§ 28. Четырехмерный вектор тока.

Теперь, когда у нас получены все слагаемые в выражении для действия, нам надо получить два оставшихся уравнения Максвелла с помощью принципа наименьшего действия. Однако третье уравнение Максвелла

$$rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

которое мы должны получить, содержит ток $\mathbf{j}$, а формула для действия написана на языке 4-векторов A_i и 4-тензоров F_{ik}. Поэтому прежде чем получать третье уравнение Максвелла нам следует научиться выражать ток через эти 4-вектора и 4-тензора. Точнее, мы должны выяснить, каким образом записывается ток на языке 4-векторов. Этим сейчас и займемся.

Ради удобства заряды часто рассматривают не как точечные, а как распределенные по пространству. Это распределение описывают плотностью заряда ρ, которая, вообще говоря, есть функция координат и времени. Тогда ρdV – это заряд в объеме dV, а интеграл от плотности ρ по объему V есть заряд, находящийся в этом объеме.

При этом, конечно, надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде кроме точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому плотность зарядов ρ можно записать с помощью δ-функций:

$$\rho = \sum_a e_a \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right), \tag{28.1}$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_a$ – радиус-вектор заряда e_a.

Заряд частицы, есть по самому своему определению, величина инвариантная, то есть не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность заряда ρ не есть инвариант, – инвариантом является лишь произведение ρdV.

Умножим равенство $de = \rho dV$ с обеих сторон на dx^i:

$$dedx^i = \rho dVdx^i = \rho dVdt\frac{dx^i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx^i –4-вектор). Значить и справа должен стоять 4-вектор. Но $dVdt$ есть скаляр, а потому $\rho\frac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j^i) носит название 4-вектора плотности тока:

$$j^i = \rho\frac{dx^i}{dt}. \tag{28.2}$$

Три его пространственные компоненты образуют трехмерную плотность тока

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}; \tag{28.3}$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Временная же составляющая 4-вектора (28.2) есть $c\rho$. Таким образом, 4-вектор плотности тока есть

$$j^i = \left(c\rho, \mathbf{j}\right). \tag{28.4}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Полный заряд, находящийся во всем пространстве, равен интегралу $\int \rho dV$ по всему пространству. Можно написать этот интеграл в четырехмерном виде:

$$\int \rho dV = \frac{1}{c}\int j^0 dV = \frac{1}{c}\int j^i dS_i \,, \qquad (28.5)$$

где интегрирование производится по всей четырехмерной гиперплоскости, перпендикулярной к оси x^0 (очевидно, что это и означает интегрирование по трехмерному пространству). Вообще, интеграл $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Введем 4-вектор тока в выражение (27.7) для действия и преобразуем второй член в этом выражении. Введя вместо точечных зарядов e непрерывное распределение с плотностью ρ, напишем этот член в виде

$$-\frac{1}{c}\int \rho A_i dx^i dV \,,$$

заменив сумму по зарядам интегралом по всему объему. Переписав его как

$$-\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV dt \,,$$

мы видим, что этот член равен

$$-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega \,.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum \int mcds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik} F^{ik} d\Omega \,. \qquad (28.6)$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Уравнение непрерывности – это математическая формулировка фундаментального закона физики – закона сохранения заряда. Этот закон более фундаментален, чем классическая электродинамика, описанию которой в основном посвящен этот курс лекций. Нарушение закона сохранения заряда не наблюдалось никогда. Даже в квантовой электродинамике закон сохранения заряда выполняется. Разумеется, уравнения, используемые нами в классической электродинамике, должны не противоречить этому фундаментальному закону. Ниже мы покажем, что формальное выражение закона сохранения заряда, то есть уравнение непрерывности, естественным образом вытекает из уравнений Максвелла. Однако из этого совершенно не следует подчиненное значение этого закона к уравнениям Максвелла. Если бы эти уравнения противоречили уравнениям Максвелла, то эти уравнения следовало бы выбросить в первую очередь. Сам же по себе закон сохранения заряда формулируется очень просто: заряд из ничего не возникает и не исчезает. Уменьшение (увеличение) заряда в некоторой области означает, что в какой-то другой области заряд увеличился (уменьшился).

Пусть в некоторой области объемом V плотность заряда описывается функцией $\rho(\mathbf{r},t)$. Тогда заряд, находящийся в этой области, равен $Q=\int\limits_V \rho dV$. Поскольку плотность зависит от времени, то и заряд Q также зависит от времени. Изменение заряда в области за время dt равно $dQ=\frac{\partial Q}{\partial t}dt=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_V \rho dV\right)dt$. Допустим, что заряд Q уменьшается, то есть $\frac{\partial Q}{\partial t}<0$. Это означает, что заряд из области уходит в другую область. Понятно, что этот переход происходит через поверхность области. Следовательно, поток заряда через поверхность, ограничивающую область, положителен. Как принято, считаем, что нормаль к поверхности во всех ее точках направлена наружу области. Поэтому положительный поток заряда через всю поверхность области дается интегралом $\Phi=\oint \rho\mathbf{v}d\mathbf{f}$ где $\mathbf{v}$ – линейная скорость заряда в некоторой точке на поверхности. За время dt через такую поверхность уйдет заряда Φdt. Приравняем убыль заряда в области $-dQ=-Q_t'dt>0$ его потоку $\Phi dt>0$ через поверхность за время dt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV=-\oint \rho\mathbf{v}d\mathbf{f}. \tag{29.1}$$

Обозначив плотность тока как $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV=-\oint \mathbf{j}d\mathbf{f}. \tag{29.2}$$

Если к правой части применить теорему Гаусса, то это же уравнение примет вид

$$\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int\limits_V div\,\mathbf{j}dV \quad\Rightarrow\quad \int\limits_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\mathbf{j}\right)dV=0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться при интегрировании по любому объему, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\mathbf{j}=0. \tag{29.3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальной форме.

В четырехмерном виде уравнение непрерывности (29.3) выражается равенством нулю 4-дивергенции 4-вектора тока:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0. \tag{29.4}$$

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия мы должны считать заданным движение зарядов и должны варьировать только потенциалы поля (играющие здесь роль координат системы); при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (28.6) равна теперь нулю, а во втором не должен варьироваться ток j^i. Таким образом,

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i+\frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega$$

(при варьировании во втором члене учтено, что $F^{ik}\delta F_{ik} = F_{ik}\delta F^{ik}$). Подставляя выражение для F_{ik}

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

имеем:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, то есть применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i dS_k\bigg|. \tag{30.1}$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле исчезает. На пределах же интегрирования по времени, то есть в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия потенциалы в эти моменты заданы. Таким образом, второй член в (30.1) равен нулю, и мы находим:

$$\int\left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i d\Omega.$$

Ввиду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при δA_i, то есть

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{30.2}$$

Перепишем эти четыре уравнения $(i = 0,1,2,3)$ в более привычной для нас трехмерной форме. При $i = 1$ имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F^{ik} (матричных элементов), находим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Вместе с двумя следующими $(i = 2,3)$ уравнениями они могут быть записаны как одно векторное:

$$rot\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{30.3}$$

Наконец, уравнение с $i = 0$ дает:

$$div\,\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{30.4}$$

Уравнения (30.3) и (30.4) и составляют искомую вторую пару уравнений Максвелла. Вместе с первой парой, они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории таких полей – электродинамики.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30.4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int div\,\mathbf{E}\,dV = \oint \mathbf{E}d\mathbf{f}\,,$$

находим:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{f} = 4\pi\int \rho dV\,. \tag{30.5}$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30.3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int rot\,\mathbf{H}\,d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}d\mathbf{l}\,,$$

находим:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}d\mathbf{f}\,, \tag{30.6}$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30.7}$$

называют током смещения. Из (30.6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)d\mathbf{f}\,, \tag{30.8}$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Теперь докажем, что это уравнение следует из уравнений Максвелла. Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей третьего уравнения Максвелла (30.3)

$$rot\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,, \tag{30.3}$$

получаем:

$$div\,rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\,\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}div\,\mathbf{j}\,.$$

Однако $div\,rot\,\mathbf{H} \equiv 0$ и четвертое уравнение Максвелла (30.4)

$$div\,\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{30.4}$$

позволяют переписать это соотношение в виде (29.3). То есть уравнение непрерывности следует из третьего и четвертого уравнений Максвелла.

§ 31 Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (30.3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26.1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \left(\mathbf{H}\,rot\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,rot\,\mathbf{H}\right),$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$div\left[\mathbf{ab}\right]=\mathbf{b}rot\mathbf{a}-\mathbf{a}rot\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+H^2\right)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-div\left[\mathbf{EH}\right],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)=-\mathbf{jE}-div\mathbf{S}, \tag{31.1}$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{EH}\right] \tag{31.2}$$

Называют вектором Поинтинга.

Проинтегрируем (31.1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV=-\int\mathbf{jE}dV-\oint\mathbf{S}d\mathbf{f}. \tag{31.3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int\mathbf{jE}dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (17.7)

$$e\mathbf{vE}=\frac{d}{dt}E_{кин}.$$

Тогда (31.3) переходит в

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum E_{кин}\right\}=0. \tag{31.4}$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя всех частиц); первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31.5}$$

мы можем поэтому назвать плотностью энергии электромагнитного поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31. 3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum E_{кин}\right\}=-\oint\mathbf{S}d\mathbf{f}, \tag{31.6}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\oint\mathbf{S}d\mathbf{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Поинтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока – количество энергии поля, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Мы предполагаем, что на этой поверхности частиц нет, а то поток энергии, переносимой этими частицами, пересекающими поверхность, надо было бы учитывать в правой части (31.6).