ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. Система отсчета. Путь. Вектор перемещения

Для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела или материальной точки. Совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов, называется системой отсчета.

Для количественного описания движения с телами, образующими систему отсчета, связывают систему координат. Выберем декартову систему координат. Тогда положение материальной точки в этой системе можно определить заданием трех координат x, y, z или через вектор $\vec{r}$ (рис.1.1)

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты или единичные векторы координатных осей (рис.1.2).

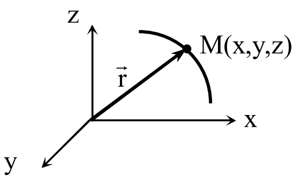


Рис.1.1

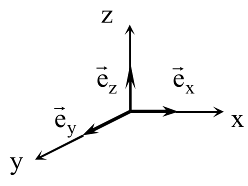


Рис.1.2

Линия, которую описывает материальная точка при своем движении, называется траекторией.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т.д. Пусть материальная точка, двигаясь в одном направлении, переместилась из положения 1 в положение 2 (рис.1.3). Расстояние между точками 1 и 2, отсчитываемое вдоль траектории, называется длиной пройденного материальной точкой пути (Δs). Отрезок прямой, проведенной из начального положения материальной точки в конечное, называется перемещением $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиус вектора в момент времени t_1 и t_2.

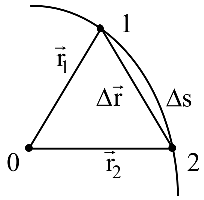


Рис.1.3

При прямолинейном движении $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$. При произвольном криволинейном движении $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ в пределе для бесконечно малого промежутка времени, т.е. когда $\Delta\vec{r} \to 0$. Иначе это можно записать так:

$$\lim_{\Delta\vec{r}\to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta\vec{r}|} = 1 .$$

1.2. Скорость. Ускорение при криволинейном движении

Траектория и перемещение являются чисто геометрическими характеристиками движения. Два различных движения, для которых одно и то же перемещение Δr совершилось за разные промежутки времени геометрически одинаковы, но кинематически различны. Это различие характеризуется скоростью.

Быстрота изменения положения материальной точки называется средней скоростью движения за время Δt и определяется отношением $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{\upsilon}_{ср}$.

Численное значение вектора средней скорости $|\vec{\upsilon}_{ср}| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ - есть скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором точка М перешла бы из положения M_1 в положение M_2 за тот же промежуток времени Δt, за который произошло её истинное криволинейное движение по дуге M_1M_2 (рис.1.4).

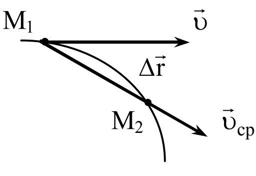


Рис.1.4

Вектор скорости $\vec{\upsilon}_{ср}$ направлен также как и вектор $\Delta\vec{r}$, т.е. по секущей M_1M_2. Предел отношения $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью

$$\vec{\upsilon} = \lim_{M_2 \to M_1} \vec{\upsilon}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad (1.1)$$

т.е. вектор мгновенной скорости равен

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.2)$$

Поскольку секущая в пределе совпадает с касательной, то мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Тогда, согласно равенству (1.1)

$$|\vec{\upsilon}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Модуль мгновенной скорости (υ) равен производной пройденного пути по времени

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}.$$

Отсюда путь, пройденный за время $\Delta t = t_2 - t_1$, будет равен

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt.$$

Геометрически пройденный путь s равен площади фигуры под кривой $\upsilon(t)$ (рис.1.5).

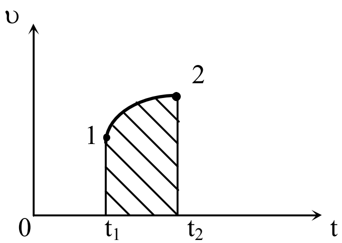


Рис.1.5

Учитывая, что

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - постоянные векторы, получим уравнения для вектора скорости

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \qquad (1.3)$$

и
$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{e}_x + \upsilon_y \vec{e}_y + \upsilon_z \vec{e}_z.$$

Компоненты скорости по осям x,y,z соответственно равны

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Вектор скорости может быть выражен также через орт скорости $\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{e}_\upsilon$.

Быстрота изменения величины скорости в единицу времени в прямолинейном движении характеризуется ускорением

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} .$$

Принимая во внимание соотношение (1.2), ускорение можно записать в виде

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} .$$

Следовательно, ускорение можно определить как первую производную скорости по времени, либо как вторую производную радиус-вектора – по времени. Продифференцировав по времени соотношение (1.3), получим для ускорения выражение

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z .$$

Вместе с тем, ускорение, как любой другой вектор можно выразить через компоненты по координатным осям:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z ,$$

где $a_x = \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ - компоненты ускорения, равные вторым производным соответствующих координат по времени.

1.3. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения

При произвольном криволинейном движении вектор скорости может изменяться как по величине, так и по направлению. В этом случае существует ускорение, характеризующее быстроту изменения скорости по величине, и ускорение, характеризующее быстроту изменения скорости по направлению.

Рассмотрим три частных случая.

При движении по прямолинейной траектории $\vec{e}_\upsilon$ - орт скорости $\vec{\upsilon}$ остается постоянным, т.е. $\vec{e}_\upsilon$=const, поэтому $\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \dot{\upsilon}\,\vec{e}_\upsilon$. Если $\dot{\upsilon}$>0, то ускорение направлено так же, как и скорость. Если $\dot{\upsilon}$<0, направление ускорения противоположно направлению скорости. Модуль ускорения равен $a = \left|\dot{\vec{\upsilon}}\right|$.

При равномерном движении по окружности υ=const, изменяется $\vec{e}_\upsilon$ (рис.1.6,*а*), поэтому:

$$\vec{a} = \upsilon\,\dot{\vec{e}}_\upsilon . \qquad (1.4)$$

Найдем производную орта скорости $\dot{\vec{e}}_{\upsilon}$.

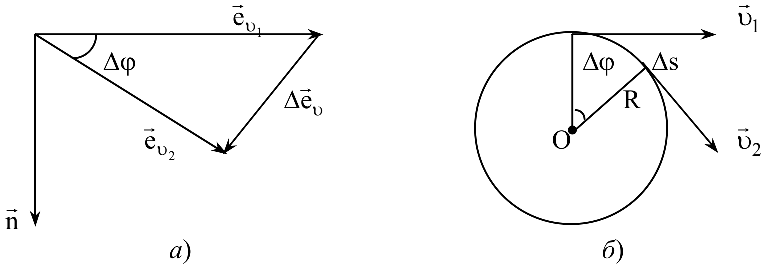


Рис.1.6

Из рис.1.6 видно, что за время Δt орт скорости поворачивается на угол $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{\upsilon\Delta t}{R}$$

и получает приращение $\Delta\vec{e}_{\upsilon}$. По определению

$$\dot{\vec{e}}_{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_{\upsilon}}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0 \quad \Delta\varphi \to 0$ и $\left|\Delta\vec{e}_{\upsilon}\right| = \Delta\varphi$. Тогда $\Delta\vec{e}_{\upsilon} \approx \Delta\varphi\cdot\vec{n}'$, $\vec{n}'$ - единичный вектор, имеющий такое же направление, как и $\Delta\vec{e}_{\upsilon}$.

При произвольном переходе единичный вектор $\vec{n}'$ превращается в $\vec{n}$ -орт нормали к траектории в той точке, в которой частица была в момент t. Таким образом,

$$\dot{\vec{e}}_{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\cdot\vec{n}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\upsilon}{R}\vec{n}' = \frac{\upsilon}{R}\vec{n}. \qquad (1.5)$$

Подставив (1.5) в (1.4), получим $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$ - нормальное ускорение.

При равномерном движении по окружности ускорение направлено по нормали к скорости. Поэтому называют его нормальным ускорением и в обозначении ставят индекс n.

При неравномерном движении частицы по криволинейной траектории оба множителя в формуле $\vec{\upsilon} = \upsilon\,\vec{e}_{\upsilon}$ изменяются со временем. Применив правило дифференцирования произведения функций, найдем выражение для ускорения

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \dot{\upsilon}\,\vec{e}_\upsilon + \upsilon\,\dot{\vec{e}}_\upsilon .$$

Видно, что в общем случае ускорение распадается на два слагаемых. Одно из них $\left(\dot{\upsilon}\,\vec{e}_\upsilon\right)$ коллинеарно скорости и, следовательно, направлено по касательной к траектории. Поэтому его называют тангенциальным (т.е. касательным) ускорением и обозначают $\vec{a}_\tau$.

Второе слагаемое совпадает с $\vec{a} = \upsilon\,\dot{\vec{e}}_\upsilon$, т.е. определяется формулой $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$ и является нормальным ускорением. Первое слагаемое характеризует быстроту изменения модуля скорости, второе быстроту изменения направления скорости. Составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ перпендикулярны друг другу (рис.1.7). Поэтому квадрат модуля ускорения равен сумме квадратов модулей составляющих $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$.

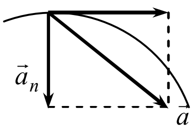


Рис.1.7

Отсюда следует, что полное ускорение $\vec{a}_\tau$ будет равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{\upsilon})^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2} .$$

1.4. Движение точки по окружности. Угловая скорость. Угловое ускорение

При вращении твердого тела все его точки движутся по окружности, центры которых лежат на единой прямой, называемой осью вращения. Окружности, по которым движутся точки тела, лежат в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Радиус-вектор каждой точки – есть вектор, проведенный из центра окружности в данную точку. Он поворачивается за время Δt на один и тот же угол $\Delta\varphi$.

Векторная величина $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется угловой скоростью, где Δt – время, за которое совершается поворот на угол $\Delta\varphi$. Из определения видно, что вращение точки по окружности описывается угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси, вокруг которой вращается тело в сторону, определяемую правилом правого винта (рис.1.8). Если вращать винт так, чтобы его рукоятка указывала направление вращения твердого тела, то направление движения винта укажет направление вектора угловой скорости.

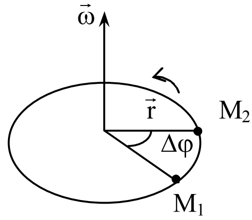


Рис.1.8

При равномерном вращении угловая скорость $\omega = \frac{\varphi}{t}$, а угол поворота $\varphi = \omega t$.

Единицей угловой скорости в системе СИ является радиан в секунду $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Угловая скорость ω - есть величина постоянная, она указывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени. В этом случае она называется круговой или циклической частотой.

Равномерное движение можно охарактеризовать также периодом обращения. Периодом называется время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Поскольку за время, равное T совершается угол поворота 2π, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число оборотов за единицу времени (частоту) обозначим ν и выразим период и циклическую частоту через эту величину

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Угол поворота за время t можно записать через частоту ν и полное число оборотов N

$$\varphi = 2\pi\nu t; \quad \varphi = 2\pi N.$$

При неравномерном вращении величина ω изменяется со временем и за промежуток времени Δt получает приращение $\Delta\omega$.

Величина, характеризующая изменение вектора угловой скорости со временем, называется угловым ускорением

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Таким образом, изменение угловой скорости по времени характеризуется угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$, которое определяется как производная угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Единица измерения углового ускорения $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{c}^2}$. При неподвижной оси вращения векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ коллинеарны и направлены вдоль оси вращения. Если угловая скорость увеличивается $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$, то векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ одинаково направлены, если угловая скорость уменьшается $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$, то векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ противоположно направлены.

При неравномерном вращении для угла поворота, угловой скорости и ускорения справедливо соотношение

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Найдем соотношение между υ, R, ω (рис.1.9).

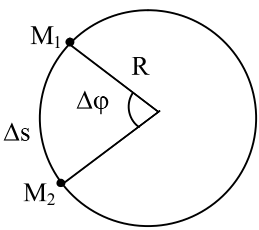


Рис.1.9

Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернется на угол $\Delta\varphi$. Точка М, находящаяся на расстоянии R от оси проходит при этом путь, равный

$$\Delta s = R\Delta\varphi.$$

Величина $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - называется линейной скоростью точки.

Подставляя значение Δs из предыдущего равенства, получим

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

т.е. линейная скорость точки прямо пропорциональна радиусу и угловой скорости

$$\upsilon = R\omega. \qquad (1.6)$$

Выясним соотношение между a_n, ω, R и a_τ, ε, R. Нормальное ускорение точек прямо пропорционально квадрату линейной скорости и обратно пропорционально радиусу

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (1.7)$$

Подставляя в уравнение (1.7) уравнение (1.6), получим следующее выражение для нормального ускорения: $a_n = \omega^2 R$.

Модуль тангенциального ускорения равен модулю первой производной от линейной скорости

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (1.8)$$

Подставляя (1.6) в уравнение (1.8) найдем, что

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt}.$$

Но так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, то $a_\tau = R\varepsilon$. Для нахождения соотношения между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$ сделаем чертеж (рис.1.10). Пусть тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Выберем точку O на оси и проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из этой точки к точке C. Из треугольника OAC видно, что $R = r\sin\alpha$. Умножим обе части равенства на ω и получим следующее выражение: $\omega R = \omega r \sin\alpha$.

Так как ωR - модуль скорости, $\omega r \sin\alpha$ - модуль векторного произведения $[\vec{\omega}\,\vec{r}]$, то

$$|\vec{\upsilon}| = |[\vec{\omega}\,\vec{r}]|.$$

Откуда следует, что вектор скорости равен векторному произведению вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\,\vec{r}]. \qquad (1.9)$$

Формуле (1.9) можно придать иной вид. Для этого представим

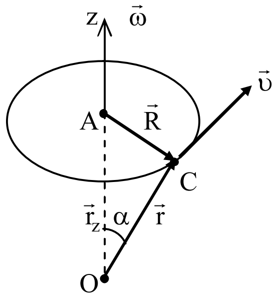


Рис.1.10

радиус-вектор в виде суммы двух составляющих $\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{R}$ и умножим это равенство векторно на $\vec{\omega}$:

$$\left[\vec{\omega}\,\vec{r}\right] = \left[\vec{\omega}\,(\vec{r}_z + \vec{R})\right] = \left[\vec{\omega}\,\vec{r}_z\right] + \left[\vec{\omega}\,\vec{R}\right].$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}_z$ - коллинеарны, т.е. $\sin\alpha = 0$, поэтому их векторное произведение равно 0. Следовательно, можно записать, что

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]. \qquad (1.10)$$

Выведем соотношение для тангенциального и углового ускорения. По определению тангенциальное ускорение есть первая производная от вектора скорости по времени (1.8). Подставляя (1.10) в (1.8), получим

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{R}\right],$$

т. е. $\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right]$.

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Законы Ньютона

Раздел механики, изучающий движение материальных тел совместно с физическими причинами, вызывающими это движение, называется динамикой. Основные представления и количественные закономерности динамики возникли и развиваются на базе многовекового человеческого опыта: наблюдений за движением земных и небесных тел, производственной практики и специально поставленных экспериментов.

Великий итальянский физик Галилео Галилей экспериментально установил, что материальная точка (тело) достаточно удаленная от всех других тел (т.е. не взаимодействующая с ними) будет сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Это положение Галилея было подтверждено всеми последующими опытами и составляет содержание первого основного закона динамики, так называемого закона инерции. При этом покой следует рассматривать как частный случай равномерного и прямолинейного движения, когда $\upsilon = \text{const} = 0$.

Этот закон одинаково справедлив как для движения гигантских небесных тел, так и для движения мельчайших частиц. Свойство материальных тел сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения называется инерцией.

Равномерное и прямолинейное движение тела при отсутствии внешних воздействий называется движением по инерции.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, носит название инерциальной системой отсчета. Инерциальной системой отсчета практически точно является гелиоцентрическая система. В виду громадного расстояния до звезд, их движением можно пренебречь и тогда оси координат, направленные от Солнца на три звезды, не лежащие в одной плоскости, будут неподвижными. Очевидно, любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, также будет инерциальной.

Физической величиной, характеризующей инертность материального тела, является его масса. Ньютон определил массу как количество вещества, содержащегося в теле. Это определение нельзя считать исчерпывающим. Масса характеризует не только инерцию материального тела, но и его гравитационные свойства: сила притяжения, испытываемая данным телом со стороны другого тела, пропорциональна их массам. Масса определяет полный запас энергии материального тела.

Понятие массы позволяет уточнить определение материальной точки. Материальной точкой называется тело, при изучении движения которого можно отвлечься от всех его свойств, кроме массы. Каждая материальная точка, следовательно, характеризуется величиной своей массы. В ньютоновской механике, в основе которой лежат законы Ньютона, масса тела не зависит от положения тела в пространстве, его скорости, действия на тело других тел и т.д. Масса является величиной аддитивной, т.е. масса тела равна сумме масс всех его частей. Однако свойство аддитивности утрачивается при скоростях, близких к скорости света в вакууме, т.е. в релятивистской механике.

Эйнштейн показал, что масса движущегося тела зависит от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} , \qquad (2.1)$$

где m_0 - масса покоящегося тела, υ - скорость движения тела, c – скорость света в вакууме.

Из (2.1) следует, что при движении тел с малыми скоростями $\upsilon \ll c$ масса тела равна массе покоя, т.е. $m=m_0$; при $\upsilon \to c$ масса $m \to \infty$.

Обобщая результаты опытов Галилея по падению тяжелых тел, астрономические законы Кеплера о движении планет, данные собственных исследований Ньютон сформулировал второй основной закон динамики, количественно связавший изменение движения материального тела с силами, вызывающими это изменение движения. Остановимся на анализе этого важнейшего понятия.

В общем случае сила $\vec{F}$ - есть физическая величина, характеризующая действие, оказываемое одним телом на другое. Эта векторная величина определяется численной величиной или модулем $\left|\vec{F}\right| = F$, направлением в пространстве и точкой приложения.

Если на материальную точку действуют две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то их действие эквивалентно действию одной силы

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ,$$

получаемой из известного треугольника сил (рис.2.1). Если на тело действуют n-сил, суммарное действие эквивалентно действию одной равнодействующей, являющейся геометрической суммой сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad (2.2)$$

Динамическое проявление силы состоит в том, что под действием силы материальное тело испытывает ускорение. Статическое действие силы приводит к тому, что упругие тела (пружины) под действием сил деформируются, газы – сжимаются.

Под действием сил движение перестает быть равномерным и прямолинейным и появляется ускорение (a), направление его совпадает с направлением действия силы. Опыт показывает, что ускорение, получаемое телом под действием силы, обратно пропорционально величине его массы:

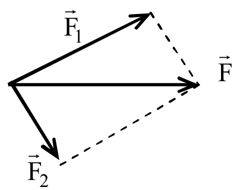


Рис.2.1

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

или

$$\vec{F} = m\vec{a} . \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет математическую запись второго основного закона динамики:

вектор силы, действующий на материальную точку численно равен произведению массы точки на вектор ускорения, возникающего при действии этой силы.

Поскольку ускорение

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z ,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - единичные векторы, $\ddot{x} = a_x, \ddot{y} = a_y, \ddot{z} = a_z$ - проекции ускорения на координатные оси, то

$$\vec{F} = m\ddot{x}\vec{e}_x + m\ddot{y}\vec{e}_y + m\ddot{z}\vec{e}_z . \qquad (2.4)$$

Если обозначить $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$, то выражение (2.4) можно переписать через проекции сил на координатные оси $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, $F_z = ma_z$:

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

В системе СИ за единицу силы принимается ньютон.

Согласно (2.3) ньютон есть такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2. Легко видеть, что

$$[F] = Н = \frac{кгм}{с^2}.$$

Второй закон Ньютона можно записать иначе, если ввести понятие импульса тела $(m\upsilon)$ и импульса силы (Fdt). Подставим в (2.3) выражение для ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

получим
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

или
$$\vec{F}dt = d(m\vec{\upsilon}). \qquad (2.5)$$

Таким образом, элементарный импульс силы, действующий на материальную точку в течение промежутка времени dt, равен изменению импульса тела за тот же промежуток времени.

Обозначив импульс тела

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

получим следующее выражение для второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

В релятивистской механике при $\upsilon \sim c$ основной закон динамики и импульс тела с учетом зависимости массы от скорости (2.1.) запишутся в следующем виде

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right),$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

До сих пор мы рассматривали лишь одну сторону взаимодействия между телами: влияние других тел на характер движения данного выделенного тела (материальной точки). Такое влияние не может быть односторонним, взаимодействие должно быть обоюдным. Этот факт отражается третьим законом динамики, сформулированным для случая взаимодействия двух материальных точек: если материальная точка m_2 испытывает со стороны материальной точки m_1 силу, равную $\vec{F}_{12}$, то m_1 испытывает со стороны m_2 силу $\vec{F}_{21}$, равную по величине и противоположную по направлению $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Эти силы действуют всегда вдоль прямой, проходящей через точки m_1 и m_2, как показано на рисунке 2.2. Рисунок 2.2,*а* относится к случаю, когда силы взаимодействия между точками являются силами отталкивания. На рисунке 2.2,*б* изображен случай притяжения.

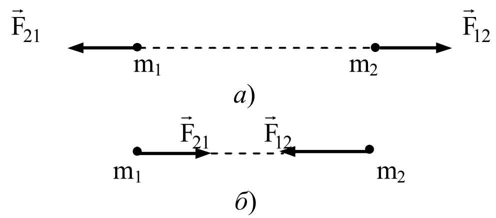


Рис.2.2

2.2. Силы в механике

2.2.1. Сила тяжести

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением, которое называют ускорением свободного падения и обозначают буквой *g*. Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанного с Землей, на всякое тело действует сила

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Эта сила называется силой тяжести. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

где m - масса тела, M – масса Земли, R - радиус Земли, G – гравитационная постоянная.

Различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей не вполне инерциальна. Это различие мало и в первом приближении силу тяжести можно считать равной силе, с которой тело притягивается к Земле.

Если подвесить тело (рис.2.3,*а*), или положить его на опору (рис.2.3,*б*), оно будет покоиться относительно Земли. В этом случае сила тяжести уравновешивается силой R, которую называют реакцией подвеса или опоры.

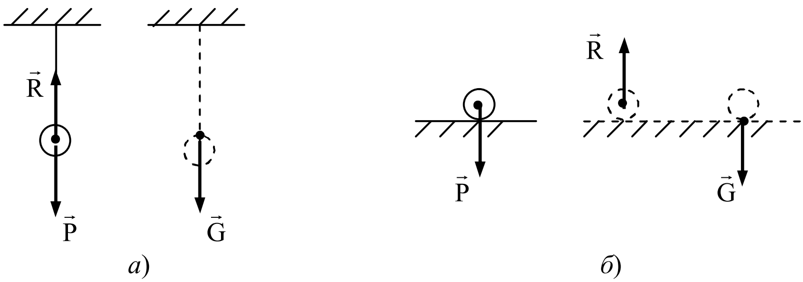


Рис. 2.3

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой $\vec{G}$, которую называют весом тела.

Итак, вес тела – это сила, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле.

Поскольку силы $\vec{P}$ и $\vec{R}$ (рис.2.3) уравновешивают друг друга, выполняется соотношение $\vec{P} = -\vec{R}$. Вес $\vec{G}$ есть сила, с которой тело действует на подвес (или опору), $\vec{R}$ - есть сила, с которой подвес (или опора) действует на тело. Согласно третьему закону Ньютона должно выполняться соотношение $\vec{G} = -\vec{R}$.

Сравнение обоих соотношений дает, что

$$\vec{G} = \vec{P} = m\vec{g} \qquad (2.6)$$

Таким образом, вес $\vec{G}$ и сила тяжести $\vec{P}$ равны друг другу. Однако приложены к разным телам – вес к подвесу (или опоре), сила тяжести – к самому телу.

Равенство (2.6) имеет место только в том случае, когда подвес (или опора), а следовательно, и тело покоится относительно Земли (или движется без ускорения).

2.2.2. Упругие силы

Под действием внешних сил возникают деформации (т.е. изменения размеров и формы) тел. Если после прекращения воздействия внешних сил восстанавливается прежняя форма и размеры тела, то деформация называется упругой.

В деформированном теле возникают упругие силы. Которые уравновешивают внешние силы, вызвавшие деформацию.

Установленный экспериментально закон Гука, утверждает, что при упругой деформации удлинение пружины пропорционально внешней силе. Аналитически эту закономерность принято записывать следующим образом:

$$x = \frac{1}{k} F_{внеш.,x} \,. \tag{2.7}$$

Величина k называется жесткостью пружины. Упругая сила отличается от внешней только знаком (рис.2.4)

$$F_{упр.,x}=F_{внеш.,x} \,.$$

Произведя замену в формуле (2.7), получим, что

$$x = -\frac{1}{k} F_{упр.,x} \,.$$

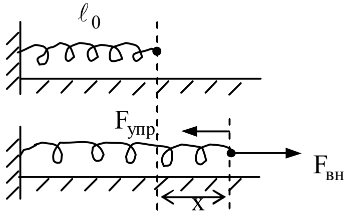


Рис.2.4

Опустим для краткости индекс «упр» и напишем это соотношение в виде

$$F_x = -kx \,.$$

Здесь F_x – проекция упругой силы на ось x, k - жесткость пружины, x - удлинение пружины.

Однородные стержни ведут себя при растяжении и одностороннем сжатии подобно пружине. Деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил. Эти силы принято характеризовать напряжением, которое определяется как модуль силы, приходящейся на единицу площади:

$$\sigma = \frac{F_{упр.,\perp}}{s}. \tag{2.8}$$

Здесь s - площадь поперечного сечения стержня; упругая сила распределена равномерно по сечению; значок $\perp$ указывает на то, что сила перпендикулярна к площадке, на которую она действует. В случае растяжения σ считается положительным, в случае сжатия – отрицательным. Сила $F_{упр}$ направлена перпендикулярно к сечению стержня; поэтому напряжение σ называется нормальным. Опыт показывает, что приращение длины стержня $\Delta\ell$ пропорционально напряжению σ:

$$\Delta\ell = \frac{1}{k}\sigma. \tag{2.9}$$

Знак $\Delta\ell$ совпадает со знаком σ. Коэффициент k зависит от свойств материала и от длины стержня:

$$k = \frac{E}{\ell_0}, \tag{2.10}$$

где E - величина, характеризующая упругие свойства материала стержня, её называют модулем Юнга. Он измеряется в Ньютонах на квадратный метр или Паскалях, т.е.

$$[E] = \frac{Н}{м^2} = Па.$$

Подстановка (2.10) в (2.9) приводит к формуле

$$\Delta\ell = \frac{\ell_0\sigma}{E}.$$

Обозначив относительное приращение длины стержня $\Delta\ell/\ell_0$ буквой ε, получим окончательную формулу

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma, \tag{2.11}$$

согласно которой относительное удлинение прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга. Формула (2.11) выражает закон Гука для стержня. Из (2.11) вытекает, что модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице, если бы столь большие упругие деформации были бы возможны.

Рассмотрим прямоугольный брусок, закрепленный неподвижно нижней гранью (рис.2.5). Под действием силы F, приложенной к верхней грани, брусок получает деформацию, называемую сдвигом. Величина γ, равная тангенсу угла сдвига φ, называется относительным сдвигом.

При упругих деформациях угол φ бывает очень мал, поэтому $\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$. Таким образом, относительный сдвиг определяется формулой

$$\gamma = \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi .$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения τ, которое определяется как модуль силы, приходящейся на единицу площади

$$\tau = \frac{F_{\text{упр},11}}{s} .$$

Здесь s - площадь воображаемой поверхности, параллельной верхней грани бруска (например AB на рис.2.5). Предполагается, что действие внешней силы F распределено равномерно по верхней грани. Значок || указывает на то, что сила $F_{\text{упр.}}$, параллельна к площадке, на которую она действует.

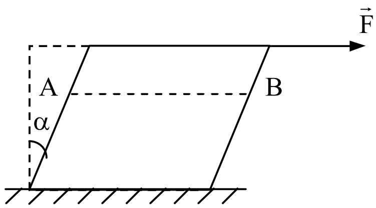


Рис.2.5

Опыт дает, что относительный сдвиг пропорционален напряжению

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau .$$

Величина G зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором $\gamma = \mathrm{tg}\varphi$ был бы равен единице (при $\varphi = 45^0$), если бы столь огромные упругие деформации были бы возможны. Измеряется G, как и модуль сдвига E, в паскалях.

2.2.3. Сила трения

Трение подразделяется на внешнее и внутреннее. Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения) или при попытках вызвать такое перемещение (трение покоя). Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например жидкости или газа).

Различают сухое и жидкое (или вязкое) трение. Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки (т.е. жидкой или газообразной прослойки) между ними. Жидким называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды.

Сухое трение подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Подействуем на тело (например брусок), лежащее на неподвижной опоре, внешней силой $\vec{F}$ (рис.2.6), постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным. Это указывает на то, что внешняя сила $\vec{F}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к трущимся поверхностям противоположно силе $\vec{F}$. Сила $\vec{F}_{тр}$ и есть сила трения покоя. Она обусловлена действием опоры, на которой лежит тело и принимает значение, равное модулю силы $\vec{F}$. Когда модуль внешней силы превышает значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя сменяется трением скольжения.

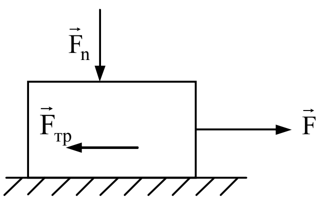


Рис.2.6

Величина F_0 представляет собой максимальное значение силы трения покоя. Сама эта сила, в зависимости от модуля внешней силы, принимает одно из значений в интервале от нуля до F_0. Модуль силы скольжения приблизительно равен F_0 и обычно зависит от скорости скольжения.

Опытным путем установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления $\vec{F}_n$, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу

$$F_0 = \mu_0 F_n .$$

Безразмерный множитель μ_0 называется коэффициентом трения покоя. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Аналогичная зависимость имеет место и для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu F_n . \qquad (2.12)$$

Здесь μ - коэффициент трения скольжения, который является функцией скорости.

Сила трения качения возникает между шарообразным или цилиндрическим телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения также подчиняется закону (2.12), но коэффициент трения в этом случае бывает значительно меньшим, чем при скольжении.

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует сила, тормозящая его движение. Эта сила слагается из вязкого трения и силы сопротивления среды. Слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, движутся вместе с телом как единое целое.

Сила вязкого трения возникает между этими и внешними относительно них слоями среды. Давление на различные участки движущегося тела оказываются неодинаковыми. Результирующая сила давления имеет составляющую, направленную противоположно скоростям. Эта составляющая и есть сила сопротивления среды. При больших скоростях сила сопротивления среды может во много раз превосходить силу вязкого трения. Суммарную силу, обусловленную вязким трением и сопротивлением среды, принято называть силой трения.

Для определенной таким образом силы трения характерно то, что она обращается в нуль вместе со скоростью. При небольших скоростях сила растет пропорционально скорости

$$\vec{F}_{тр} = -k_1, \vec{\upsilon} . \qquad (2.13)$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена противоположно скорости. Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойств среды, называемого вязкостью.

При увеличении скорости тела линейная зависимость (2.13) постепенно переходит в квадратичную

$$\vec{F}_{тр} = -k_2 \upsilon^2 \vec{e}_\upsilon, \tag{2.14}$$

где $\vec{e}_\upsilon$ - орт скорости.

Границы области, в которой происходит переход от закона (2.13) к закону (2.14) зависят от тех же факторов, от которых зависит коэффициент k_1.

2.3. Внешние и внутренние силы. Закон сохранения импульса

Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела замкнутой системы можно разделить на внутренние и внешние. Силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела замкнутой системы, называются внутренними ($\vec{F}_{ik}$). Внешние силы – это силы, обуслов-ленные воздействием тел, не принадлежащих системе ($\vec{f}_i$).

Второй закон Ньютона для такой системы запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i\neq n}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i, \tag{2.15}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i$ - суммарный импульс тел, входящих в замкнутую систему, $\sum\limits_{i\neq k}\vec{F}_{ik}$ - сумма внутренних сил системы тел, $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{f}_i$ - сумма внешних сил, действующих на тела системы.

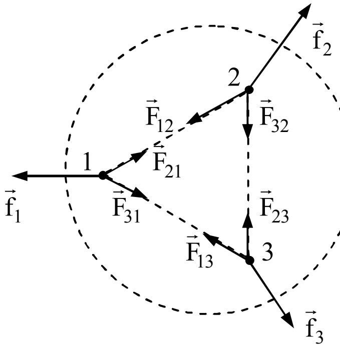


Рис.2.7

Пусть мы имеем замкнутую систему, состоящую из трех тел (рис.2.7). Внешние силы обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, внутренние $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}, \vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$.

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$
$$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31},$$
$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}.$$

Запишем для каждого из трех тел уравнение второго закона Ньютона в следующем виде (2.15):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{f}_1;$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{f}_2;$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{f}_{31}.$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма всех внутренних сил будет равна нулю, согласно третьему закону Ньютона, вследствие чего

$$d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$$

или

$$d\sum_{i=1}^{3} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{f}_i.$$

В случае, если система замкнута, то внешние силы отсутствуют

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{f}_i = 0,$$

тогда $\dfrac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} \vec{p}_i = 0$, т.е. $\sum_{i=1}^{3} \vec{p}_i = \text{const}$.

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел. Уравнение второго закона Ньютона для n-тел можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i\neq k}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i \,.$$

Складывая эти уравнения с учетом того, что $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i \,.$$

Т. е. производная по времени от полного импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы. Для замкнутой системы правая часть уравнения равна нулю, вследствие чего $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ не зависит от времени. В этом и состоит закон сохранения импульса, который формулируется следующим образом: полный импульс замкнутой системы не изменяется.

В основе сохранения импульса лежит однородность пространства, т.е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы (предполагается, что на новом месте замкнутость системы не нарушается).

3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

3.1. Работа силы и ее выражение через криволинейный интеграл

Если точка приложения силы (F=const) совершает элементарное перемещение (рис.3.1), то сила F совершает элементарную работу

$$dA = Fds\cos(\vec{F}\hat{\ }d\vec{s}),$$

$$dA = Fds\cos\alpha, \qquad (3.1)$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{s}$.

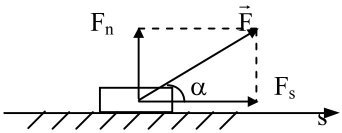


Рис.3.1

Таким образом, в случае произвольно направленной силы, работа численно равна произведению силы F на перемещение ее точки приложения и косинуса угла α между направлением силы и перемещения.

Работа характеризуется лишь численным значением и поэтому представляет собой величину скалярную. Произведение модулей векторов $\vec{F}$ и $d\vec{s}$ на косинус угла между ними называется скалярным произведением векторов и обозначается как

$$Fds\cos\alpha = (\vec{F}d\vec{s}).$$

Из равенства (3.1) следует, что работа представляет собой скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ и вектора перемещения $d\vec{s}$

$$dA = (\vec{F}d\vec{s}). \qquad (3.2)$$

В зависимости от угла α работа может быть положительной ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), отрицательной ($\alpha > \frac{\pi}{2}$) и равной нулю ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Пусть на тело одновременно действует несколько сил, результирующая которых равна

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i .$$

Работа, совершаемая результирующей силой на пути ds, запишется в виде

$$dA = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i d\vec{s}) = \sum_{i=1}^{n} dA_i ,$$

т. е. работа результирующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершенных каждой из сил в отдельности.

В выражении (3.2) заменим элементарное перемещение $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$, получим выражение для элементарной работы в виде

$$dA = (\vec{F}\vec{\upsilon})dt$$

или

$$dA = F_{\upsilon}\upsilon\,, \qquad (3.3)$$

где F_{υ} - проекция вектора силы на направление скорости.

Интегрируя (3.3) найдем выражение для работы, совершаемой за промежуток времени от t_1 до t_2

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F_{\upsilon}\upsilon dt\,.$$

Аналогично, заменив скалярное произведение $(\vec{F}d\vec{s}) = F_s ds$ в выражении (3.2) и взяв интеграл, получим, что

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F_s ds\,. \qquad (3.4)$$

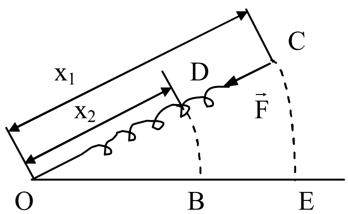


Рис.3.2

Рассчитаем работу, которую совершает упругая сила $F = -kx$, при перемещении тела из точки С в точку В по различным путям (рис.3.2). Работа на участке пути CDB согласно (3.1) и (3.4) равна

$$A_{CDB} = -\int_{CDB} kxdx\cos\vec{F}\hat{\ }d\vec{x}\,;$$

$$A_{CDB} = -\int_{CD} kxdx\cos\vec{F}\hat{\ }d\vec{x} - \int_{DB} kxdx\cos\vec{F}\hat{\ }d\vec{x}\,.$$

На участке CD косинус угла между направлением силы и перемещения равен 1, так как $\vec{F} \parallel d\vec{x}$, на участке DB сила перпендикулярна перемещению и косинус угла равен нулю. Поэтому работа упругой силы на участке CDB определяется интегралом

$$A_{CDB} = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) \qquad (3.5)$$

Работа упругой силы на участке CEB равна

$$A_{CEB} = -\int\limits_{CEB} kxdx\cos\vec{F}\hat{}d\vec{x}\ ;$$

$$A_{CEB} = -\int\limits_{CE} kxdx\cos\vec{F}\hat{}d\vec{x} - \int\limits_{EB} kxdx\cos\vec{F}\hat{}d\vec{x}\ ;$$

$$A_{CEB} = -\int\limits_{EB} kxdx = -\int\limits_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)\ , \qquad (3.6)$$

так как косинус угла между направлением силы и перемещением равен 1 на участке ЕВ и нулю на участке СЕ.

Сопоставляя выражения (3.5) (3.6) можно сделать вывод, что работа упругой силы не зависит от пути, по которому произошло перемещение, а определяется только положением начальной и конечной точек перемещения.

Из определения работы (3.1) можно установить единицы её измерения. В системе СИ единицей работы является джоуль (Дж):

[А]=Дж=Нм.

Джоуль – это работа силы в 1 Н на пути 1 м.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt} \text{ или } N = \frac{\Delta A}{\Delta t}\ ,$$

где dA - работа, совершаемая за время dt.

Единица мощности в системе СИ – ватт (Вт):

$$[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}\ .$$

Приняв во внимание, что $\frac{ds}{dt}$ есть скорость υ, получим

$$N = (\vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt}) = (\vec{F}\vec{\upsilon})\ .$$

Таким образом, мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки приложения силы.

3.2. Кинетическая энергия механической системы и её связь с работой

Рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной частицы (материальной точки) массы m, движущейся под действием сил, результирующая которых равна $\vec{F}$.

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на элементарное перемещение частицы $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$:

$$m\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dt = (\vec{F}d\vec{s}),$$

$$m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = (\vec{F}d\vec{s}). \qquad (3.7)$$

Скалярное произведение $m(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon})$ распишем через модули векторов и косинус угла между ними

$$m(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}) = m\upsilon d\upsilon \cos \vec{\upsilon}\hat{\ } d\vec{\upsilon}.$$

Поскольку косинус угла между векторами $\vec{\upsilon}$ и $d\vec{\upsilon}$ равен единице, то равенство (3.7) перепишется в виде

$$m\upsilon d\upsilon = (\vec{F}d\vec{s}). \qquad (3.8)$$

Произведение $m\upsilon d\upsilon$ равно производной от величины $\frac{m\upsilon^2}{2}$, т.е.

$$m\upsilon d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Заменив полученным выражением левую часть формулы (3.8), придем к соотношению

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = (\vec{F}d\vec{s}). \qquad (3.9)$$

Если результирующая сил, действующих на частицу, равна нулю, $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0$, то сама величина

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (3.10)$$

остается постоянной.

Эта величина называется кинетической энергией частицы.

Приняв во внимание, что произведение равно модулю импульса частицы p, выражению (3.10) можно придать вид

$$E_к = \frac{p^2}{2m}.$$

Если сила F, действующая на частицу не равна нулю, кинетическая энергия получит за время dt приращение

$$dE_к = (\vec{F}d\vec{s}) , \qquad (3.11)$$

где ds - перемещение частицы за время dt.

Величина

$$dA = (\vec{F}d\vec{s})$$

называется работой, совершаемой силой $\vec{F}$ на пути $d\vec{s}$ (ds - модуль перемещения $d\vec{s}$). Из (3.11) следует, что работа характеризует изменение кинетической энергии, обусловленное действием силы на движущуюся частицу:

$$dE_к = dA .$$

Проинтегрируем (т.е. просуммируем) обе части равенства (3.9) вдоль траектории движения частицы от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{s}) . \qquad (3.12)$$

Левая часть равенства представляет собой приращение кинетической энергии частицы

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = E_{к_2} - E_{к_1} . \qquad (3.13)$$

Правая часть есть работа A_{12} силы $\vec{F}$ на пути 1-2

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{s}) . \qquad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в соотношение (3.12), получим

$$A_{12} = E_{к_2} - E_{к_1} .$$

Таким образом, работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы. Энергия, так же, как и работа, в системе СИ измеряется в джоулях (Дж):

$$[E_к] = \frac{кгм^2}{с^2} = Дж .$$

3.3. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и ее связь с силой, действующей на материальную точку

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то говорят, что частица находится в поле сил. Так, например, частица вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести. В каждой точке пространства на нее действует сила, равная произведению массы на ускорение силы тяжести, т.е. mg.

Пусть заряженная частица находится в электрическом поле точечного заряда q. Это поле характерно тем, что направление силы, действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через неподвижный центр (заряд q), а величина силы зависит только от расстояния до этого центра: F=F(r). Поле сил, обладающих таким свойством, называется центральным. Поле сил тяжести является частным случаем центрального поля сил (с центром, расположен-ным в бесконечности).

Если в каждой точке поля сила, действующая на частицу, одинакова по величине и направлению ($\vec{F}$ =const), поле называется однородным.

Силовое поле можно описать с помощью функции П(x,y,z,t) такой, что компоненты силы в декартовой системе координат равны

$$F_x = \frac{\partial П}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial П}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial П}{\partial z}\,. \qquad (3.15)$$

Такое поле называется потенциальным. Функция П(x,y,z,t) носит название потенциальной функции (или потенциала). Поле, не изменяющееся со временем, называется стационарным. В этом случае П=П(x,y,z). Поле, изменяющееся со временем, называется нестационарным. В этом случае П=П(x,y,z,t). Известно, что если обозначить φ - скалярную функцию координат x, y, z, то

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\,, \qquad (3.16)$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты координат. Вектор с компонентами $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ называется градиентом функции φ и обозначается символом gradφ или ∇φ символический вектор, ∇ (набла) - называется оператором Гамильтона. ∇φ читается «набла фи».

Сравнивая (3.15) и (3.16), можно видеть, что в случае потенциального силового поля

$$\vec{F} = \frac{\partial П}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial П}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial П}{\partial z}\vec{e}_z = \nabla П\,. \qquad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в выражение для работы, получим

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = \Delta П ds\,,$$

$$dA = \frac{\partial П}{\partial x}dx + \frac{\partial П}{\partial y}dy + \frac{\partial П}{\partial z}dz\,.$$

Если поле стационарно, то правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции П(x,y,z,). Следовательно, работа, совершенная над частицей в стационарном силовом поле:

$$dA = d\Pi(x, y, z)\ . \qquad (3.18)$$

Проинтегрируем соотношение (3.18) вдоль некоторой траектории от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 dA = \int_1^2 d\Pi\ .$$

Левая часть этой формулы дает работу A_{12}, совершенную силами поля на пути 1-2. Сумма элементарных приращений dП функции П равна полному приращению этой функции на пути 1-2:

$$\int_1^2 d\Pi = \Pi_2 - \Pi_1\ .$$

Таким образом, работа на пути 1-2 равна полному приращению функции П на пути 1-2:

$$A_{12}=\Pi_2-\Pi_1. \qquad (3.19)$$

Форма траектории, по которой осуществлялось интегрирование, была совершенно произвольна. Отсюда заключаем, что работа, совершаемая над частицей силами стационарного потенциального поля, не зависит от пути, по которому движется частица, а определяется только начальным и конечным положением частицы в пространстве.

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому частицы переходят из одного положения в другое, называется консервативными. Силы, действующие на частицу в стационарном потенциальном поле, являются консервативными. Работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю.

Консервативными силами являются силы тяготения, силы упругости, силы электростатического происхождения, так как их работа не зависит от формы пути.

В формуле (3.19), определяющей работу, совершенную силами поля на пути (1-2) Π_1 и Π_2 – значения потенциальной функции П(x,y,z) в начальной и конечной точках. Эта работа идет на приращение кинетической энергии частицы:

$$E_{к_2} - E_{к_1} = \Pi_2 - \Pi_1\ . \qquad (3.20)$$

Обозначим – П(x,y,z)=$E_п$. Соотношение (3.20) примет вид

$$E_{к_2} - E_{к_1} = E_{п_1} - E_{п_2}\ ;$$

$$E_{к_2} + E_{п_2} = E_{к_1} + E_{п_1}\ .$$

Полученный результат означает, что величина ($E_к+E_п$) для частицы, находящейся в поле консервативных сил, остается постоянной (является интегралом движения). Слагаемое $E_к$ есть кинетическая энергия частицы. Все величины в (3.19) имеют одинаковую размерность – размерность энергии. Функцию $E_п(x,y,z)$ называют потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил. Величину E, равную сумме кинетической и потенциальной энергии частицы, называют полной механической энергией частицы.

В равенстве (3.19) $П(x,y,z)$ заменим на $–E_п(x,y,z)$, получим

$$A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2}.$$

Работа, совершаемая над частицей консервативными силами, равна убыли потенциальной энергии частицы. Иначе, работа, совершается за счет запаса потенциальной энергии.

Заменив в соотношении (3.18) функцию $П(x,y,z)$ потенциальной энергией, найдем связь между потенциальной энергией и силой:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{e}_z = -\nabla E_п.$$

Таким образом, сила, действующая на частицу в стационарном потенциальном силовом поле, равна градиенту потенциальной энергии в данной точке, взятому с обратным знаком. Компоненты силы определяются следующими выражениями:

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}.$$

Конкретный вид функции $E_п(x,y,z)$ зависит от характера силового поля. Чтобы найти потенциальную энергию частицы в поле силы тяжести (рис.3.3), вспомним, что работа, совершаемая над частицей силами этого поля, равна

$$A = \int_1^2 mgds\cos\alpha;$$

$$A = -\int_1^2 mgdh.$$

С другой стороны, $A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2}$.

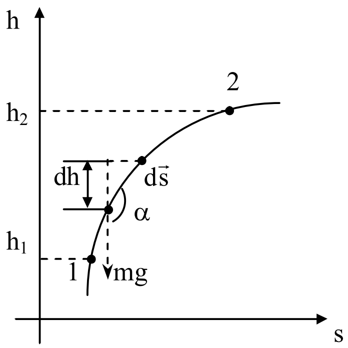


Рис.3.3

Сравнивая эти соотношения, можно видеть, что потенциа-льная энергия частицы в поле силы тяжести определяется выражением:

$$E_п = mgh\ ,$$

где h - отсчитывается от произвольного уровня.

3.4. Потенциальная энергия системы взаимодействия. Связь кинетической энергии системы с работой внутренних и внешних сил

Рассмотрим систему из двух взаимодействующих друг с другом частиц. Для простоты положим, что такая система может перемещаться только вдоль оси x. В этом случае положение каждой из частиц полностью определяется одной координатой x.

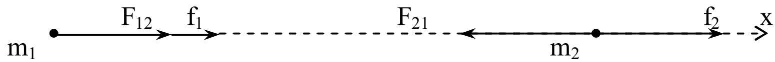


Рис.3.4

Обозначим F_{12} и F_{21} - проекции сил взаимодействия частиц, f_1 и f_2 - проекции внешних сил на ось x. Запишем уравнения движения для обеих частиц

$$m_1 \frac{d\upsilon_1}{dt} = F_{12} + f_1\ ;$$

$$m_2 \frac{d\upsilon_2}{dt} = -F_{21} + f_2\ .$$

Умножим первое уравнение на $dx_1=\upsilon_1 dt$, а второе на $dx_2=\upsilon_2 dt$,:

$$m_1\upsilon_1 d\upsilon_1 = F_{12}dx_1 + f_1 dx_1\ ;$$

$$m_2\upsilon_2 d\upsilon_2 = -F_{21}dx_2 + f_2 dx_2\ .$$

Сложим эти уравнения, учитывая, что $F_{12}=F_{21}$, согласно третьему закону Ньютона:

$$m_1\upsilon_1 d\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 d\upsilon_2 + F_{12} d(x_2 - x_1) = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 . \qquad (3.21)$$

$F_{12}d(x_2-x_1)$ зависит только от разности координат частиц, поэтому это выражение можно рассматривать как приращение некоторой функции $E_п(x_2-x_1)$. Функция $E_п(x_2-x_1)$ обладает тем свойством, что

$$\frac{\partial E_п}{\partial x_1} = -F_{12}, \qquad \frac{\partial E_п}{\partial x_2} = -F_{21} .$$

Произведение $m\upsilon d\upsilon$ есть первая производная от выражения $\frac{m\upsilon^2}{2}$,

т.е. $m\upsilon d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$,

где υ - модуль скорости частицы.

Поэтому соотношение (3.21) можно записать следующим образом:

$$d\left[\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + E_п(x_2 - x_1)\right] = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 . \qquad (3.22)$$

Если система замкнута, то силы f_1 и f_2 равны нулю, следовательно, функция, стоящая справа в квадратных скобках, остается постоянной. Эта функция представляет собой полную механическую энергию системы.

Первые два слагаемых дают кинетическую энергию системы. Слагаемое $E_п(x_2-x_1)$ называют взаимной потенциальной энергией частиц, образующих систему, либо потенциальной энергией взаимодействия.

Таким образом, полная механическая энергия системы взаимодействующих частиц слагается из кинетической энергии частиц и потенциальной энергии:

$$E = E_к + E_{п_{вз}} .$$

Правая часть уравнения (3.22) $f_1dx_1+f_2dx_2=dA_{внеш.}$ представляет собой работу внешних сил, совершенную над системой. Введя это обозначение, формулу (3.22) можно переписать в виде

$$dE = dE_к + E_{п_{вз}} = dA_{внеш} . \qquad (3.23)$$

В этом соотношении dE - приращение полной энергии системы за время dt, $dA_{внеш}$ - суммарная работа внешних сил за тот же промежуток времени.

Проинтегрировав соотношение (3.23) по некоторому промежутку времени, найдем, что работа внешних сил идет на приращение полной энергии системы

$$E_2-E_1=A_{внеш} .$$

Потенциальная энергия взаимодействия частиц равна

$$dE_n(x_2-x_1)=F_{12}dx_2-F_{12}dx_1=-F_{21}dx_2-F_{12}dx_1=-(F_{21}dx_2+F_{12}dx_1).$$

Правая часть этого уравнения представляет собой суммарную работу внутренних сил:

$$dE_n=-dA_{внутр} . \qquad (3.24)$$

Подставив это значение в формулу (3.22), получим

$$dE_к-dA_{внутр}=dA_{внеш} ,$$

$$dE_к=dA_{внутр}+dA_{внеш} .$$

Проинтегрировав последнее соотношение

$$\int_1^2 dE_к = \int_1^2 dA_{внутр} + \int_1^2 dA_{внеш} ,$$

получим, что приращение кинетической энергии равно работе всех (как внешних, так и внутренних) сил, приложенных к частицам системы

$$E_{к_2} - E_{к_1} = A_{12_{внутр}} + A_{12_{внеш}} .$$

Работа внутренних сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия частиц. Проинтегрировав равенство (3.24) по некоторому промежутку времени, получим, что работа внутренних сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия

$$A_{12_{внутр}} = -\int_1^2 dE_{п_{вз}} = E_{п_{вз1}} - E_{п_{вз2}} .$$

Если совершение внешними силами работы над частицами системы не сопровождается изменением скоростей частиц, то из формулы (3.23) следует, что $dE_{п_{вз}} = dA_{внеш}$. После интегрирования $\int_1^2 E_{п_{вз}} = \int_1^2 dA_{внеш}$, можно сделать вывод, что работа внешних сил равна приращенной потенциальной энергии взаимодействия

$$E_{п_{вз2}} - E_{п_{вз1}} = A_{внеш} .$$

3.5. Закон сохранения механической энергии. Закон сохранения и превращения энергии как проявление неуничтожимости материи и ее движения

Рассмотрим систему, состоящую из n частиц с массами $m_1,m_2,\ldots m_n$. Пусть частицы взаимодействуют друг с другом с силами F_{ik}, модули которых зависят только от расстояния между частицами. Такие силы являются консервативными. Это означает, что работа, совершаемая этими силами над частицами, определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Предположим, что кроме внутренних сил на i–

частицу действует внешняя консервативная сила f_i и внешняя неконсервативная сила f_i^*. Тогда уравнение движения i–частицы будет иметь вид

$$m_i \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{f}_i + \vec{f}_i^*, \qquad (3.25)$$

причем (i≠k), и принимает значения i=1,2…n.

Умножив уравнение (3.25) на $d\vec{s}_i = \vec{\upsilon}_i dt$ и, сложив вместе все n уравнений, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} \right\} d\vec{s}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{s}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^* d\vec{s}_i. \qquad (3.26)$$

Левая часть уравнения (3.26) есть приращение кинетической энергии системы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i = d \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Первый член правой части $\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} \right\} d\vec{s}_i = dE_{п_{вз}}$ равен убыли потенциальной энергии взаимодействия частиц. Второй член $\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{s}_i = -dE_{п_{внеш}}$ равен убыли потенциальной энергии системы во внешнем поле консервативных сил. Последний член $\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^* d\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{n} dA^*_{внеш}$ представляет собой работу $\vec{f}_i^*$ неконсер-вативных внешних сил.

Таким образом, равенство (3.26) можно записать в виде

$$d(E_к + E_{п_{вз}} + E_{п_{внеш}}) = dA^*_{внеш}. \qquad (3.27)$$

Величина $E = E_к + E_{п_{вз}} + E_{внеш}$ - есть полная механическая энергия системы. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, правая часть уравнения (3.27) будет равна нулю, и полная энергия системы остается постоянной:

$$E = E_к + E_{п_{вз}} + E_{внеш} = \text{const}.$$

Таким образом, полная механическая энергия системы тел, на которые действуют лишь консервативные силы, остается постоянной (закон сохранения механической энергии).

Для замкнутой системы, т.е. системы, на тела которой не действуют никакие внешние силы $E = E_к + E_{п_{вз}} = const$, т.е. полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Если в замкнутой системе, кроме консервативных сил, действуют также неконсервативные силы (силы трения), то полная механическая энергия системы не сохраняется:

$$dE = d(E_к + E_{п_{вз}}) = dA_{неконс}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим, что работа неконсервативных сил равна изменению полной механической энергии системы:

$$E_2 - E_1 = A_{12_{неконс}}.$$

Силы трения, как правило, совершают отрицательную работу. Поэтому наличие сил трения в замкнутой системе приводит к уменьшению ее полной механической энергии со временем. Действие сил трения приводит к превращению механической энергии в другие, немеханические виды энергии. Всякий раз, когда «исчезает» энергия одного вида появляется эквивалентное количество энергии другого вида. Энергия никогда не исчезает и не появляется снова, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается закон сохранения энергии в его общем физическом смысле.

3.6. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации или в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением температуры. Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Абсолютно упругим ударом называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. Потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальная энергия деформации не возникает, кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся.

При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии не соблюдается – имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух частиц, образующих замкнутую систему, движущихся вдоль оси x (рис.3.5)

Пусть m_1 и m_2 - массы частиц, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости частиц до удара, $\vec{u}$ - скорость частиц после удара.

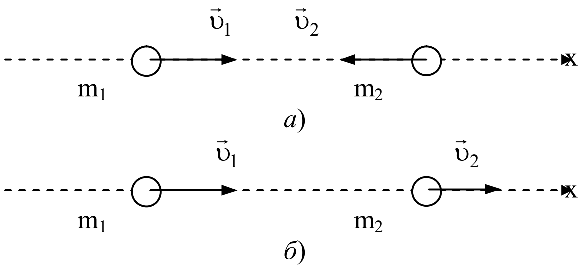


Рис.3.5

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}\,;$$

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.28)$$

Модуль скорости частиц после удара для рис. 3.5,*а* равен

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2},$$

для рис. 3.5,*б*

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Выясним, как изменится полная энергия шаров при абсолютно неупругом ударе. Кинетическая энергия до удара:

$$E_{к_1} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2},$$

после удара:

$$E_{к_2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 .$$

Подставим в это выражение общую скорость движения частиц (3.28) для случая, изображенного на рис. 3.5,*б*

$$E_{к_2} = \frac{1}{2}\frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

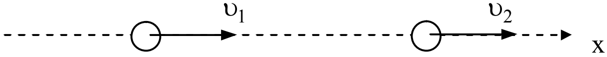
Найдем изменение кинетической энергии:

$$\Delta E = E_{к_1} - E_{к_2} ;$$

$$\Delta E = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2 . \qquad (3.29)$$

Уменьшение кинетической энергии при неупругом ударе означает, что механическая энергия системы при этом ударе не остается постоянной, она частично или полностью превращается в тепловую энергию движущихся молекул.

Рассмотрим абсолютно упругий центральный удар двух однородных шаров (рис.3.6). Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центр. Предполагается, что шары образуют замкнутую систему тел, что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Кроме того, вращение шаров отсутствует.



m_1 m_2

Рис.3.6

Обозначим m_1 и m_2 - массы шаров, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости шаров до удара, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ - скорости шаров после удара. Положим, что скорости шаров как до удара, так и после удара направлены вдоль положительного направления оси x.

Запишем уравнение закона сохранения импульса и энергии:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,; \qquad (3.30)$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}\,. \qquad (3.31)$$

Спроектируем уравнение закона сохранения импульса (3.30) на ось x:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

и преобразуем его к виду

$$m_2(\upsilon_2 - u_2) = m_1(u_1 - \upsilon_1)\,. \qquad (3.32)$$

Из закона сохранения энергии (3.31) следует:

$$m_2(\upsilon_2^2 - u_2^2) = m_1(u_1^2 - \upsilon_1^2)\,. \qquad (3.33)$$

Разделим уравнение (3.33) на (3.32), получим

$$\upsilon_2 + u_2 = u_1 + \upsilon_1\,. \qquad (3.34)$$

Для нахождения скорости u_1 умножим (3.34) на m_2 и полученное соотношение сложим с уравнением (3.32):

$$+\begin{cases} m_2\upsilon_2 + m_2u_2 = m_2u_1 + m_2\upsilon_1 \\ m_2\upsilon_2 - m_2u_2 = m_1u_1 - m_1\upsilon_1 \end{cases},$$

получим

$$2m_2\upsilon_2 = u_1(m_2 + m_1) + \upsilon_1(m_2 - m_1)\,,$$

откуда

$$u_1 = \frac{\upsilon_1(m_1 - m_2) + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (3.35)$$

Для определения скорости u_2 умножим (3.34) на m_1 и полученное соотношение вычтем из уравнения (3.32):

$$-\begin{cases} m_2\upsilon_2 - m_2u_2 = m_1u_1 - m_1\upsilon_1 \\ m_2\upsilon_2 + m_2u_2 = m_1u_1 + m_1\upsilon_1 \end{cases},$$

получим

$$\upsilon_2(m_2 - m_1) - u_2(m_1 + m_2) = -2m_1\upsilon_1 ,$$

откуда

$$u_2 = \frac{\upsilon_2(m_2 - m_1) + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} . \tag{3.36}$$

При $m_1 = m_2$ из (3.35) и (3.36) следует, что $u_1 = \upsilon_2$, а $u_2 = \upsilon_1$.

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Момент силы и момент импульса

Моментом силы относительно какой-либо оси называется произведение величины силы (F) на плечо, т.е. на длину перпендикуляра (d), опущенного из точки O, через которую проходит ось, на направление силы (рис.4.1):

$$M=Fd.$$

За направление момента силы берется направление, в котором будет двигаться направленный вдоль оси буравчик, если его рукоятка поворачивается по направлению силы.

Из рис.4.1 видно, что $d=r\sin\alpha$, где r - радиус-вектор. Тогда

$$M=Fr\sin\alpha.$$

Поскольку $Fr\sin\alpha$ есть мо-дуль векторного произведения $\left[\vec{r}\vec{F}\right]$, то для момента силы будет справедливо выражение

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\left[\vec{r}\vec{F}\right]\right|$$

или

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

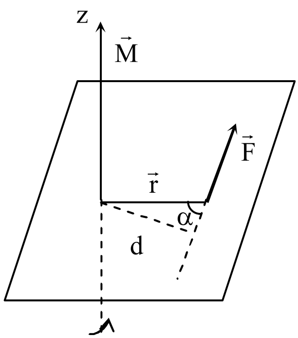


Рис.4.1

Таким образом, момент силы есть вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат $\vec{F}$ и $\vec{r}$. Направлен вектор по правилу буравчика.

Аналогично моменту силы определяется и момент импульса ($\vec{N}$). Пусть ось моментов выбрана таким образом, что вектор импульса лежит в плоскости, перпендикулярной оси. Моментом импульса относительно некоторой оси называют вектор $\vec{N}$, направленный вдоль этой оси по правилу буравчика и равный по величине

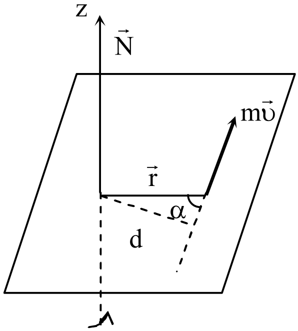


Рис.4.2

произведению импульса $m\upsilon$ на длину перпендикуляра d, опущенного на этот вектор из заданной оси (рис.4.2):

$$N = m\upsilon d.$$

Следовательно, момент импульса $\vec{N}$ есть векторное произведение радиуса вектора $\vec{r}$ на вектор импульса $m\vec{\upsilon}$:

$$\vec{N} = \left[\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}\right].$$

4.2. Уравнение моментов

Установим связь между моментом внешних сил и моментом импульса материальной точки. Рассмотрим случай, когда внешние силы, лежат в плоскости, перпендикулярной оси моментов. Если на материальную точку массы m действует сила F, то уравнение движения согласно второму закону Ньютона имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}.$$

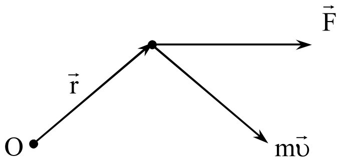


Рис.4.3

Выберем какую-либо неподвижную ось, перпендикулярную плоскости движения. Пусть след этой оси есть точка O (рис.4.3). Проведем из точки O к точке массой m радиус-вектор $\vec{r}$.

При движении точки радиус-вектор изменяется, т.е. $\vec{r}$ есть функция времени. Умножим векторно обе части уравнения движения на $\vec{r}$:

$$\left[\vec{r}\,\frac{d}{dt}m\vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

Правая часть этого уравнения есть момент сил относительно выбранной оси:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \qquad (4.1)$$

Левая часть есть производная по времени от момента импульса материальной точки относительно выбранной оси:

$$\frac{d}{dt}\vec{N} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}m\vec{\upsilon}\right]. \qquad (4.2)$$

Производная векторного произведения выражается аналогично производной произведения векторных величин, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}m\vec{\upsilon}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}m\vec{\upsilon}\right] + \left[\vec{r}\,\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})\right].$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$, то $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}m\vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{\upsilon}m\vec{\upsilon}\right] = 0$, т.е. векторное произведение двух колинеарных векторов $\vec{\upsilon}$ и $m\vec{\upsilon}$ равно 0. Окончательно можно записать

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}m\vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{r}\,\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})\right] \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[\vec{r}m\vec{\upsilon}\right] = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \qquad (4.3)$$

Учитывая выражения (4.1) и (4.2), из (4.3) получим уравнение моментов:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}.$$

Производная от момента импульса материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту $\vec{M}$, действующих на материальную точку сил относительно этой оси.

4.3. Движение центра тяжести твердого тела

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между двумя точками которого во время движения остается неизменным. Разобьем мысленно такое тело на бесконечно малые элементы, которые малы по сравнению с расстоянием до оси вращения. Каждый такой элемент тела мы можем рассматривать как материальную точку. Таким образом, мы сведем задачу о движении твердого тела к задаче о движении большого числа отдельных материальных точек.

Обозначим массу i–элемента через Δm_i, его скорость через υ_i. Запишем уравнение второго закона Ньютона для каждого из элементов:

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} + \vec{f}_i ,$$

где $\sum\limits_{i \neq k} \vec{F}_{ik}$ - сумма внутренних сил, $\vec{f}_i$ - внешняя сила, действующая на элемент массы.

Складывая для всех элементов тела, получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i ,$$

(4.4)

так как по третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил, действующих на отдельные элементы тела $\sum\limits_{i \neq k} \vec{F}_{ik} = 0$.

Согласно (4.4) так же, как и для всякой системы материальных точек, производная по времени от общего импульса тела равна сумме всех внешних сил, действующих на тело.

Координаты центра масс твердого тела определяются следующим образом:

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i}; \quad y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i}; \quad z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i},$$

где x_i, y_i, z_i - координаты элемента массы Δm_i (рис.4.4).

Продифференцируем по времени эти выражения:

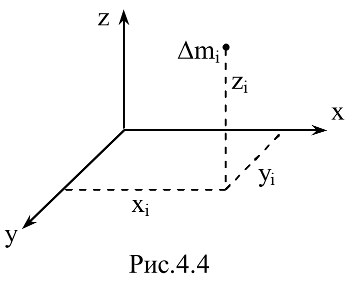


Рис.4.4

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right)\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i \frac{dx_i}{dt}\right);$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right)\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i \frac{dy_i}{dt}\right);$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right)\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i \frac{dz_i}{dt}\right).$$

Справа стоят компоненты общего импульса системы по трем осям координат. Слева – масса тела, умноженная на соответствующие компоненты скорости центра масс $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Складывая почленно, получим

$$m\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right),$$

(4.5)

где $\vec{\upsilon}$ - вектор скорости центра масс, m - масса всего тела.

Из выражения (4.5) следует, что твердое тело обладает таким же импульсом, каким обладала бы материальная точка массы, равной массе тела и движущаяся, как движется центр масс тела.

Подставляя (4.5) в уравнение (4.1), получим

$$\frac{d}{dt} m\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \qquad (4.6)$$

Поскольку масса тела есть величина постоянная, её можно вынести за знак дифференциала и уравнение движения центра масс твердого тела (4.6) примет следующий вид:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i . \qquad (4.7)$$

Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, которые действуют на данное тело.

Умножим векторно обе части уравнения (4.7) на $\vec{r}_i$:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{f}_i\right].$$

Правая часть этого уравнения есть момент сил, действующих на абсолютно твердое тело:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r} \vec{f}_i\right] = \vec{M} .$$

Левая часть есть производная от момента импульса абсолютно твердого тела относительно выбранной оси

$$\frac{d}{dt}\sum\left[\vec{r}_i \Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right] = \frac{d\vec{N}}{dt}.$$

Следовательно, и для абсолютно твердого тела уравнение моментов имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}. \qquad (4.8)$$

4.4. Момент инерции тела относительно оси вращения

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется сумма произведений элементарных масс на квадрат расстояния от оси вращения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2.$$

Для тела с неравномерно распределенной массой элементарная масса Δm_i

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i,$$

где ρ_i - плотность в данной точке, ΔV_i - элементарный объем. Поэтому момент инерции тела будет равен

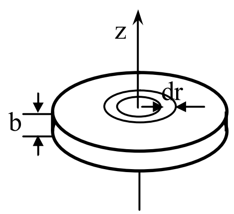
$$I = \sum_{i=1}^{n} \rho_i r_i^2 \Delta V_i.$$

Если ρ=const, то

$$I = \rho \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta V_i.$$

Переходя к пределу получим, что

$$I = \int \rho r^2 dV.$$



Найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис.4.5). Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr. Объем такого слоя равен $V=b2\pi r dr$,

Рис.4.5

где b - толщина диска, r – радиус кольцевого слоя.

Поскольку диск однороден, то ρ=const и

$$I_0 = \rho\int r^2 dV = \rho\int_0^R r^2 b 2\pi r dr ;$$

$$I_0 = 2\pi b\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi b\rho R^4}{4} = \rho\pi R^2 b\frac{R^2}{2} ,$$

где R - радиус диска.

Произведение $\rho\pi R^2 b = \rho V = m$, поэтому момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости и проходящей через его центр будет равен

$$I_0 = \frac{mR^2}{2} .$$

Для нахождения момента инерции диска относительно оси, не проходящей через его центр, воспользуемся теоремой Штейнера.

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, парал-лельной данной и проходящей через центр инерции тела и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями (рис.4.6):

$$I = I_0 + ma^2$$

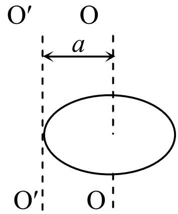


Рис.4.6

В соответствии с этой теоремой, момент инерции диска относительно оси O′O′ равен

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 .$$

Приведем моменты инерции тел различной геометрической формы.

1. Длинный стержень, толщина которого значительно меньше длины ℓ. Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящий через его середину $I_0 = \frac{1}{12}m\ell^2$ (рис.4.7,*а*). Относительно оси O′O′ (рис.4.7,*б*), согласно теореме Штейнера

$$I = I_0 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2,$$

т.е. $I = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$.

2. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр (рис.4.8,*а*) $I = \frac{2}{5}mR^2$. Относительно оси $O'O'$ (рис.4.8,*б*) $I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$.

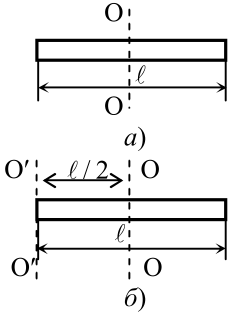


Рис.4.7

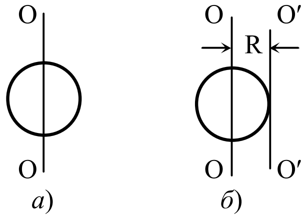


Рис.4.8

3. Момент инерции полого цилиндра относительно оси, проходящей через его центр $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$.

4. Момент инерции полого цилиндра (обруча) с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси цилиндра $I = m\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$ для тонкостенного полого цилиндра $R_1 \sim R_2 = R$ и $I = mR^2$.

4.5. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим движение однородного твердого тела, закрепленного на неподвижной оси, вокруг которой оно может свободно вращаться. Примем, что тело симметрично относительно движения. Точка O – след оси, f - внешняя сила, приложенная в точке A (рис.4.9).

Момент инерции относительно оси вращения дает только внешняя сила f, поскольку момент реакции опоры в точке O равен нулю.

Разобьем тело на отдельные малые элементы, и будем рассматривать тело как систему материальных точек с массой, равной Δm_i.

Элементы массы Δm_i обладают элементарным моментом импульса

$$\Delta\vec{N}_i = \left[\vec{r}_i \Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right].$$

Подставим в данное выра-жение $\upsilon i=\omega ri$ - линейную скорость некоторого элемента, получим уравнение для момента импульса элемента массы в виде $\Delta N_i = r_i^2 \Delta m_i \omega$, так как $\vec{r}_i \wedge \vec{\upsilon}_i = 90^0$ и $\sin\left(\vec{r}_i \wedge \vec{\upsilon}_i\right) = 1.$

Поскольку моменты импульса всех элементов направлены по оси вращения, и

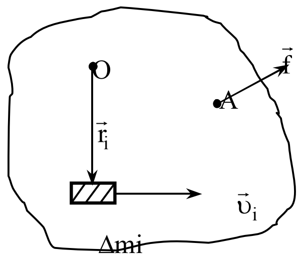


Рис.4.9

ω для всех элементов одно и тоже, то полный момент импульса тела

$$N = \sum_{i=1}^{n} \Delta N_i\;;$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2\right)\omega.$$

В этом выражении $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = I$ - момент инерции тела относи-тельно выбранной оси, поэтому

$N=I\omega$,

т.е. момент импульса однородного симметричного тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость вращения тела.

Если тело неоднородное и несимметричное относительно оси вращения, то

$$N_z = I\omega_z ,$$

где Nz - проекция момента импульса на ось z, ωz - проекция угловой скорости вращения на эту ось.

Так как все ri=const, то производная от момента импульса

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i r_i^2\right) \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} ,$$

т.е.

$$\frac{dN}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} . \qquad (4.9)$$

Из уравнений (4.8) и (4.9) вытекает, что

$$I \frac{d\omega}{dt} = M$$

или

$$M dt = d(I\omega) , \qquad (4.10)$$

т.е. импульс вращающего момента равен изменению момента импульса тела, к которому приложен этот вращающий момент.

Учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \xi$ - угловое ускорение, получим основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси в виде:

$$M = I\xi , \qquad (4.11)$$

т.е. момент сил, действующих на вращающееся тело прямо пропорционально моменту инерции тела относительно неподвижной оси вращения и угловому ускорению.

Для несимметричного неоднородного тела

$$M_z = I\xi_z ,$$

где Mz - проекция момента сил на ось z, ξz - проекция углового ускорения на ось z.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси можно записать, исходя из (4.8):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt} , \qquad (4.12)$$

где $\vec{M}$ - момент силы, $\vec{N}$ - момент импульса.

Если система замкнута, то момент внешних сил $\vec{M} = 0$, так как

$\sum_{i=1}^{n}\vec{f}=0$. Из уравнения (4.12) следует, что $\frac{d\vec{N}}{dt}=0$, а $\vec{N}=\text{const}$. Это уравнение выражает закон сохранения момента импульса.

Момент импульса твердого тела относительно какой-либо неподвижной оси остается постоянным, если момент внешних сил относительно этой оси равен нулю.

4.6. Кинетическая энергия твердого тела. Работа внешних сил при вращении твердого тела

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то линейная скорость элементарной массы Δm_i

$$\upsilon_i = r_i\omega,$$

где r_i - радиус-вектор, ω - угловая скорость.

Следовательно, кинетическая энергия i-элементарной массы

$$\Delta E_{\text{к}_i} = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 .$$

Кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии его частей, т.е.

$$E_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n}\Delta E_{\text{к}_i} = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2 .$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2 = I$ - момент инерции тела, то выражение для кинетической энергии тела примет следующий вид:

$$E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2} . \qquad (4.13)$$

Таким образом, кинетическая энергия вращения твердого тела вокруг неподвижной оси выражается формулой, совершенно аналогичной формуле, дающей кинетическую энергию материальной точки. Только роль массы играет момент инерции I, а роль линейной скорости – угловая скорость ω.

Найдем работу, которую совершают внешние силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Обозначим f_i внешнюю силу, действующую на элемент массой Δm_i, $ds_i = r_i d\varphi$ - путь элемента массы за время Δt, где $d\varphi$ - угол, на который повернется тело за время dt (рис.4.10).

Работа силы f_i:

$dA_i = f_{si} ds_i$, (4.14)

где fsi - проекция силы fi на направление перемещения. Учитывая выражение для пути элемента массы dsi перепишем уравнение для работы силы

dAi=fsiridφi.

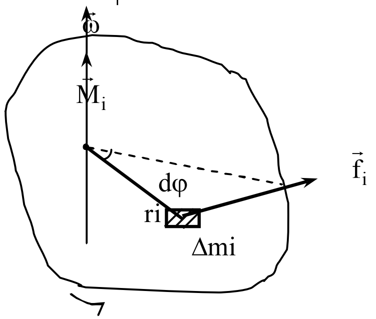


Рис. 4.10

Поскольку fsiri=Mi – проек-ция момента силы fi на направление оси вращения, то

dAi=Midφ.

Работа всех сил, приложен-ных к телу, равна

$$dA = \sum_{i=1}^{n} dA_i;$$

$$dA = \sum_{i=1}^{n} M_i d\varphi;$$

$$dA = d\varphi \sum_{i=1}^{n} M_i .$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} M_i = M$ - результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу, то

dA=Mdφ. (4.15)

Работа внешних сил при повороте на произвольный конечный угол

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi .$$

Покажем, что в соответствии с законом сохранения энергии, работа равна приращению кинетической энергии.

Согласно (4.15) работа внешних сил при повороте тела на угол dφ

dA=Mdφ,

а момент силы

$$M = I\xi = I\frac{d\omega}{dt} .$$

Угол поворота тела за время dt при ω=const

$$d\varphi = \omega dt . \qquad (4.16)$$

Подставляя (4.16) и (4.10) в (4.15), получим

$$dA = I\frac{d\omega}{dt}\omega dt = Id\omega \cdot \omega .$$

Величина

$$Id\omega \cdot \omega = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = d(E_к) ,$$

поэтому

$$dA=dE_к.$$

4.7. Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

Рассмотрим частный случай движения твердого тела, когда его ось вращения проходит через центр масс и перемещается, оставаясь параллельной самой себе (рис.4.11).

Пусть υ_i - линейная скорость элемента объема тела с массой Δm_i и υ_c - линейная скорость центра масс тела относительно той же координатной системы.

Введем, кроме того, скорость υ_i' элемента объема тела относи-тельно центра масс, тогда

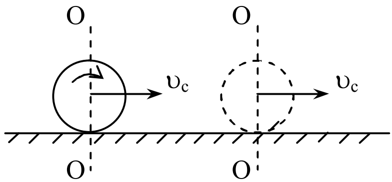


Рис.4.11

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_i' + \vec{\upsilon}_c \qquad (4.17)$$

Кинетическая энергия элемента объема $\Delta E_{к_i}$ равна

$$\Delta E_{к_i} = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i\left(\upsilon_{ix}^2 + \upsilon_{iy}^2 + \upsilon_{iz}^2\right)}{2}$$

или (по 4.17)

$$\Delta E_{к_i} = \frac{\Delta m_i \upsilon_c^2}{2} + \frac{\Delta m_i \upsilon_i'^2}{2} + \Delta m_i\left(\upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' + \upsilon_{cy}\upsilon_{iy}' + \upsilon_{cz}\upsilon_{iz}'\right).$$

Кинетическую энергию всего тела $E_к$ получим, взяв сумму кинетических энергий всех его элементов:

$$E_к = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i \upsilon_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i \upsilon_i'^2}{2} + \\ + \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i(\upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' + \upsilon_{cy}\upsilon_{iy}' + \upsilon_{cz}\upsilon_{iz}') \qquad (4.18)$$

Первый из членов правой части этого равенства представляет собой кинетическую энергию массы m, равной массе всего тела, движущейся вместе с центром масс: $\frac{m\upsilon_c^2}{2}$.

Для второго члена учтем, что $\upsilon_i' = \omega r_i^2$, $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2 = I$ и перепишем его в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i}{2} r_i^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Получим, что он равен кинетической энергии твердого тела относительно оси вращения, проходящей через центр его масс.

Третий член равен нулю. Для доказательства этого положения рассмотрим произведение $\Delta m_i \upsilon_{cx}\upsilon_{ix}'$ и, учитывая, что $\upsilon_{ix}' = \upsilon_{ix} - \upsilon_{cx}$, перепишем его в следующем виде:

$$\Delta m_i \upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' = \Delta m_i \upsilon_{ix}\upsilon_{cx} - \Delta m_i \upsilon_{cx}^2. \tag{4.19}$$

Обозначим координаты центра масс x_c, y_c, z_c и координаты i–го элемента тела через x_i, y_i, z_i. Тогда $\upsilon_{cx} = \frac{dx_c}{dt}, \upsilon_{ix} = \frac{dx_i}{dt}$.

Воспользовавшись этими равенствами, перепишем выражение (4.19):

$$\Delta m_i \upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' = \Delta m_i \frac{dx_c}{dt}\frac{dx_i}{dt} - \Delta m_i\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2.$$

Суммируя по всем элементам тела, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' = \frac{dx_c}{dt}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \frac{dx_i}{dt} - m\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2. \tag{4.20}$$

Согласно материала, изложенного в п. 4.3 о движении центра тяжести твердого тела:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \frac{dx_i}{dt} = m\frac{dx_c}{dt}. \tag{4.21}$$

Подставляя (4.21) в (4.20), находим

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \upsilon_{cx}\upsilon_{ix}' = 0.$$

Такое же равенство найдем и для других составляющих скоростей по осям, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\upsilon_{cx}\upsilon'_{ix} + \upsilon_{cy}\upsilon'_{iy} + \upsilon_{cz}\upsilon'_{iz}) = 0 \,.$$

После этого выражение (4.18) примет вид

$$E_к = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \,,$$

т.е. полная кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии массы, равной массе всего тела, движущейся вместе с центром масс и кинетической энергии его вращения относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

5. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5.1. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью υ. Одну из этих систем обозначим буквой К и будем считать условно неподвижной. Тогда вторая система К′ будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью υ. Выберем координатные оси x', y', z' системы К′ так, чтобы оси x и x′ совпадали, а оси y и y′, а также z и z′ были параллельны друг другу (рис.5.1).

Найдем связь между координатами x,y,z некоторой точки М в системе К и координатами той же точки в системе К′.

За начало отсчета времени выберем момент, когда начало координат обеих систем совпадали.

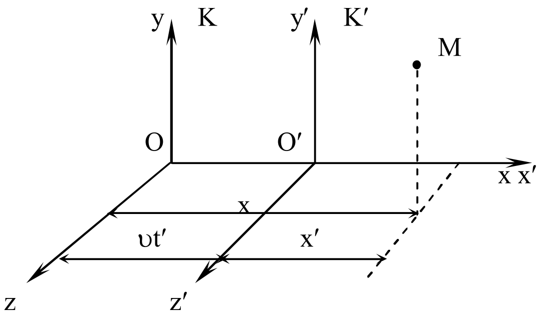


Рис.5.1

Из рис. 5.1 видно, что

$x=x'+\upsilon t'$;

$y=y'$;

$z=z'$.

Добавим к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым обра-зом, т.е. $t=t'$, и получим совокупность четырех уравнений, называемых преобразованиями Галилея:

$$x = x' + \upsilon t';\quad y = y';\quad z = z';\quad t = t'. \tag{5.1}$$

Продифференцировав соотношения (5.1) по времени, найдем связь между скоростями точки М по отношению к системам отсчета К и К′:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \upsilon;\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'};\quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'}. \tag{5.2}$$

Обозначим проекции скоростей точки М в системе К на оси x,y,z:

$$\frac{dx}{dt} = u_x,\quad \frac{dy}{dt} = u_y,\quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

в системе К′ на оси x', y', z':

$$\frac{dx'}{dt'}=u'_x\,,\quad \frac{dy'}{dt'}=u'_y\,,\quad \frac{dz'}{dt'}=u'_z$$

и перепишем соотношения (5.2) в виде

$$u_x=u'_x+\upsilon\,;\quad u_y=u'_y\,;\quad u_z=u'_z\,. \qquad (5.3)$$

Три скалярных уравнения (5.3) эквивалентны векторному соотношению

$$\vec{u}=\vec{u}\,'+\vec{\upsilon}\,. \qquad (5.4)$$

Соотношения (5.3) и (5.4) выражают классический закон сложения скоростей.

Докажем, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной.

Система отсчета, относительно которой тело при компенсации внешних воздействий движется равномерно и прямолинейно (υ=const)называется инерциальной системой отсчета.

Продифференцируем по времени соотношение (5.4), учитывая, что $\vec{\upsilon}=\mathrm{const}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d\vec{u}\,'}{dt}\,,$$

получим

$$\vec{a}=\vec{a}\,'\,. \qquad (5.5)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью, оказывается одним и тем же.

Если система отсчета K инерциальная, т.е. ускорение тела a =0, то и остальные системы K′ будут инерциальными, т.е. a' =0.

В классической механике считается, что масса материальной точки (тела) не зависит от скорости её движения, т.е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета:

$$m=m'.$$

Из второго закона Ньютона имеем

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}\,,\quad \vec{a}'=\frac{\vec{F}'}{m}\,.$$

Так как $\vec{a}=\vec{a}\,'$, то $\frac{\vec{F}}{m}=\frac{\vec{F}'}{m}$ и

$$\vec{F}=\vec{F}'\,. \qquad (5.6)$$

Силы, действующие на тело в системе K и K′ так же будут одинаковы, т.е. уравнение динамики не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Это означает, что с механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны.

Все это позволяет сформулировать принцип относительности Галилея или механический принцип относительности в следующем виде: все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом при одинаковых начальных условиях.

Неизменность вида уравнения при замене в нём координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называется инвариантностью уравнения.

Так как системы K и K′ выбраны произвольно, то можно утверждать, что согласно (5.5), ускорение одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т.е. является инвариантным относительно преобразований Галилея.

Силы, с которыми взаимодействуют материальные точки (или тела) согласно (5.6), также являются инвариантными относительно преобразований Галилея. Это следует из того, что, во-первых, силы взаимодействия зависят от расстояния между точками, которые в классической механике принимаются одинаковыми во всех системах отсчета, во-вторых, они зависят от относительных скоростей точек, которые одинаковы во всех системах отсчета.

Второй и третий законы Ньютона (при m=const) запишутся следующим образом:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,,\quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{(для системы K);}$$

$$\vec{F}' = m\vec{a}'\,,\quad \vec{F}'_{12} = -\vec{F}'_{21} \quad \text{(для системы K}'\text{).}$$

Учитывая инвариантность ускорений и сил, можно утверждать, что уравнения, выражающие второй и третий законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

Принцип относительности Галилея можно записать в иной формулировке: никакими механическими опытами, проводимыми в инерциальной системе отсчета, нельзя обнаружить движение этой системы относительно других инерциальных систем.

Механический принцип относительности свидетельствует о том, что в рамках классической механики все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Среди них нет какой-то главной, раз и навсегда выделенной абсолютной системы отсчета, движение всех тел относительно которой можно было бы назвать абсолютным движением.

5.2. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца

Для описания движения тел со скоростями (υ) сравнимыми со скоростью света (c) используется релятивистская механика, учитывающая требования специальной теории относительности.

Основоположником теории относительности Эйнштейном (1905) был предложен принципиально новый подход к электродинамике движущихся тел. Проанализировав огромный экспериментальный материал, Эйнштейн выбрал два наиболее бесспорных положения и построил на их основе свою теорию.

Эти положения называются постулатами специальной теории относительности. Они формулируются следующим образом.

1. В любых инерциальных системах отсчета все физические явления (механические, электромагнитные и другие) при одних и тех же условиях протекают одинаково; иначе говоря, с помощью любых опытов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно.

2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источников света; она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, т.е. представляет собой универсальную постоянную.

Первый постулат Эйнштейна выражает принцип относительности, являющийся обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы. Его справедливость, как и второго постулата, подтверждают разнообразные опыты.

Принцип относительности можно сформулировать, исходя из понятия инвариантности (см. п.5.1) следующим образом: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Эйнштейн показал, что в соответствии с двумя постулатами теории относительности между координатами и временем в двух инерциальных системах отсчета K и K′, изображенных на рис.5.1 выражаются не преобразованием Галилея (5.1), а более сложным образом.

Рассмотрим распространение светового сигнала в системе K′. Скорость светового сигнала в этой системе $u'_x = c$. Тогда согласно выражения (5.3) (см. п.5.1) скорость светового сигнала в системе K окажется равной

$$u = c + \upsilon,$$

т.е. превзойдет c, что согласно второго постулата Эйнштейна невозможно. Отсюда вытекает, что преобразования Галилея должны быть заменены другими формулами.

Предположим, что правильное преобразование координат отличает от Галилеевского множителями γ:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \upsilon t); \\ x &= \gamma(x' + \upsilon t'). \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Для отыскания множителя γ рассмотрим распространение фронта светового сигнала.

Пусть световой сигнал начал свое движение вдоль оси x и x′ из начала координат систем K и K′ в тот момент времени, когда они совпадали. Тогда соответственно второму постулату Эйнштейна

$$x=ct, \text{ а } \; x'=ct' \qquad (5.8)$$

Подставив (5.8) в (5.7) получим два уравнения:

$$ct'=\gamma(ct-\upsilon t)=\gamma(c-\upsilon)t; \qquad (5.9)$$

$$ct=\gamma(ct'+\upsilon t')=\gamma(c+\upsilon)t'. \qquad (5.10)$$

Выразим из уравнения (5.10) время t:

$$t = \frac{\gamma(c+\upsilon)t'}{c}$$

и подставим в уравнение (5.9):

$$ct' = \gamma^2 \frac{(c^2 - \upsilon^2)}{c} t',$$

откуда
$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - \upsilon^2},$$

а
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (5.11)$$

С учетом (5.11) выражения (5.7) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \\ x &= \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \end{aligned} \qquad (5.12)$$

В направлении осей y и y′ смещение не происходит. Соотношения между y и y′ от времени не зависят, т.к. оси перпендикулярны к вектору относительной скорости.

Следовательно, в направлениях, перпендикулярных к вектору скорости координаты преобразуются тождественно, т.е.

$$\begin{aligned} y' &= y; \quad y = y'; \\ z' &= z; \quad z = z'. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Для нахождения замены преобразования времени решим совместно два уравнения (5.7):

$$x=\gamma[\gamma(x-\upsilon t+\upsilon t'];$$

$$\frac{x}{\gamma} = \gamma(x - \upsilon t) + \upsilon t';$$

$$\frac{x}{\gamma\upsilon} = \frac{\gamma x}{\upsilon} - t + t';$$

$$t' = \gamma\left[t - \frac{x}{\upsilon}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right],$$

откуда, учитывая, что $\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{\upsilon^2}{c^2}$, получим

$$t' = \gamma\left(t - x\frac{\upsilon}{c^2}\right)$$

или

$$t' = \frac{t - x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{5.14}$$

Объединяя (5.12), (5.13), (5.14), найдем, что преобразования координат и времени при переходе от систем К→К′ и К′→К будут иметь следующий вид:

К→К′ К′→К

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - x\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\qquad (5.15)
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \frac{t' + x'\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\qquad (5.16)
$$

Эти преобразования носят название преобразований Лоренца. Они устраняют противоречие преобразований Галилея постоянству скорости света.

Однако это не означает, что преобразования Галилея всегда неверны.

Преобразования Лоренца верны при любых скоростях, как при малых, так и при сколь угодно больших, возможных в природе скоростях.

Но при малых скоростях, где $\frac{\upsilon}{c} << 1$, членами, содержащими $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ и $\frac{\upsilon}{c^2}$, можно пренебречь и преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Следовательно, преобразования Галилея являются частным случаем общих преобразований Лоренца.

Особенно важным являются следующие отличия преобразований Лоренца от преобразований Галилея.

В рамках преобразований Галилея расстояния между двумя событиями есть абсолютная величина. Это расстояние не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. То же относится и к промежутку времени между этими событиями. Преобразования Лоренца показывают, что как расстояния, так и промежуток времени меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом оказывается, что пространственные и временные отношения не независимы.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения классической механики следствий.

5.3. Следствия из преобразований Лоренца

5.3.1. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе К (см. рис.5.1) с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1=t_2=b$.

Согласно преобразованиям Лоренца (5.15), в системе К′ этим событиям будут соответствовать координаты

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon b}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ; \quad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon b}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{5.17}$$

и моменты времени

$$t_1' = \frac{b - \frac{\upsilon}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ; \quad t_2' = \frac{b - \frac{\upsilon}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ . \tag{5.18}$$

Если рассматривать два события, происходящие в системе К в разных точках, например ($x_2>x_1$), то из преобразований Лоренца (5.18) следует, что в системе К′ $t_1' > t_2'$.

Таким образом, события одновременные в одной системе отсчета, будут неодновременными в другой системе, движущейся относительно первой, т.е. имеет место относительность одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства.

Если одновременные события в системе К происходят в одном и том же месте пространства $x_1=x_2$, то и в системе К′, согласно (5.17), $x_1' = x_2'$ и, согласно (5.18), $t_1' = t_2'$.

Следует отметить, что сказанное относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь.

Например, выстрел и попадание пули в мишень ни в одной из систем отсчета не будут одновременными. И во всех системах события, являющиеся причиной будут предшествовать следствию.

5.3.2. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно подвижной системы отсчета K′ (рис.5.2).

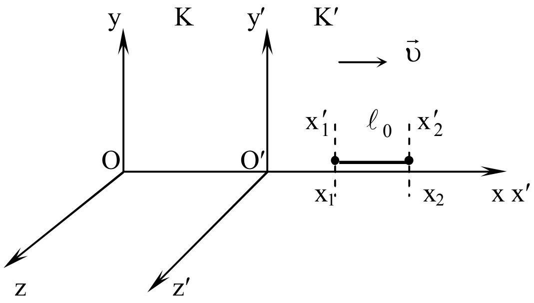


Рис.5.2

Длина стержня в системе K′ равна $\ell_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 - не изменяю-щиеся со временем координаты концов стержня. Эта величи-на называется собст-венной длиной или собственными разме-рами тела.

Относительно системы K стержень движется со скоростью υ. Для определения длины стержня в неподвижной системе K нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени t_1=t_2=b. Их разность

$$x_2(t) - x_1(t) = \ell$$

и дает длину стержня, измеренную в системе K. Выразим ℓ через ℓ_0. Для этого запишем соотношения (5.15) из преобразований Лоренца:

$$x'_1 = \frac{x_1 - \upsilon b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - \upsilon b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

откуда

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

т.е

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Из полученного соотношения следует, что длина стержня, измеренная в системе относительно которой движется, оказывается меньше длины ℓ_0, измеренной в системе относительно которой стержень покоится.

Это явление называется лоренцевым сокращением.

Из второго и третьего соотношений (5.15), не содержащих времени, следует, что

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1;$$
$$z_2' - z_1' = z_2 - z_1,$$

т.е. поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Обобщая все сказанное можно утверждать, что линейные размеры тела максимальны в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело находится в покое.

5.3.3. Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в точке, неподвижной относительно системы К′ происходит событие, длящееся время $\tau_0 = t_2' - t_1'$.

Началу события в этой системе соответст-вует координата $x_1' = a$ и момент времени t_1', концу события – коор-дината $x_2' = a$ и момент времени t_2' (рис.5.3).

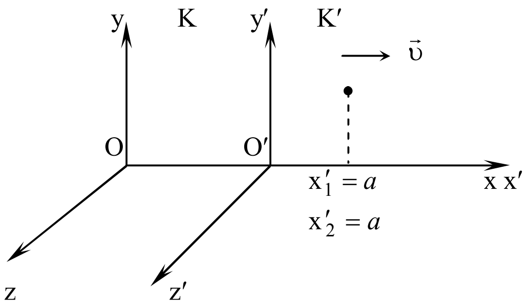


Рис.5.3

Относительно системы К точка, в которой происходит событие, перемещается со скоростью υ. Согласно преобразованиям Лоренца (5.16), началу и концу события соответствует в системе К

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{\upsilon}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{\upsilon}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

откуда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Обозначим t_2-t_1=τ, полученная формула примет вид

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (5.19)$$

Рассматривая протекание события в системе К можно определить τ как длительность события, измеренную по неподвижным часам. Тогда τ_0 – это длительность события, измеренная по часам, движущимся вместе с телом. Оно называется собственным временем тела.

Из соотношения (5.19) следует, что длительность события, происходящее в некоторой точке a, минимальна в той инерциальной системе отсчета, относительно которой точка a неподвижна.

Этот результат можно также сформулировать следующим образом: часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета идут медленнее покоящихся часов, как видно из (5.19). Замедление хода часов становится существенным при скоростях υ, близких к скорости света в вакууме.

Релятивистский эффект замедления хода времени был подтвержден в опытах с мьюнами – нестабильными, самопроизвольно распадающимися элементарными частицами.

Среднее время жизни покоящегося мьюна τ_0, т.е. время, измеренное по часам, движущимся вместе с ним, как показали измерения, равно $2{,}2 \cdot 10^{-6}$с. Если бы релятивистского эффекта не было, то мьюны, рождающиеся в верхних слоях атмосферы под действием первичных космических лучей и движущихся к Земле со скоростью υ, близкой к с, должны были бы проходить в атмосфере сравнительно небольшие расстояния порядка $c \cdot \tau_0$=660 м, поэтому они не могли бы достигать поверхности Земли, где они в действительности наблюдаются. Формула (5.19) легко объясняет этот парадокс: для земного наблюдателя срок жизни мьюна:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

а путь мьюна в атмосфере равен

$$\upsilon\tau = \frac{c\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad \text{т.е.} \quad \upsilon\tau >> c\tau_0.$$

Время, отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землей оказывается гораздо большим $\tau >> \tau_0$, и экспериментатор наблюдает пробег мьюна гораздо больше 600 м. Наблюдения показывают, что мьюны образуются в космических лучах на высоте 20-30 км и успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности.

5.4. Пространственно-временной интервал

Какое либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами x,y,z) и временем t, когда оно произошло. Таким образом, событию можно сопоставить четыре числа: x,y,z,t. Введем воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято называть мировой точкой. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая мировой линией (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси t).

Пусть одно событие имеет координаты x_1,y_1,z_1,t_1, другое событие – координаты x_2,y_2,z_2,t_2. Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \qquad (5.20)$$

называют интервалом между соответствующими событиями.

Введя расстояние

$$\ell_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, и обозначив разность (t_2-t_1) через t_{12}, выражение для интервала можно записать в следующем виде:

$$s_{12} = \sqrt{c^2t_{12}^2-\ell_{12}^2}\,. \qquad (5.21)$$

Легко убедиться в том, что величина интервала между двумя данными событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же. Чтобы упростить выкладки, запишем квадрат интервала в системе К в виде

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 ,$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Интервал между теми же событиями в системе К′ равен

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 . \qquad (5.22)$$

Согласно формулам (5.15),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon\Delta t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} ,$$

подставив эти значения в формулу (5.22) получим, что

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 ,$$

т.е. $\Delta s'^2 = \Delta s^2$.

Таким образом, интервал (5.20) является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Из рассуждений 5.3.2 и 5.3.3 видно, что t_{12} и ℓ_{12} не являются инвариантом, т.е. каждое слагаемое (5.21) и (5.22) изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, сама же величина s_{12}^2 остается постоянной.

Согласно (5.19), собственное время события, т.е. время, измеренное по часам, движущимся относительно инерциальной системы отсчета

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} .$$

Преобразуем выражение, учитывая, что $\tau = t_2 - t_1 = \Delta t$, $\Delta\ell = \upsilon\Delta t$:

$$\tau_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2 - \upsilon(\Delta t)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\ell^2} ,$$

тогда

$$\tau_0 = \frac{1}{c}\Delta s . \qquad (5.23)$$

Промежуток собственного времени пропорционален интервалу между событиями. Поскольку Δs - интервал между событиями является инвариантом, т.е. одинаков во всех инерциальных системах отсчета, то согласно (5.23) и собственное время так же является инвариантом.

Таким образом, собственное время не зависит от того, в какой системе отсчета наблюдается движение данного тела.

5.5. Релятивистская кинематика. Релятивистский закон сложения скоростей

Механику, основанную на принципе относительности, одинаковости скорости света во всех инерциальных системах и преобразованиях Лоренца принято называть релятивистской (от латинского слова relativ - отношение). Законы релятивистской механики в общем случае отличаются от законов классической механики Галилея-Ньютона.

1. В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми, сколь угодно большими скоростями. Однако уже из преобразований Лоренца (5.15) и (5.16) видно, что относительные скорости тел имеют верхнюю границу

$$\upsilon < c.$$

При $\upsilon > c$ знаменатели, равные $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ становятся мнимыми и координаты x' и t' теряют физический смысл.

2. Движущиеся тела изменяют размеры. Длина стержня, движущегося со скоростью υ относительно системы отсчета К, связана с длиной неподвижного стержня ℓ_0 соотношением

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\ .$$

При малых скоростях движения ($\upsilon \ll c$) $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \cong 1$, релятивистскими сокращениями длин движущихся тел можно пренебречь. При υ близком к c это сокращение становится существенным. Так при относительной скорости двух инерциальных систем $\upsilon = \sqrt{\frac{3}{4}}c \cong 260000$ км/с, $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ и метр покоящийся в одной системе будет иметь в другой длину 1/2 м.

Скорости такого порядка, при которых сокращение размеров движущихся материальных частиц становится заметным, носят название релятивистских скоростей. В настоящее время они достигнуты в крупных лабораториях и в новых промышленных установках. Так, в ядерных реакторах атомных электростанций быстрые нейтроны движутся со скоростями, для которых $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=0{,}997$, т.е. сокращение длин порядка 3%.

Сильно релятивистские частицы приходящих на Землю космических лучей имеют $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\approx 10^{-7}$, и их продольные размеры сокращаются в 10 миллионов раз.

3. В движущейся системе изменится ход течения времени:

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

В неподвижной системе К два события будут разделены промежутком времени в $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ большим.

Представим себе, что удалось реализовать фантастический проект и отправить к звезде ракету со скоростью, столь близкой к скорости света, что $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=0{,}001$. По земным часам ракета будет лететь к звезде 1000 лет. Но для материальной системы – ракеты и путешественника в ней – путешествие займет всего 1 год.

Расчет показывает, что при полетах в пределах солнечной системы релятивистские эффекты скажутся лишь в виде малых поправок.

4. Релятивистский закон сложения скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки в инерциальной системе К и К′.

В системе К положение точки определяется в каждый момент времени t координатами x,y,z. Выражения

$$u_x=\frac{dx}{dt},\ \ u_y=\frac{dy}{dt},\ \ u_z=\frac{dz}{dt}$$

представляют собой проекции на оси x,y,z вектора скорости точки относительно системы К.

В системе К′ положение точки характеризуется в каждый момент времени t′ координатами x′,y′,z′. Проекции на оси x′,y′,z′. вектора скорости точки относительно системы К′ определяются следующими выражениями:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Из формулы (5.16) преобразований Лоренца вытекает, что

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \; dy = dy'; \; dz = dz'; \; dt = \frac{dt' + \frac{\upsilon}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое, получим формулы преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x}; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'_x}. \qquad (5.24)$$

Формулы (5.24) выражают закон сложения скоростей в релятивистской кинематике.

В случае, когда $\upsilon \ll c$ (5.24) переходят в формулы сложения скоростей (5.3) в классической механике.

Все изложенное выше показывает, что законы релятивистской механики в случае малых скоростей ($\upsilon \ll c$) переходят в законы классической механики.

Таким образом, классическая механика не отвергается, а лишь ограничивается определенными пределами применимости: случаями, когда относительные скорости тел много меньше скорости света. Она верна как частный случай общей механики Эйнштейна – случай малых скоростей.

5.6. Релятивистская динамика

В классической механике Ньютона предполагается, что масса тела постоянна, независимо от состояния его движения и одинакова во всех инерциальных системах отсчета ($m=m'$).

Эйнштейн показал, что при $\upsilon \sim c$ масса тела зависит от скорости её движения по отношению к рассматриваемой инерциальной системе отсчета по следующему закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (5.25)$$

где m_0 - масса того же тела, измеренная в инерциальной системе отсчета по отношению к которой тело покоится. Эта величина называется массой покоя тела. Масса m движущегося тела называется релятивистской массой тела или просто массой.

В связи с уравнением (5.25) – основной закон релятивистской динамики – будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\vec{F}. \qquad (5.26)$$

Это выражение является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

При $\upsilon \ll c$ $m \sim m_0$ и релятивистское уравнение (5.26) совпадает с основным законом динамики в классической механике:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}, \text{ или } \frac{d}{dt}\vec{p}=\vec{F},$$

где $\vec{p}$ - импульс.

Из (5.26) следует, что импульс релятивистской частицы равен

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Найдем выражение для кинетической энергии свободной материальной частицы в релятивистской механике.

Пусть в начале эта частица покоилась. А затем под действием силы F приобрела некоторую скорость υ и соответствующую энергию $E_к$, после чего действие силы прекратилось и частица вновь стала свободной.

Приращение $\Delta E_к$ кинетической энергии материальной частицы на элементарном перемещении dr равно работе, совершаемой силой F на этом перемещении.

$$dE_к=dA$$

Работа может быть записана через скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$dA=\left(\vec{F}d\vec{r}\right).$$

Учитывая, что $d\vec{r}=\vec{\upsilon}dt$, получим

$$dA=\left(\vec{F}\vec{\upsilon}dt\right)$$

и, соответственно, $$dE_к = \left(\vec{F}\vec{\upsilon}dt\right). \tag{5.27}$$

Из основного уравнения релятивистской динамики (5.26) имеем

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{m_0\upsilon}{c^2\left[1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right]^{3/2}}\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\upsilon}. \tag{5.28}$$

Подставляя (5.28) в уравнение (5.27) получим следующее выражение для приращения кинетической энергии материальной частицы

$$dE_к = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}\right) + \frac{m_0\upsilon d\upsilon}{c^2\left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right).$$

Учитывая, что $\left(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}\right) = \upsilon d\upsilon$, а $\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right) = \upsilon^2$ перепишем предыдущее выражение в таком виде:

$$dE_к = \frac{m\upsilon d\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left[1 + \frac{\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}\right] = \frac{m_0\upsilon d\upsilon}{\left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{3/2}}, \tag{5.29}$$

с другой стороны из формулы (5.25) видно, что

$$dm = \frac{m_0\upsilon d\upsilon}{c^2\left[1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right]^{3/2}}. \tag{5.30}$$

Сравнивая (5.29) и (5.30), делаем вывод, что

$$dE_к = c^2 dm, \tag{5.31}$$

т.е. при изменении скорости материальной точки изменение её кинетической энергии и массы пропорциональны друг другу.

Проинтегрируем уравнение (5.31), учитывая, что кинетическая энергия покоящейся точки равна нулю, а её масса равна m_0:

$$\int_0^{E_к} dE_к = c^2\int_{m_0}^{m} dm;$$

$$E_к = mc^2 - mc_0^2. \tag{5.32}$$

Подставим в уравнение (5.32) выражение для массы (5.25), получим формулу для вычисления кинетической энергии в релятивистской динамике:

$$E_к = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - m_0c^2 ;$$

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (5.33)$$

При $\upsilon \ll c$ легко получить обычное выражение для кинетической энергии материальной точки в классической механике. Для этого разложим в бином Ньютона $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$:

$$\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right).....$$

и подставим в уравнение (5.33)

$$E_к = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}-1\right) = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2 .$$

Из уравнения (5.31) следует, что при сообщении телу кинетической энергии $dE_к$ его масса возрастает на величину:

$$dm = \frac{dE_к}{c^2} .$$

Естественно ожидать, что масса тела должна возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но также при любом увеличении его полной энергии, независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение произошло, т.е.

$$dm = \frac{dE}{c^2} .$$

Интегрируя это уравнение, находим универсальное соотношение между m и E:

$$E = mc^2 + k . \qquad (5.34)$$

Постоянную интегрирования (k) нужно положить равной нулю, так как уравнение (5.34) при любом значении $k\neq 0$ неинвариантно относительно преобразований Лоренца. Таким образом, полная энергия системы равна её полной релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме:

$$E=mc^2. \qquad (5.35)$$

Уравнение (5.35) выражает один из важнейших законов природы – закон взаимосвязи массы и энергии.

Связь между импульсом и энергией можно найти следующим образом. Подставим в (5.35) уравнение для массы (5.25):

$$E=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\cdot c^2 .$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и освободимся от знаменателя:

$$E^2=\frac{m_0^2c^4}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}};$$

$$E^2-E^2\frac{\upsilon^2}{c^2}=m_0^2c^4 .$$

Преобразуем полученное соотношение:

$$E^2=m_0^2c^4+\frac{m^2c^4\upsilon^2}{c^2};$$

$$E^2=m_0^2c^4+m^2\upsilon^2c^2 .$$

Учитывая, что $m\upsilon$ есть импульс p, получим

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} .$$

Эта формула выражает связь между полной энергией свободной частицы (тела) и её импульсом. Величина $m_0c^2=E_0$ носит название энергии покоя частицы или собственной энергией. Собственная энергия сохраняется (как и масса покоя) за каждой частицей, пока она не превращается в другие частицы.