Теория погрешностей

Измерение физических величин

В основе точных естественных наук лежат измерения. При измерениях значения величин выражаются в виде чисел, которые указывают во сколько раз измеренная величина больше или меньше другой величины, значение которой принято за единицу. Полученные в результате измерений числовые значения различных величин могут зависеть друг от друга. Связь между такими величинами выражается в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

При измерениях неизбежно возникают погрешности. Необходимо владеть методами, применяемыми при обработке результатов, полученных при измерениях. Это позволит научиться получать из совокупности измерений наиболее близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

Если измерение заключается в сравнении данной величины с другой, однородной величиной, принятой за единицу, то измерение в этом случае называется прямым.

Прямые (непосредственные) измерения – это такие измерения, при которых мы получаем численное значение измеряемой величины либо прямым сравнением ее с мерой (эталоном), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины.

Однако далеко не всегда такое сравнение производится непосредственно. В большинстве случаев измеряется не сама интересующая нас величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями. В этом случае для измерения необходимой величины приходится предварительно измерить несколько других величин, по значению которых вычислением определяется значение искомой величины. Такое измерение называется косвенным.

Косвенные измерения состоят из непосредственных измерений одной или нескольких величин, связанных с определяемой величиной количественной зависимостью, и вычисления по этим данным определяемой величины.

В измерениях всегда участвуют измерительные приборы, которые одной величине ставят в соответствие связанную с ней другую, доступную количественной оценке с помощью наших органов чувств. Например, силе тока ставится в соответствие угол отклонения стрелки на шкале с делениями. При этом должны выполняться два основных условия процесса измерения: однозначность и воспроизводимость результата. Эти два условия всегда выполняются только приблизительно. Поэтому **процесс измерения содержит наряду с нахождением искомой величины и оценку неточности измерения**.

Современный инженер должен уметь оценить погрешность результатов измерений с учетом требуемой надежности. Поэтому большое внимание уделяется обработке результатов измерений. Знакомство с основными методами расчета погрешностей – одна из главных задач лабораторного практикума.

Почему возникают погрешности?

Существует много причин для возникновения погрешностей измерений. Перечислим некоторые из них.

- Процессы, происходящие при взаимодействии прибора с объектом измерений, неизбежно изменяют измеряемую величину. Например, измерение размеров детали с помощью штангенциркуля, приводит к сжатию детали, то есть к изменению ее размеров. Иногда влияние прибора на измеряемую величину можно сделать относительно малым, иногда же оно сравнимо или даже превышает саму измеряемую величину.
- Любой прибор имеет ограниченные возможности однозначного определения измеряемой величины вследствие конструктивной неидеальности. Например, трение между различными деталями в стрелочном блоке амперметра приводит к тому, что изменение тока на некоторую малую, но конечную, величину не вызовет изменения угла отклонения стрелки.
- Во всех процессах взаимодействия прибора с объектом измерения всегда участвует внешняя среда, параметры которой могут изменяться и, зачастую, непредсказуемым образом. Это ограничивает возможность воспроизводимости условий измерения, а, следовательно, и результата измерения.
- При визуальном снятии показаний прибора возможна неоднозначность в считывании показаний прибора вследствие ограниченных возможностей нашего глазомера.
- Большинство величин определяется косвенным образом на основании наших знаний о связи искомой величины с другими величинами, непосредственно измеряемыми приборами. Очевидно, что погрешность косвенного измерения зависит от погрешностей всех прямых измерений. Кроме того, в ошибки косвенного измерения свой вклад вносят и ограниченность наших познаний об измеряемом объекте, и упрощенность математического описания связей между величинами, и игнорирование влияния тех величин, воздействие которых в процессе измерения считается несущественным.

Классификация погрешностей

Значение погрешности измерения некоторой величины X принято характеризовать:

1. Абсолютной погрешностью – разностью между найденным на опыте (измеренным) $X_{изм}$ и истинным значением $X_{ист}$ некоторой величины

$$\Delta X = X_{изм} - X_{ист}. \qquad (1)$$

Абсолютная погрешность показывает, на сколько мы ошибаемся при измерении некоторой величины X.

2. Относительной погрешностью равной отношению абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины X

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X_{ист}}. \qquad (2)$$

Относительная погрешность показывает, на какую долю от истинного значения величины X мы ошибаемся.

Качество результатов измерений какой-то величины x характеризуется относительной погрешностью ε_x. Величина ε_x может быть выражена в процентах.

Из формул (1) и (2) следует, что для нахождения абсолютной и относительной погрешностей измерений, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение интересующей нас величины. Но если истинное значение известно, то незачем производить измерения. Цель измерений всегда состоит в том, чтобы узнать не известное заранее значение некоторой величины и найти если не ее истинное значение, то хотя бы значение, достаточно мало от него отличающееся. Поэтому формулы (1) и (2), определяющие величину погрешностей на практике не пригодны. При практических измерениях погрешности не вычисляются, а оцениваются. При оценках учитываются условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и ряд других факторов. Наша задача: научиться строить методику эксперимента и правильно использовать полученные на опыте данные для того, чтобы находить достаточно близкие к истинным значения измеряемых величин, разумно оценивать погрешности измерений.

Говоря о погрешностях измерений, следует, прежде всего, упомянуть о **грубых погрешностях (промахах)**, возникающих вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбрасывать.

Не связанные с грубыми ошибками погрешности опыта делятся на случайные и систематические.

Случайные погрешности. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а «пляшут» вокруг некоторого среднего (рис.1). Погрешности, меняющие величину и знак от опыта к опыту, называют случайными. Случайные погрешности непроизвольно вносятся экспериментатором вследствие несовершенства органов чувств, случайных внешних факторов и т.д. Если погрешность каждого отдельного измерения принципиально непредсказуема, то они случайным образом изменяют значение измеряемой величины. Эти погрешности можно оценить только при помощи статистической обработки многократных измерений искомой величины.

Систематические погрешности могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, не равные плечи весов и т.д.) и с самой постановкой опыта. Они сохраняют свою величину (и знак!) во время эксперимента. В результате систематических погрешностей разбросанные из-за случайных погрешностей результаты опыта колеблются не вокруг истинного, а вокруг некоторого смещенного значения (рис.2). Погрешность каждого измерения искомой величины можно предсказать заранее, зная характеристики прибора.

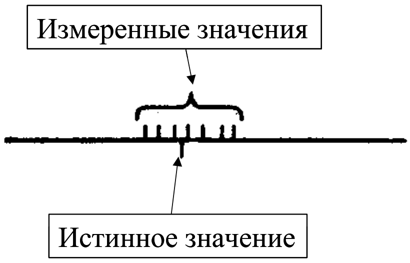

Рис.1

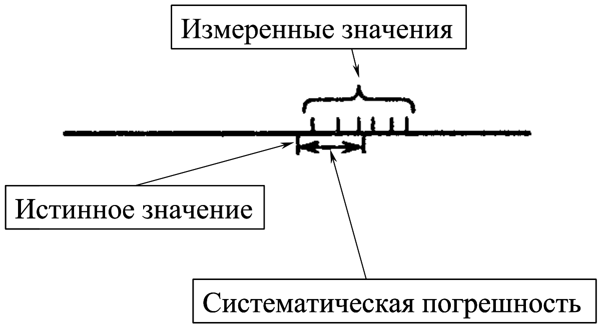

Рис.2

Расчет погрешностей прямых измерений

Систематические погрешности. Систематические ошибки закономерным образом изменяют значения измеряемой величины. Наиболее просто поддаются оценке погрешности, вносимые в измерения приборами, если они связаны с конструктивными особенностями самих приборов. Эти погрешности указываются в паспортах к приборам. Погрешности некоторых приборов можно оценить и не обращаясь к паспорту. Для многих электроизмерительных приборов непосредственно на шкале указан их класс точности.

Класс точности прибора γ – это отношение абсолютной погрешности прибора $\Delta X_{приб}$ к максимальному значению измеряемой величины X_{max}, которое можно определить с помощью данного прибора (это систематическая относительная погрешность данного прибора, выраженная в процентах от номинала шкалы X_{max}).

$$\gamma = \frac{\Delta X_{приб}}{X_{max}} \cdot 100\% .$$

Тогда абсолютная погрешность $\Delta X_{приб}$ такого прибора определяется соотношением:

$$\Delta X_{приб} = \frac{\gamma \cdot X_{max}}{100\%} .$$

Для электроизмерительных приборов введено 8 классов точности: 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4.

Чем ближе измеряемая величина к номиналу, тем более точным будет результат измерения. Максимальная точность (т.е. наименьшая относительная ошибка), которую может обеспечить данный прибор, равна классу точности. Это обстоятельство необходимо учитывать при использовании многошкальных приборов. Шкалу надо выбирать с таким расчетом, чтобы измеряемая величина, оставаясь в пределах шкалы, была как можно ближе к номиналу.

Если класс точности для прибора не указан, то необходимо руководствоваться следующими правилами:

- Абсолютная погрешность приборов с нониусом равна точности нониуса.

- Абсолютная погрешность приборов с фиксированным шагом стрелки равна цене деления[1].
- Абсолютная погрешность цифровых приборов равна единице минимального разряда.
- Для всех остальных приборов абсолютная погрешность принимается равной половине цены деления.

Случайные погрешности. Эти погрешности имеют статистический характер и описываются теорией вероятности. Установлено, что при очень большом количестве измерений вероятность получить тот или иной результат в каждом отдельном измерении можно определить при помощи нормального распределения Гаусса. При малом числе измерений математическое описание вероятности получения того или иного результата измерения называется распределением Стьюдента (более подробно об этом можно прочитать в пособии Скворцовой И.Л. «Ошибки измерений физических величин»).

Как же оценить истинное значение измеряемой величины?

Пусть при измерении некоторой величины X мы получили N результатов: $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Среднее арифметическое серии измерений ближе к истинному значению измеряемой величины, чем большинство отдельных измерений. Для получения результата измерения некоторой величины X используется следующий алгоритм.

1). Вычисляется **среднее арифметическое** серии из N прямых измерений:

$$X_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}.$$

2). Вычисляется **абсолютная случайная погрешность каждого измерения** ΔX_i – это разность между средним арифметическим серии из N прямых измерений и данным измерением:

$$\Delta X_i = X_{ср} - X_i.$$

3). Вычисляется **средняя квадратичная абсолютная погрешность** S_X:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\Delta X_i\right)^2}{N \cdot \left(N-1\right)}}.$$

4). Вычисляется **абсолютная случайная погрешность** $\Delta X_{случ}$. При небольшом числе измерений абсолютную случайную погрешность можно рассчитать через среднюю квадратичную погрешность S_X и некоторый коэффициент $\tau_\alpha\left(N\right)$, называемый коэффициентом Стъюдента:

$$\Delta X_{случ} = \tau_\alpha\left(N\right) \cdot S_X,$$

Коэффициент Стьюдента зависит от числа измерений N и коэффициента надежности α (в таблице 1 отражена зависимость коэффициента Стьюдента от

---

[1] Цена деления – это измеряемая величина, вызывающая отклонение указателя на одно деление. Цена деления определяется как отношение верхнего предела измерения прибора к числу делений шкалы.

числа измерений при фиксированном значении коэффициента надежности $\alpha = 0,9$).

Коэффициент надежности α – это вероятность, с которой истинное значение измеряемой величины попадает в доверительный интервал.

Доверительный интервал $\left[X_{ср} - \Delta X;\ X_{ср} + \Delta X\right]$ – это числовой интервал, в который с определенной вероятностью попадает истинное значение измеряемой величины.

Таким образом, коэффициент Стьюдента – это число, на которое нужно умножить среднюю квадратичную погрешность, чтобы при данном числе измерений обеспечить заданную надежность результата.

Чем большую надежность необходимо обеспечить для данного числа измерений, тем больше коэффициент Стьюдента. С другой стороны, чем больше число измерений, тем меньше коэффициент Стьюдента при данной надежности. В лабораторных работах нашего практикума будем считать надежность заданной и равной 0,9. Числовые значения коэффициентов Стьюдента при этой надежности для разного числа измерений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Число измерений N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
Коэффициент Стьюдента $\tau_\alpha(N)$	6,3	2,9	2,4	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8

5). Вычисляется **полная абсолютная погрешность.** При любых измерениях существуют и случайные и систематические погрешности. Расчет общей (полной) абсолютной погрешности измерения дело непростое, так как эти погрешности разной природы.

Для инженерных измерений имеет смысл суммировать систематическую и случайную абсолютные погрешности

$$\Delta X = \Delta X_{случ} + \Delta X_{приб}.$$

Для простоты расчетов принято оценивать полную абсолютную погрешность как сумму абсолютной случайной и абсолютной систематической (приборной) погрешностей, если погрешности одного порядка величины, и пренебрегать одной из погрешностей, если она более чем на порядок (в 10 раз) меньше другой.

6). **Округляется погрешность и результат**. Поскольку результат измерений представляется в виде интервала значений, величину которого определяет полная абсолютная погрешность, важное значение имеет правильное округление результата и погрешности.

Округление начинают с абсолютной погрешности!!! Число значащих цифр, которое оставляют в значении погрешности, вообще говоря, зависит от коэффициента надежности и числа измерений. Однако даже для очень точных измерений (например, астрономических), в которых точное значение погрешности важно, не оставляют более двух значащих цифр. Бóльшее число цифр не имеет смысла, так как определение погрешности само имеет свою погрешность. В нашем практикуме сравнительно небольшой коэффициент надежности $(\alpha = 0{,}9)$ и малое число измерений. Поэтому при округлении (с избытком) полной абсолютной погрешности оставляют одну значащую цифру.

Разряд значащей цифры абсолоютной погрешности определяет разряд первой сомнительной цифры в значении результата. Следовательно, само **значение результата нужно округлять (с поправкой) до той значащей цифры, разряд которой совпадает с разрядом значащей цифры погрешности**. Сформулированное правило следует применять и в тех случаях, когда некоторые из цифр являются нулями.

Пример.

Если при измерении массы тела получен результат $m = (0{,}900 \pm 0{,}004)$кг, то писать нули в конце числа 0,900 необходимо. Запись $m = 0{,}9$ означала бы, что о следующих значащих цифрах ничего не известно, в то время как измерения показали, что они равны нулю.

7). Вычисляется **относительная погрешность** ε_X.

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X_{ср}}.$$

При округлении относительной погрешности достаточно оставить две значащие цифры.

Результат серии измерений некоторой физической величины представляют в виде интервала значений с указанием вероятности попадания истинного значения в данный интервал, то есть результат необходимо записать в виде:

$$X = X_{ср} \pm \Delta X; \qquad \varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X_{ср}}; \qquad \alpha = 0{,}9.$$

Здесь ΔX – полная, округленная до первой значащей цифры, абсолютная погрешность и $X_{ср}$ – округленное с учетом уже округленной погрешности среднее значение измеряемой величины. **При записи результата измерений обязательно нужно указать единицу измерения величины.**

Рассмотрим несколько примеров:

1. Пусть при измерении длины отрезка мы получили следующий результат: $\ell_{ср} = 2{,}34582$ см и $\Delta\ell = 0{,}02631$ см. Как грамотно записать результат измерений длины отрезка? Сначала округляем с избытком абсолютную погрешность, оставляя одну значащую цифру $\Delta\ell = 0{,}02631 \approx 0{,}03$ см. Значащая цифра погрешности в разряде сотых. Затем округляем с поправкой среднее значение с точностью до сотых, т.е. до той значащей цифры, разряд которой совпадает с разрядом значащей цифры погрешности $\ell_{ср} = 2{,}34582 \approx 2{,}35$ см. Вычисляем относительную погрешность

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta\ell}{\ell_{ср}} = \frac{0{,}03}{2{,}35} \approx 0{,}013.$$

Результат измерений записываем так:

$$\ell = (2{,}35 \pm 0{,}03) \text{ см}; \qquad \varepsilon_\ell = 0{,}013 = 1{,}3\%; \qquad \alpha = 0{,}9.$$

2. Пусть при расчете сопротивления проводника мы получили следующий результат: $R_{ср} = 28,7673$ Ом и $\Delta R = 2,4652$ Ом. Сначала округляем абсолютную погрешность, оставляя одну значащую цифру $\Delta R = 2,4652$ Ом ≈ 3 Ом. Затем округляем среднее значение с точностью до целых $R_{ср} = 28,7673$ Ом ≈ 29 Ом. Вычисляем относительную погрешность

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R_{ср}} = \frac{3}{29} \approx 0,11.$$

Результат измерений записываем так:

$$R = (29 \pm 3)\ \text{Ом}; \qquad \varepsilon_R = 0,11 = 11\%; \qquad \alpha = 0,9.$$

3. Пусть при расчете массы груза мы получили следующий результат: $m_{ср} = 357,456$ кг и $\Delta m = 24,726$ кг. Сначала округляем абсолютную погрешность, оставляя одну значащую цифру $\Delta m = 24,726 \approx 30$ кг. Затем округляем среднее значение с точностью до десятков $m_{ср} = 357,456 \approx 360$ кг. Вычисляем относительную погрешность

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m_{ср}} = \frac{30}{360} \approx 0,083.$$

Результат измерений массы груза записываем так:

$$m = (360 \pm 30)\ \text{кг}; \qquad \varepsilon_m = 0,083 = 8,3\%; \qquad \alpha = 0,9.$$

Из приведенных примеров видно, что **округление абсолютной погрешности производится до первой значащей цифры в сторону увеличения (с избытком). Среднее значение измеряемой величины округляется с поправкой до той значащей цифры, разряд которой совпадает с разрядом значащей цифры погрешности. При округлении относительной погрешности оставляем две значащие цифры.**

Расчет погрешностей косвенных измерений

Пусть искомую величину Z можно рассчитать, составив функциональную зависимость от непосредственно измеряемых величин $\grave{A}, B, ..., K$

$$Z = f(\grave{A}, B, ..., K).$$

Тогда говорят, что величина Z измеряется косвенным образом.

Пусть при этом известны абсолютные погрешности всех прямых измерений $\Delta A, \Delta B, ..., \Delta K$, причем эти погрешности малы по сравнению с самими измеряемыми величинами $A, B, ..., K$. Тогда погрешность искомой величины ΔZ вычисляется подобно полному дифференциалу функции:

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial A}\right| \cdot \Delta A + \left|\frac{\partial Z}{\partial B}\right| \cdot \Delta B + \ldots + \left|\frac{\partial Z}{\partial K}\right| \cdot \Delta K,$$

только, в отличие от операции отыскания полного дифференциала, все минусы, получающиеся при дифференцировании, заменяются на плюсы, а дифференциалы аргументов на соответствующие абсолютные погрешности.

Формула для расчета относительной погрешности косвенного измерения:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{Z} = \left|\frac{\partial Z}{\partial A}\right| \cdot \frac{\Delta A}{Z} + \left|\frac{\partial Z}{\partial B}\right| \cdot \frac{\Delta B}{Z} + ... + \left|\frac{\partial Z}{\partial K}\right| \cdot \frac{\Delta K}{Z}.$$

Формула отыскания относительной погрешности совпадает с формулой $d(\ell n Z)$, если в последней заменить дифференциалы аргументов на абсолютные погрешности прямых измерений, а минусы на плюсы.

Чаще всего зависимость $Z = f(\text{À}, B, ..., K)$ имеет вид:

$$Z = A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot \ldots \cdot K^{\chi}.$$

Тогда формула для расчета относительной погрешности данного косвенного измерения ε_Z будет следующей

$$\varepsilon_Z = |\alpha| \cdot \varepsilon_A + |\beta| \cdot \varepsilon_B + \ldots + |\chi| \cdot \varepsilon_K.$$

Примеры.

1. Объем параллелепипеда определяется по формуле:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Тогда

$$V_{\text{ñð}} = a_{\text{ñð}} \cdot b_{\text{ñð}} \cdot c_{\text{ñð}}.$$

Относительная погрешность определения объема параллелепипеда

$$\varepsilon_V = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \frac{\Delta a}{a_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta b}{b_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta c}{c_{\text{ñð}}}.$$

Абсолютная погрешность определения объема параллелепипеда

$$\Delta V = V_{\text{ñð}} \cdot \varepsilon_V = \left(a_{\text{ñð}} \cdot b_{\text{ñð}} \cdot c_{\text{ñð}}\right) \cdot \left(\frac{\Delta a}{a_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta b}{b_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta c}{c_{\text{ñð}}}\right).$$

2. Объем цилиндра определяется по формуле:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Тогда

$$V_{\text{ñð}} = \pi \cdot R_{\text{ñð}}^2 \cdot h_{\text{ñð}}.$$

Относительная погрешность определения объема цилиндра

$$\varepsilon_V = \varepsilon_\pi + 2 \cdot \varepsilon_R + \varepsilon_h = \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta h}{h_{\text{ñð}}}.$$

Абсолютная погрешность определения объема цилиндра

$$\Delta V = V_{\text{ñð}} \cdot \varepsilon_V = \left(\pi \cdot R_{\text{ñð}}^2 \cdot h_{\text{ñð}}\right) \cdot \left(\frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{ñð}}} + \frac{\Delta h}{h_{\text{ñð}}}\right).$$

Если число «Пи» округляем до сотых ($\pi = 3{,}14$), то $\Delta \pi = 0{,}01$.

3. Объем шара определяется по формуле:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

Тогда $V_{\text{ñð}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_{\text{ñð}}^3$.

Относительная погрешность определения объема шара

$$\varepsilon_V = \varepsilon_\pi + 3 \cdot \varepsilon_R = \frac{\Delta \pi}{\pi} + 3 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{ñð}}}.$$

Абсолютная погрешность определения объема шара

$$\Delta V = V_{\text{ñð}} \cdot \varepsilon_V = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_{\text{ñð}}^3\right) \cdot \left(\frac{\Delta \pi}{\pi} + 3 \cdot \frac{\Delta R}{R_{\text{ñð}}}\right).$$