

1 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО- ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КАК УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА

Задания и упражнения

Задание 1. Изучить основные приемы моделирования производственных условий.

При разработке и построении модели успех зависит от освоения разработчиком приемов моделирования – способов отражений в модели условий, зависимостей, закономерностей моделируемой системы. При решении практических задач возникает множество всевозможных ситуаций, а многообразие состояний моделируемых систем требует знания широкого арсенала приемов моделирования. Накопление необходимого разнообразия приемов и получения навыков умелого их применения приходят по мере приобретения опыта работы по решению оптимизационных задач.

На отдельных фрагментах различных задач рассмотрим основные приемы моделирования математической формализации экономических процессов.

Запись ограничений с постоянными, фиксированными объемами ресурсов, работ, производимой продукции

Первое и наиболее общее ограничение для любого аграрного производства – это условие, что под посевы выращиваемых культур можно отвести пашни не больше, чем имеется. Это условие можно записать так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 480, \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_6 - площади посева отдельных сельскохозяйственных культур;
480 – площадь пашни, которую можно занять под посевы.

Пускай, x_2 – площадь посева сои, а в этом году под сою можно отвести не более 100 га. В модели это можно отразить так: $x_2 \leq 100$.

Смысл приема состоит в том, что свободный член неравенства «фиксированное число – его величина» в процессе решения задачи не изменяется. В первом случае в распоряжении имеется 480 га пашни и под посев больше отвести нельзя, а во втором случае можно засеять соей не больше 100 га.

Этим приемом пользуются при моделировании использования производственных ресурсов, отражении в модели объемов выполняемых работ, количества поставляемой продукции, и во всех других случаях, когда моделируемая величина фиксирована.

Запись ограничений с изменяющимися объемами ресурсов, работ, производимой продукции

На практике встречаются случаи, когда в модели необходимо отразить объемы производственных ресурсов, выполняемых работ или количество продукции не фиксированным числом, а предусмотреть возможность их изменения в определенных пределах. Например, занять под посевы зерновых культур не менее 200 га, но не более 300 га; произвести не менее 500 т картофеля, но не более 700 т; имеющейся техникой выполнить за год 40 тыс. усл. га механизированных работ, но не более 50 тысяч. Записать эти условия одной строкой, одним линейным неравенством нельзя, здесь можно применить прием двусторонних ограничений. Запись таких условий осуществляется в виде двух ограничений с использованием соотношений типа « \leq » и « \geq »:

– по посевам зерновых:

$$\begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_1 \leq 300 \end{cases};$$

– по производству картофеля:

$$\begin{cases} x_2 \geq 500, \\ x_2 \leq 700 \end{cases}$$

– по объему механизированных работ:

$$\begin{cases} x_3 \geq 40000 \\ x_3 \leq 50000 \end{cases}$$

Когда объем производственных ресурсов, работ или продукции частично неизвестен и должен быть найден, в процессе решения задачи применяют прием введения вспомогательной переменной.

Допустим, фермер выращивает пшеницу и картофель на площади x_1 и x_2 га соответственно. Ограничение по затратам труда в модели выражено соотношением:

$$30x_1 + 400x_2 \leq 6000, \quad (2)$$

где $30 x_1$ – затраты труда в чел.-ч на возделывание пшеницы;

$400 x_2$ – на возделывание картофеля;

6000 – запас труда членов хозяйства в чел.-ч.

Необходимо отразить в модели привлечение сезонных работников на время уборки картофеля, причем объем привлекаемого дополнительно труда находится в процессе решения задачи, так как зависит от структуры производства. Это условие можно записать так:

$$30x_1 + 400x_2 \leq 6000 + x_3, \quad (3)$$

где x_3 – вспомогательная переменная, обозначающая объем дополнительно привлекаемых сезонных трудовых ресурсов в чел.-ч.

Перенесем x_3 в левую часть и получим соотношение:

$$30x_1 + 400x_2 - x_3 \leq 6000.$$

Запись ограничений с помощью отраженной переменной

Для моделирования расчетных величин, которые не являются основными переменными, но необходимы для их нахождения, в модель вводят вспомогательные переменные, отражающие общее количество и называемыми – отраженными переменными.

Пусть в состав стада крупного рогатого скота в хозяйстве входят: x_1 – поголовье коров, x_2 – нетелей, x_3 – телок и x_4 – бычков старше одного года. Записать условие, что удельный вес коров в стаде может колебаться от 40 до 50 % общего поголовья стада. Данное требование в модели можно выразить так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 \\ x_1 \geq 0,4x_5 \\ x_1 \leq 0,5x_5 \end{cases},$$

где x_5 – общее поголовье стада крупного рогатого скота.

После преобразования модель приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 \\ x_1 - 0,4x_5 \geq 0 \\ x_1 - 0,5x_5 \leq 0 \end{cases}.$$

Запись ограничений с помощью коэффициентов пропорциональности

В модели часто приходится отражать соотношения между отдельными переменными и их группами. Это необходимо для моделирования экономических, агротехнических, зоотехнических, биологических и других особенностей производства.

Например, в модели требуется учесть, что в племенном стаде на десять кур должен приходиться один петух. Обозначим поголовье самок x_1 , а самцов – x_2 .

Тогда $x_2 = 0,1x_1$, после преобразования

$$x_2 - 0,1x_1 = 0.$$

Этим приемом пользуются при моделировании структуры посевных площадей, стада и рационов кормления животных, баланса кормов, минеральных и органических удобрений.

Задание 2. Формализовать и представить в виде системы неравенств и уравнений заданные условия производства.

Пример.

Требуется составить систему ограничений по использованию 5000 га пашни и 900 га пастбищ. На пашне могут возделываться: озимая пшеница, озимый ячмень, картофель, сахарная свекла. При этом площадь зерновых не должна превышать 50 % пашни, а площадь пропашных культур должна находиться в пределах от 1500 до 2700 га. В случае производственной необходимости 300 га пастбищ может быть трансформировано в пашню. Требуется представить эти производственные условия в формализованном виде.

1. Введем условные обозначения:

x_1 – площадь посева озимой пшеницы, га;

x_2 – площадь посева озимого ячменя, га;

x_3 – площадь посева картофеля, га;

x_4 – площадь посева сахарной свеклы, га;

x_5 – площадь пастбищ, используемых для выпаса, га;

x_6 – площадь пастбищ, трансформируемых в пашню, га.

2. Запишем условия и систему ограничений модели:

– ограничения по площади пашни, га

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5000 + x_6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_6 \leq 5000$$

– ограничения по площади пастбищ, га

$$x_5 + x_6 \leq 900$$

– ограничения по площади посева зерновых, га

$$x_1 + x_2 \leq 2500$$

– ограничения по минимальной площади пропашных, га

$$x_3 + x_4 \geq 1500$$

– ограничения по максимальной площади пропашных, га

$$x_3 + x_4 \leq 2700$$

– ограничения по трансформации пастбищ в пашню, га

$$x_6 \leq 300$$

Упражнения

Вариант 1

Задача 1. Составить условие использования пашни, площадью 6000 га, на ней можно высевать следующие культуры: пшеницу, овес, ячмень, кукурузу. 300 га пашни отводится под чистый пар.

Задача 2. Допустимая по зоотехническим нормам питательность концентрированных кормов может составлять в рационе коровы от 2,9 до 4,5 корм. ед., грубых кормов от 4,3 до 5,7 корм. ед. Составить условия по включению этих групп кормов в рацион, если в хозяйстве имеются комбикорм, ячменная мука, солома, сено многолетних трав.

Задача 3. В хозяйстве имеется 4 тыс. га пашни. На ней высеваются пшеница, ячмень, овес, кормовые корнеплоды, кукуруза на силос, многолетние травы. Зерновые могут занимать от 60 до 70 % площади пашни. Записать ограничения по использованию площади пашни и структуре посевных площадей.

Вариант 2

Задача 1. На одну голову крупного рогатого скота в сутки требуется не менее 6 корм. ед. Имеются следующие корма: сено многолетних трав, силос кукурузный, сенаж, ячмень, овес. Суточное потребление силоса должно быть не более 6 кг. Записать эти условия.

Задача 2. Составить ограничения по площади пашни и трудовым ресурсам, если известно, что площадь пашни – 10 тыс. га, а затраты труда могут составлять от 300 тыс. чел.-

ч. до 400 тыс. чел.-ч. Затраты труда равны: на 1 га посева пшеницы 16 чел.-ч., озимой ржи – 14, ячменя – 13, кукурузы на силос – 28, многолетних трав на сено – 7, на одну голову крупного рогатого скота – 29 чел.-ч.

Задача 3. Из зерновых культур в хозяйстве высеваются пшеница, горох, овес. Пшеница должна составлять не более 70 % от общей площади зерновых. Записать это условие.

Вариант 3

Задача 1. Записать условие, определяющее площадь земельного участка, на котором высеваются зерновые, однолетние травы, кормовые корнеплоды и овощи.

Задача 2. В кормовой рацион могут включаться ячмень, сено многолетних трав, солома, кукурузный силос. Записать условие, что грубые корма могут составлять в рационе не более 40 % общей его питательности.

Задача 3. В хозяйстве высеваются зерновые: пшеница, овес, горох. Овес должен составлять не более 40 % от общей площади зерновых. Записать условие по структуре посевных площадей, используя отраженную переменную для площади зерновых культур.

Вариант 4

Задача 1. Составить условие обеспеченности кормами одной коровы, которой в сутки требуется не менее 10,3 корм. ед. Из кормов имеются сено, солома, силос кукурузный, концентраты.

Задача 2. Площадь естественных пастбищ в хозяйстве составляет 2100 га. В случае необходимости она может быть увеличена на 800 га. Ввести переменные и составить систему ограничений по использованию пастбищ и возможности увеличения их площади.

Задача 3. В хозяйстве возделывают горох, ячмень и овес на фураж. Урожайность с 1 га гороха равна 15 ц, ячменя – 20 ц,

овса – 18 ц. Составить условия, определяющие наличие концентрированных кормов в натуре и кормовых единицах.

Вариант 5

Задача 1. В кормовой рацион могут включаться ячмень, солома, сено многолетних трав, кукурузный силос. Записать условие, что грубые корма в рационе могут составлять не более 40 % общей его питательности.

Задача 2. В задаче 1 записать условие по структуре кормового рациона, введя отраженную переменную по питательности грубых кормов.

Задача 3. Записать требование продажи не менее 75 тыс. ц зерна, в том числе пшеницы не менее 70 тыс. ц. Выход товарного зерна с 1 га посева пшеницы составляет 23 ц, ячменя – 20 ц.

Вариант 6

Задача 1. Хозяйство должно продать не менее 14 тыс. ц молока и 3500 ц мяса. Выход товарного молока на одну корову составляет 2300 кг, выход мяса на голову молодняка крупного рогатого скота – 160 кг. Составить условия по продаже продукции животноводства.

Задача 2. Из зерновых в хозяйстве высеваются пшеница, овес, горох. Пшеница должна составлять не более 70 % от общей площади зерновых. Записать это условие.

Задача 3. В задаче 2 записать условие по структуре посевных площадей, используя отраженную переменную для площади зерновых культур.

Вариант 7

Задача 1. В состав стада крупного рогатого скота входят коровы, нетели, телки и бычки старше одного года, телки и бычки до одного года. Записать, что удельный вес коров в

стаде может колебаться в пределах от 40 до 50 %, а удельный вес нетелей – от 8 до 10 %.

Задача 2. С помощью отраженной переменной, обозначающей общее поголовье, записать условия задачи 1.

Задача 3. Составить условие использования пашни, если известно, что ее площадь 5500 га, на ней можно высевать следующие культуры: пшеницу, овес, ячмень, кукурузу, однолетние травы, часть пашни отводится под чистый пар.

Вариант 8

Задача 1. Площадь пашни в хозяйстве составляет 6 тыс. га, естественных пастбищ – 1500 га, естественных сенокосов – 900 га. Почвенные условия позволяют до 400 га пастбищ трансформировать в пашню и до 300 га – в естественные сенокосы. На пашне выращиваются зерновые культуры и кукуруза на силос. Составить ограничения по использованию земельных угодий и возможности их трансформации.

Задача 2. В хозяйстве имеется 4 тыс. га пашни. На ней высеиваются пшеница, овес, ячмень, кормовые корнеплоды, кукуруза на силос, однолетние травы. Зерновые могут занимать от 60 до 70 % площади пашни. Записать ограничения по использованию площади пашни и структуре посевных площадей.

Задача 3. В задаче 2 с помощью отраженной переменной для площади зерновых культур записать ограничения по структуре посевных площадей и площади пашни.

Вариант 9

Задача 1. В хозяйстве выращиваются пшеница, кукуруза на силос, многолетние травы. Затраты труда на 1 га, соответственно, равны 1,8; 3,2; 1,3 чел.-дн. Для их возделывания имеются трудовые ресурсы в количестве 100 тыс. чел.-дн. В случае недостатка последних можно использовать дополнительно

14 тыс. чел.-дн. привлеченных работников. Составить ограничения по использованию трудовых ресурсов и возможности их пополнения.

Задача 2. Записать условие, определяющее площадь земельного участка, на котором высеваются зерновые, однолетние травы, кормовые корнеплоды и овощи.

Задача 3. В кормовой рацион входят овес, сено многолетних трав, солома, силос кукурузный. Записать условие, что грубые корма в рационе могут составлять не более 35 % общей его питательности.

Вариант 10

Задача 1. Допустимая по зоотехническим нормам питательность концентрированных кормов в рационе коров может составлять от 2,7 до 4,2 корм. ед., грубых кормов – от 4,0 до 5,5 корм. ед. Составить условия по включению этих групп кормов в рацион, если в хозяйстве имеются ячменная мука, сено многолетних трав, солома, комбикорм.

Задача 2. На 1 голову крупного рогатого скота в сутки требуется не менее 6 корм. ед. Имеются следующие корма: сено многолетних трав, сенаж, силос кукурузный, овес, ячмень. Суточное потребление силоса должно быть не более 6 кг, сена – не менее 2 кг. Записать эти условия.

Задача 3. Из овощных культур в хозяйстве высеваются капуста, лук, перец, помидоры, баклажаны. Капуста должна составлять не более 20 % от общей площади овощных культур. Записать это условие.

Вариант 11

Задача 1. В хозяйстве возделываются овес, ячмень и горох на фураж. Урожайность с 1 га овса равна 26 ц, ячменя – 52 ц, гороха – 23 ц с 1 га. Требуется составить условия, определяющие наличие концентрированных кормов в натуре и кормовых единицах.

Задача 2. В хозяйстве будут высевать следующие культуры: пшеницу, ячмень, овес, кукурузу, однолетние травы, овощи, картофель. Составить условие использования пашни, если известно, что ее площадь равна 5800 га.

Задача 3. Составить условие обеспеченности кормами одной коровы, которой в сутки требуется не менее 10,2 корм. ед. Из кормов имеются концентраты, силос кукурузный, сено, солома.

Вариант 12

Задача 1. Записать требование продажи не менее 60 тыс. ц зерна, в том числе пшеницы не менее 50 тыс. ц. Выход товарного зерна с 1 га посева яровой пшеницы составляет 48 ц, ячменя – 52 ц.

Задача 2. Составить ограничения по площади пашни и использованию трудовых ресурсов, если известно, что площадь пашни 12,5 тыс. га, а затраты труда могут составлять от 1 до 1,1 млн. чел.-ч. Затраты труда составляют: на 1 га посева озимой пшеницы – 16 чел.-ч., озимой ржи – 14 чел.-ч., ячменя – 13 чел.-ч., кукурузы на силос – 28 чел.-ч., многолетних трав на сено – 6 чел.-ч., на 1 голову крупного рогатого скота – 28 чел.-ч.

Задача 3. Используя условие задачи 2, составить ограничения по затратам трудовых ресурсов с помощью отраженной переменной.

Вариант 13

Задача 1. Площадь естественных пастбищ в хозяйстве составляет 2500 га. В случае необходимости она может быть увеличена на 500 га. Ввести переменные и составить систему ограничений по использованию пастбищ и возможности увеличения их площади.

Задача 2. В кормовой рацион могут включаться ячмень, кукуруза, сено многолетних трав, сено однолетних трав, солома, однолетние травы на зеленый корм, кукурузный силос. Записать условие, что грубые корма в рационе могут составлять не более 40 % общей его питательности.

Задача 3. В задаче 2 записать условие по питательности рациона, введя отраженную переменную.

Вариант 14

Задача 1. Составьте систему ограничений, отражающую следующие условия. На 3000 га пашни можно возделывать зерновые, технические и кормовые культуры. Требуется под зерновые отвести не менее 60 % посевной площади. Хозяйство планирует выращивать пшеницу, ячмень, кукурузу на крупу, овес, сахарную свеклу, кормовую свеклу, подсолнечник, суданку.

Задача 2. Смоделируйте ограничения по площади пашни и трудовым ресурсам, если известно, что площадь пашни в хозяйстве 7500 га, а запас труда может составить от 165 до 190 тыс. чел.-ч. На 1 га посева пшеницы озимой требуется 22 чел.-ч., кукурузы на силос – 25 чел.-ч., многолетних трав на сено – 12 чел.-ч., сахарную свеклу – 40 чел.-ч., на одну голову крупного рогатого скота – 28 чел.-ч.

Задача 3. Записать условие, определяющее площадь земельного участка, на котором высевают зерновые, кормовые, технические и овощные культуры. Зерновые культуры могут занимать не более половины посевных площадей.

Вариант 15

Задача 1. В состав стада крупного рогатого скота входят коровы, нетели, телки и бычки старше 1 года, телки и бычки до 1 года. Удельный вес коров в стаде может колебаться от 35

до 45 %, а удельный вес нетелей – от 8 до 12 %. Отрадите общее поголовье скота с помощью вспомогательной переменной и запишите условия производства.

Задача 2. Составьте ограничения по использованию пашни, если планируется высевать пшеницу, ячмень, овес, рожь, горох, кукурузу, сахарную свеклу. Часть пашни будет отведена под чистые пары. Общая площадь пашни в хозяйстве – 9300 га.

Задача 3. Записать условие обеспечения кормами дойной коровы, которой в сутки требуется не менее 14,7 корм. ед. В хозяйстве имеются следующие корма: сено люцерны, сено суданки, сенаж, солома, силос кукурузный, комбикорм.

Контрольные вопросы

1. Что такое модель?
2. Что отражается в модели?
3. Что понимается под объектом моделирования?
4. Что такое моделирование?
5. В каких случаях целесообразно использовать модель и моделирование?
6. В чем состоит основное достоинство моделирования?
7. По каким признакам можно судить о качестве модели?
8. В чем заключается основная особенность имитационного моделирования?
9. Для чего используются модели?
10. Как классифицируются модели?
11. Какие этапы проходит процесс создания модели?
12. Какие виды моделирования различают?
13. Дайте определения математической модели и математического моделирования.
14. Что такое экономико-математическое моделирование?

15. Какие методы экономико-математического моделирования вы знаете?
16. На какие классы разбивается совокупность математических моделей?
17. Какие модели характеризуют математическое моделирование?
18. Дайте определение имитационного моделирования, его целесообразность и эффективность.
19. Что такое имитационная модель?
20. Перечислите этапы итерационного процесса имитационного моделирования.
21. В чем заключается цель имитационного моделирования?
22. Дайте определение понятием валидации и верификация в математическом моделировании
23. Что такое внешняя адекватность математической модели?
24. Каковы основные функции и этапы математического моделирования?
25. Какова структура модели математического программирования?
26. На каких условиях основано математическое моделирование