1. **Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы**
   - Единичная матрица — та, где по главной диагонали располагаются единицы, а все остальные элементы – нули
   - Нулевая матрица — та, где все элементы равны 0
   - Верхнетреугольная матрица — квадратная матрица, в которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю
   - Нижнетреугольная матрица — квадратная матрица, в которой все элементы выше главной диагонали равны нулю
2. **Дать определение равенства матриц**
   - Две матрицы A и B называются равными (A = B), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны.
     $\boxed{A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}}$
3. **Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число**
   - Суммой матриц A и B одного размера называется матрица $C = A + B$ такого же размера, получаемая из исходных путем сложения соответствующих элементов:
     $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1;m}, j = \overline{1;n}$
     Складывать можно только матрицы одинакового размера
   - Произведением матрицы A на ненулевое число $\lambda$ называется матрица $B = \lambda A$ того же порядка, полученная из исходной умножением на заданное число всех ее элементов
     $B = \lambda A \implies b_{ij} = \lambda a_{ij}$
4. **Дать определение операции транспонирования матриц**
   - Транспонирование матрицы - это операция над матрицей, когда ее строки становятся столбцами с теми же номерами
5. **Дать определение операции умножения матриц**
   - Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$ такая, что элемент матрицы C, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце, т.е. элемент $c_{ij}$, равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы A на соответствующие элементы *j*-ого столбца матрицы B
6. **Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения**
   - Ассоциативность: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
   - Дистрибутивность: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
7. **Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммутативно**
   - Пример:
     $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.
     $AB = \begin{pmatrix} -14 & 3 \\ -22 & 1 \end{pmatrix}$, а $BA = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$.
8. **Дать определение обратной матрицы**
   - Обратная матрица $A^{-1}$ — матрица, произведение которой на исходную матрицу A равно единичной матрице E: $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$
9. **Записать формулы для нахождения обратной матрицы к произведению двух обратимых матриц и для транспонированной матрицы**
   - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
   - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
10. **Сформулировать критерий существования обратной матрицы**
    - Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $|A| \neq 0$

11. **Дать определение присоединенной матрицы и записать формулу для вычисления обратной матрицы**
    - Матрица $\widetilde{A}$ называется присоединенной к квадратной матрице А, если элементы матрицы $\widetilde{A}$ равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов матрицы А
    - Формула: $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}^T$$
12. **Перечислить элементарные преобразования матриц**
    - Умножение строки/столбца на ненулевое число
    - Перестановка строк/столбцов
    - Прибавление к одной строке/столбцу матрицы другой ее строки/столбца, предварительно умноженной на некоторое ненулевое число
13. **Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей**
    - Пусть $\Delta$ - определитель матрицы системы, а $\Delta_n$ - определитель матрицы, полученной заменой *n*-того столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \ \ldots \ ; \ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

14. **Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?**
    - Минором $M_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ определителя *n*-го порядка называется определитель *(n - 1)*-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием *i*-той строки и *j*-того столбца
    - Минор *(r + 1)*-го порядка, внутри которого лежит выбранный минор *r*-го порядка, называется окаймляющим для данного минора
15. **Дать определение базисного минора и ранга матрицы**
    - В матрице А минор порядка *r* называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r + 1* и выше равны нулю или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел *m* или *n*
    - Ранг матрицы — наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля
16. **Сформулировать теорему о базисном миноре**
    - Столбцы матрицы А, входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему. Любой столбец матрицы А линейно выражается через остальные столбцы из базисного минора
17. **Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы**
    - При элементарных преобразованиях строк/столбцов матрицы ее ранг не меняется

18. **Перечислить различные формы записи системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ. Какая СЛАУ называется совместной?**
    - Векторная форма записи:
      $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$
      где: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$
    - Матричная форма записи:
      $A \cdot X = B$
      где: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$
    - СЛАУ называется совместной, если она имеет, хотя бы одно решение
19. **Дать определение однородной и неоднородной СЛАУ**
    - Однородная СЛАУ — это СЛАУ, у которой все свободные члены равны нулю
    - В противном случае ее называют неоднородной ($\neq 0$)
20. **Сформулировать критерий Кронекра-Капелли совместности СЛАУ**
    - СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы
21. **Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ**
    - Если столбцы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ — решения однородной СЛАУ $Ax = 0$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы
22. **Дать определение фундаментальной системы решений ФСР однородной СЛАУ**
    - Любой набор из $k = n-r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где $n$ — количество неизвестных в системе, а $r$ — ранг ее матрицы А, называют фундаментальной системой решений этой однородной СЛАУ
23. **Сформулировать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ**
    - Пусть дана однородная СЛАУ $Ax = 0$ с $n$ неизвестными и $\mathrm{Rg}(A) = r$. Тогда существует набор из $k = n-r$ решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ этой СЛАУ, образующих фундаментальную систему решений
24. **Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ**
    - Любое решение однородной системы линейных уравнений определяется формулой

$$X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_{n-r} \cdot X_{n-r}$$

где: $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные

25. **Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ**
    - Любое решение неоднородной системы линейных уравнений определяется формулой

$$X_{\text{о.н.}} = X_{\text{ч.н.}} + C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_{n-r} \cdot X_{n-r}$$

где: $X_{\text{ч.н.}}$ — какое–либо частное решение неоднородной системы $A \cdot X = B$

$X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $A \cdot X = O$

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные