума к задаче на отыскание минимума осуществляется умножением целевой функции на -1. Например, функция

$$L_1 = 2 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

достигает максимального значения при тех же значениях неизвестных, что и функция

$$L_2 = -2 - 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

достигает минимального значения.

3. Основные приемы перехода от произвольной записи модели к стандартной и канонической форме записи.

3. Переход от неравенства к равенству. Этот переход основан на том, что в задаче ЛП принято, что все переменные $x_j \geq 0$.

Рассмотрим общий вид неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Перенесем свободный член b_i в левую часть неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i \geq 0$$

Обозначим левую часть через x_{n+1}

$$x_{n+1} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$$

Последнее уравнение совместно с требованием не отрицательности переменной $x_{n+1} \geq 0$ будет эквивалентно исходному неравенству.

Переход от равенств к неравенствам осуществляется в обратном порядке.