1. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. *Скалярной функцией векторного аргумента* называют закон f, по которому каждой точке $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ некоторого множества D из n-мерного вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие единственное вещественное число $y = f(\vec{X})$. Функцию $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f : D \to \mathbb{R}$, также называют функцией n переменных, или *функцией нескольких переменных* (ФНП).

Множество D называют *областью определения* ФНП, а множество $E = \{y \mid y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$ — *областью значе-*

ний ФНП. Если ФНП задана формулой, то можно найти ее есте-ственную область определения, состоящую из всех

$\vec{X}=(x_1,\dots,x_n)$, для которых определена $f(\vec{X})$, т. е. справедлива формула, задающая эту функцию, так как в нее входят только известные элементарные функции, введенные для одной переменной. Используя известные области допустимых значений этих элементарных функций, получаем область определения ФНП в пространстве $\mathbb{R}^n$, записанную в виде системы неравенств. Изобразить эту область можно на плоскости для $n=2$ или в обычном трехмерном пространстве для $n=3$.

Пример 1. Найти область определения функции $z=$ $=\dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-y}}{\ln(x+y)}$.

Решение. Запишем систему ограничений

$$\begin{cases} x\le 1, \\ y\le 1, \\ x+y>0, \\ x+y\ne 1. \end{cases}$$

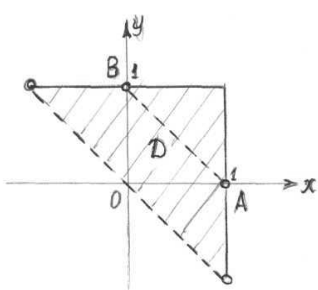

Рис. 1

Изобразим эту систему на плоскости. Для этого заменим все неравенства на равенства, по полученным уравнениям построим соответствующие линии, затем с помощью пробных точек установим, где лежит искомая область D (рис. 1).

Линии, входящие в область D, изобразим сплошными линиями, а не входящие — пунктирными. Точки $A(1;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$ — точки разрыва, отрезок AB целиком состоит из точек разрыва и называется *линией разрыва*.

Определение. Графиком функции $f: D\to\mathbb{R}$ называется множество $\Gamma=\left\{(x_1,\dots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\forall(x_1,\dots,x_n)\in D,\ y=f(x_1,\dots,x_n)\right\}$.

График Γ описывает множество точек в $(n + 1)$-мерном пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Графиком функции двух переменных, т. е. $z = f(x, y)$, является поверхность. Например, для функции $z = x^2 + y^2$ — это параболоид вращения с осью вращения OZ.

Существует и другой способ графической интерпретации ФНП.

Определение. Пусть дана функция n-переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество $\left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \middle| f(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{const}\right\}$ называется поверхностью уровня.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ получаем линии уровня $\Gamma_C = \left\{(x, y) \middle| f(x, y) = C, C \in E \subset \mathbb{R}\right\}$.

Каждая из этих линий представляет собой кривую на плоскости XOY, лежащую в области D, во всех точках которой функция $z = f(x, y)$ имеет постоянное значение C. Линии уровня Γ_C можно получить из графика функции Γ путем сечения его плоскостями $z = C$, проецируя полученные линии пересечения на плоскость XOY. По линиям уровня на плоскости, наоборот, можно представить себе график функции в пространстве, если каждую линию уровня Γ_C на плоскости $z = 0$ поднять на C единиц, т. е. расположить ее на плоскости $z = C$. Таким образом, можно изобразить любую поверхность в пространстве в виде семейства линий уровня на плоскости. Это используется, например, в географических картах для изображения рельефа местности.

Рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$. Линии уровня для этой функции — окружности $x^2 + y^2 = C\ (C \geq 0)$ с центром в начале координат и радиусами $\sqrt{C}$. Если каждую окружность радиусом $\sqrt{C}$ поднять на C (по оси OZ), то можно представить себе параболоид вращения, т. е. график исходной функции.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ получаем поверхности уровня $\Gamma_C = \left\{(x, y, z) \middle| f(x, y, z) = C,\ C \in E \subset \mathbb{R}\right\}$. Например, функция $u = x + y + z$ имеет поверхности уровня $x + y + z = C$,

$C \in \mathbb{R}$. Они представляют собой параллельные плоскости, отсекающие от осей координат одинаковые отрезки, равные C. Если изобразить эти плоскости и указать на каждой значение C, т. е. u ($u = C$), то можно получить какое-то представление о распределении физического параметра u (например, температуры) по всему пространству как о функции трех переменных.

Пример 2. Используя линии уровня, найти минимальное и максимальное значения функции $z = x^2 + y^2$ в области определения функции $g(x, y) = \arcsin(x-2) + \arccos\left|\frac{y}{2}\right|$.

Решение. Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$ есть окружности $x^2 + y^2 = C \ (C \geq 0)$. Запишем область допустимых значений другой функции: $\begin{cases} |x-2| \leq 1, \\ \left|\frac{y}{2}\right| \leq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases}$

Получим прямоугольник со сторонами $x = 1$, $x = 3$, $y = -2$, $y = 2$, причем границы входят в область D. Изобразим эту область и линии уровня для $C = 0$ и $C = 1$ на плоскости (рис. 2).

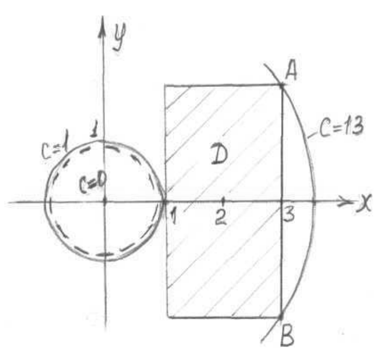

Рис. 2

Линии уровня $C = 1$ касаются границы области D и соответствуют минимальному значению функции $z_{\min} = 1$, так как меньшие значения не входят в область D. На рис. 2 пунктиром показана линия уровня, соответствующая $C < 1$ ($z < 1$). Она не пересекается с областью, поэтому не существует значения $z < 1$, т. е. минимум функции в области D $z_{\min} = 1$. Для определения $z_{\max}$ надо найти линию уровня с максимальным C, которая пересекает область D хотя бы в одной точке, а любая линия уровня, соответствующая большему значению C, не пересекает область D. Такой линией уровня является $x^2 + y^2 = 13$, т. е. окружность радиусом $\sqrt{13}$. Радиус равен длине OA или OB. Координаты точки $A(3;\ 2)$, отсюда $OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $z_{\max} = 13$. Этот максимум достигается в точке $A(3;\ 2)$ или $B(3;\ –2)$. Минимум $z_{\min} = 1$ достигается в точке $(1;\ 0)$.

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть внутренняя точка $M = (x_1, ..., x_n)$ принадлежит области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ задания функции $y = f(x_1, ..., x_n)$.

Если всем аргументам придать произвольные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ так, чтобы точка $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$ оставалась в области задания функции, то величина $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, .., x_i, ..., x_n)$ получит название полного приращения или просто приращения функции $y = f(x_1, .., x_n)$ в точке $M = (x_1, ..., x_n)$.

Зафиксируем все аргументы, кроме одного, например, $x_i\ (i = 1 \ldots n)$, и аргументу x_i придадим произвольное приращение Δx_i так, чтобы точка $X = (x_1, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n)$ находилась в области задания этой функции.

Определение. Величина $\Delta y_{x_i} = f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ называется частным приращением функции нескольких переменных по x_i.

Если же всем аргументам придать произвольные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ так, чтобы точка $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$ оставалась в области задания функции, то полным приращением или просто приращением функции $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$ в точке $M=\left(x_1,...,x_n\right)$ называется величина $\Delta y=f\left(x_1+\Delta x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n+\Delta x_n\right)-$ $-f\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)$.

Определение. Частной производной функции $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$ в точке $M\left(x_1,...,x_n\right)$ по аргументу x_i называется предел (если он существует и конечен) отношения частного приращения Δy_{x_i} функции в точке M к соответствующему приращению Δx_i аргумента в этой точке при $\Delta x_i\to 0$: $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta y_{x_i}}{\Delta x_i}$.

Помимо $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ применяют также обозначения $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, y'_{x_i}, f'_{x_i}.

Видим, что частная производная по аргументу x_i представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому вычисление частных производных проводится по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной.

Рассмотрим примеры для функций двух переменных $z=$ $=f\left(x,y\right)$ и трех переменных $u=g\left(x,y,z\right)$.

Пример 1. Найти частные производные от функции $z=$ $=\left(\sin x\right)^{\cos y}$.

Решение. Вычисляя частную производную по переменной x, рассматриваем $z=\left(\sin x\right)^{\cos y}$ как сложную степенную функцию вида u^{α}, где $u=\sin x$ и $\alpha=\cos y$. Так как производная $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, а $y=\text{const}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x.$$

При нахождении частной производной по переменной y заданную функцию рассматриваем как показательную вида a^{u}, где

$a=\sin x$ и $u=\cos y$. В этом случае $\left(a^u\right)' = a^u \ln a u'$, а x = const, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin x\right)^{\cos y} \ln\left(\sin x\right)\left(-\sin y\right).$$

Пример 2. Найти значение частной производной функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0\left(1;2\right)$.

Решение. Найдем сначала все частные производные заданной функции в произвольной точке $M\left(x;y\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

и подставим в них координаты точки $M_0\left(1;2\right)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -\frac{2}{5}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{1}{5}.$$

Пример 3. Найти частные производные от функции

$u=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

Решение. Имеем функцию трех независимых переменных $u=u\left(x;y;z\right)$. Найдем ее три частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=\frac{y}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x}+6y\sqrt[3]{z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0+3y^2\frac{2}{3}z^{-1/3} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$$

Пример 4. Доказать, что функция $z=y^2\sin\left(x^2-y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

Наибольшая скорость изменения функции в данной точке определяется формулой (2):

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \left| \overline{\text{grad}}\, u\left(A\right) \right| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + \left(1\right)^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{11}.$$

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ называется непрерывной в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x \to x^0} f\left(x\right) = f\left(x^0\right)$.

Для непрерывных функций нескольких переменных верны теоремы об их свойствах, аналогичные соответствующим теоремам одномерного анализа.

Определение. Функция $y = f\left(x\right)$ называется дифференцируемой в точке x^0, если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1\left(\Delta x_1, ..., \Delta x_n\right)\Delta x_1 +$$
$$+ \alpha_2\left(\Delta x_1, ..., \Delta x_n\right)\Delta x_2 + \alpha_n\left(\Delta x_1, ..., \Delta x_n\right)\Delta x_n,$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ — константы, не зависящие от Δx, $\alpha_1\left(\Delta x_1, ..., \Delta x_n\right)$, ..., $\alpha_n\left(\Delta x_1, ..., \Delta x_n\right)\Delta x_n$ — бесконечно малые при $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to 0$.

Определение. Главная часть приращения, линейная относительно приращения независимых переменных функции в данной точке, называется полным дифференциалом

$$dy = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n.$$

К необходимым условиям дифференцируемости относят две теоремы.

Теорема. Если функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Если функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке x^0, то она имеет все частные производные в этой точке, причем $\frac{\partial y(x^0)}{\partial x_i} = A_i$.

Отсюда

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \tag{3}$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции трех переменных

$$u = \frac{y^2}{x} + \sqrt{xz} + \ln(x + y + z).$$

Решение. Найдем частные производные заданной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{(x + y + z)}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x} + \frac{1}{(x + y + z)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} + \frac{1}{(x + y + z)}.$$

Из формулы (3) получаем полный дифференциал функции трех переменных

$$du = \left(-\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dx + \left(\frac{2y}{x} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dy +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dz.$$