1 Предмет теории вероятностей.

В процессе всей своей жизни человек часто сталкивается с событиями и явлениями, исход которых заранее не определен. Например, студент не знает, какие именно вопросы задаст экзаменатор, служащий – сколько времени у него займет дорога на работу завтра (через неделю), инвестор – окупятся ли его инвестиции, страховщик – причину и размер выплаты страхового вознаграждения и т. д. Тем не менее, в подобных ситуациях, связанных с неопределенностью, человеку необходимо принимать решение.

Теория вероятностей - это математическая дисциплина, изучающая закономерности, происходящие в массовых однородных случайных явлениях и процессах.

С возникновением теории вероятностей наука получила мощный аппарат исследования случайных явлений и процессов, до этого исследовались лишь детерминированные явления и опыты, в которых первоначальные условия однозначно позволяли определить исход. Между тем, случайные явления присутствуют во многих областях науки (биологии, генетике, агрономии, экономике, демографии, технике и т.д.), когда заранее невозможно предсказать результат опыта.

Исторически зарождение и развитие теории вероятностей связано с азартными играми, в которых требовалось обосновать то или иное решение.

Вероятность события – это число, всегда связанное с каким-либо пространством элементарных событий, природа которого не имеет значения. Понятие вероятности обычно строится на интуитивных соображениях (например, вероятность появления герба при подбрасывании симметричной монеты очевидно равна 1/2) и связано с понятием статистической устойчивости относительной частоты события при большом числе опытов. При подбрасывании монеты достаточно большое число раз относительная частота появлений герба будет колебаться около 0,5, следовательно, можно говорить, что вероятность появления герба равна 0,5. Наличие устойчивости относительной частоты появления события позволяет судить о вероятности, как об объективной характеристике события в данном опыте, имеющей вполне определенное значение, независимо от того, будут проводиться опыты или нет.

Целью современной теории вероятностей является выявление общих закономерностей и зависимостей, а также описание физических явлений с помощью абстрактных моделей.

Математическая статистика - это раздел математики, в котором изучаются математические методы систематизации, обработки, анализа и представления статистических данных для научных и практических выводов.

Математическая статистика использует математический аппарат и выводы теории вероятностей. Связующим звеном между теорией вероятностей и математической статистикой является закон больших чисел и так называемые предельные теоремы

2 Алгебра событий.

Одним из основных понятий теории вероятностей является опыт. Под опытом понимается выполнение комплекса условий, в результате которого происходят или не происходят определенные события (факты). Событие — это возможный результат опыта или испытания.

Простейшие неразложимые результаты опыта называются элементарными событиями (ωi), а вся совокупность элементарных событий называется пространством элементарных событий $\Omega=\{\omega i\}$. С каждым опытом связано свое пространство элементарных событий Ω.

Любое конечное или счетное подмножество Ω называется событием. Различают три типа событий:

достоверные (Ω),

случайные,

невозможные (Ø).

События обычно обозначают первыми прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …. Событие называется достоверным, если в результате опыта оно обязательно произойдет. Событие называется невозможным, если оно не может произойти в данном опыте. Случайным называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти.

События A и B несовместны, если в результате одного опыта они не могут происходить одновременно, в противном случае - совместны. Например, при одном подбрасывании монеты не могут одновременно появиться герб и решетка.

Элементы последовательности событий A1, A2, …, An попарно несовместны, если любые два из них несовместны. Например, при подбрасывании игральной кости никакие два элементарных исхода (появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6) не могут произойти одновременно. Несколько событий равновозможные, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Несколько событий называются единственно возможными, если в результате испытания произойдет хотя бы одно из них.

Исходя из лекции И.П. Михайлова:

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Под опытом понимается некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которой наблюдается то или иное явление. Опыт может представлять как одно испытание, так и серию испытаний.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Примеры случайных явлений: взвешивание тела на аналитических весах, подбрасывание монеты или игрального кубика.

В данных примерах условия опыта неизменны, но результаты опыта варьируются. Эти вариации связаны с воздействием второстепенных факторов, влияющих на исход опыта, но не оговоренных в числе основных условий. На практике существует большой класс задач, в которых интересующий исход опыта зависит от столь большого числа факторов, что учесть их в полном объеме невозможно.

При наблюдении совокупности однородных случайных явлений часто обнаруживается закономерность, получившая название устойчивости частот (бросание монеты при многократном повторении дает число выпадения герба, равное 1/2, бросание игрального кубика дает число выпадений грани с цифрой 6, равное 1/6; процент брака в отлаженном технологическом процессе). Проявление такого рода закономерности при массовом воспроизведении опыта позволяет сделать вывод о том, что отдельные индивидуальности случайных явлений тонут в суммарном результате опытов.

Таким образом, базой для применения вероятностных (статистических) методов является свойство устойчивости частот в массовых случайных явлениях. Методы теории вероятностей не позволяют предсказать исход отдельного опыта, но дают возможность предсказать суммарный результат (в среднем) большого числа опытов. К примеру, случайным является движение молекул газа в сосуде, и не представляется возможным предсказать траекторию движения и скорость отдельной молекулы, однако давление газа на стенки сосуда (при большом числе молекул) является неслучайной величиной.

Зарождение теории вероятностей связано с исследованиями Паскаля (1623–1662), Ферма (1601–1665), Гюйгенса (1629–1695) в области теории азартных игр, когда было сформулировано понятие вероятности, математического ожидания. Классическое определение вероятности события было введено Якобом Бернулли (1654–1705), им же был сформулирован закон больших чисел. В дальнейшем основы теории вероятностей закладывались работами таких математиков, как Муавр (1667–1754), Лаплас(1749–1827), Гаусс (1777–1855), Пуассон (1781–1840). Большой вклад в развитие теории вероятностей внесла русская школа математики в лице П. Л. Чебышева (1821–1894), А. А. Маркова (1856–1922), А. М. Ляпунова (1857–1918), А. Н. Колмогорова(1903–1987).

Случайное событие

Случайное событие – всякий факт, который в результате опыта со случайным исходом может произойти или не произойти.

Примеры: A – появление герба при подбрасывании монеты; B – появление четной цифры при подбрасывании игрального кубика; C – попадание в мишень при выстреле.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в невыполнении события A.

У каждого из событий – разная возможность его появления. В качестве численной меры степени объективной возможности события используется понятие вероятности события. Понятие вероятности события связано с понятием частоты события.

Достоверным называется событие, которое в результате опыта обязательно должно произойти, невозможным называется событие, которое в результате опыта произойти не может. Для достоверного события полагается вероятность, равная 1, для невозможного события – 0. Исходя из этого, диапазон изменения вероятности будет составлять 0 – 1.

Практически невозможным называется событие, вероятность которого не в точности равна 0, но весьма близка к 0. Например: из разрезной азбуки, состоящей из 32 букв, вынимается с возвращением 15 букв. Какова вероятность того, что последовательность этих букв составит фразу "Как молоды мы были"? Данная вероятность составит $(1/32)^{15}$. Событие практически невозможное.

Практически достоверным называется событие, вероятность которого не в точности равна 1, но весьма близка к 1. Такое событие является противоположным практически невозможному. С данными понятиями связывается принцип практической уверенности, который формулируется следующим образом: если вероятность некоторого события A в данном опыте весьма мала, то можно быть практически уверенным, что при однократном проведении опыта событие A не произойдет. Выбор вероятности, которая бы считалась достаточной при определении возможности того или иного прогноза, производится каждый раз из практических соображений с учетом стоимости потерь, вызванных ошибочным прогнозом.

Опыт с конечным числом исходов. Классическое определение вероятности

В ряде опытов, таких, как подбрасывание монеты, подбрасывание игрального кубика, карточные игры, рулетка, извлечение наудачу определенного числа шаров из урны, возможные исходы обладают определенной симметрией к условиям опыта и одинаково возможны (опыты с конечным числом равновероятных исходов). В частности, при подбрасывании "правильного" кубика ни один из элементарных исходов (появление любой цифры: 1,2,3,4,5,6) нельзя считать более предпочтительным, чем другой.

Для таких опытов представляется возможным непосредственно подсчитать вероятность события. Именно при анализе таких опытов и было сформулировано в XVII в. классическое определение вероятности.

Прежде чем сформулировать классическое определение вероятности, введем ряд определений.

Несколько событий в данном опыте образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них, например герб, цифра (решка) при бросании монеты; попадание, промах при стрельбе; появление 1,2,3,4,5,6 при бросании игральной кости.

Несколько событий называются несовместными в данном опыте, если исключено их совместное появление (герб и решка при бросании монеты).

Равновозможными событиями называют события, если по условиям симметрии опыта можно считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое (герб или решка при бросании монеты).

Если группа событий обладает всеми тремя свойствами: полноты, равновозможности и несовместности, то такие события называют случаями. Случай называют благоприятным некоторому событию A, если появление этого случая влечет за собой появление данного события. Например, при бросании игральной кости есть три случая, благоприятных событию A, которое состоит в появлении четного числа очков, а именно появлении 2, 4 или 6.

Соответственно опыт, при котором имеет место симметрия равновозможных и исключающих друг друга исходов, получил название схемы случаев (или схемы урн). Непосредственный подсчет вероятностей в схеме случаев основан на оценке доли благоприятных случаев в их общем числе:

$$P(A) = \frac{m_A}{n}, \qquad (1.1)$$

где m_A – число благоприятных случаев событию A, n – общее число случаев.

Так как число благоприятных случаев может изменяться от 0 до n, то вероятность события будет изменяться в пределах 0 – 1. Формула (1.1) называется классической формулой, она используется для непосредственного подсчета вероятностей, когда опыт сводится к схеме случаев.

Непосредственный подсчет вероятностей. Схема выбора с возвращением и без возвращения элементов

При определении вероятности события по классической формуле (1.1) для определения общего числа случаев и числа благоприятных случаев часто привлекаются элементы комбинаторики. При этом в каждом опыте важным является способ выбора элементов.

Существуют две схемы выбора: схема выбора без возвращения элементов и схема выбора с возвращением элементов. В первом случае извлеченные m элементов (без разницы, по одному или вместе) не возвращаются в исходную совокупность. Во втором случае на каждом шаге элементы извлекаются по одному, фиксируется выбранный элемент, затем он возвращается, и вся исходная совокупность тщательно перемешивается. Таким образом, во втором случае один и тот же элемент может извлекаться неоднократно.

После осуществления выбора элементы могут быть упорядочены или нет. Итак, в классической схеме существует четыре типа опытов. Рассмотрим, каким образом рассчитываются общее число случаев и число благоприятных случаев в каждой схеме.

• Схема выбора без возвращения и без упорядочивания порядка следования элементов (схема выбора, приводящая к сочетаниям). Опыт состоит в выборе из исходной совокупности объемом n элементов m элементов без возвращения и без упорядочивания порядка следования элементов. В этом опыте различными исходами будут совокупности m элементов, отличающиеся друг от друга составом элементов. Количество таких совокупностей (а следовательно, и исходов опыта) определяется числом сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.2}$$

Свойства числа сочетаний:

1) $C_n^0 = 1$;

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойство симметрии);

3) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (рекуррентное соотношение);

4) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

• Схема выбора без возвращения, но с упорядочиванием порядка следования элементов (схема выбора, приводящая к размещениям). Опыт состоит в выборе из исходной совокупности объемом n элементов m элементов без возвращения, но с упорядочиванием порядка следования элементов. В этом опыте различными исходами будут совокупности m элементов, отличающиеся друг от друга как составом элементов, так и порядком их следования. Количество таких совокупностей (а следовательно, и исходов опыта) определяется числом размещений из n элементов по m:

$$A_n^m = C_n^m m! = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

При $n = m$ размещения представляют из себя перестановки из n элементов: $P_n = n!$.

• Схема выбора с возвращением и без упорядочивания порядка следования элементов (схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями). Опыт состоит в выборе из исходной совокупности объемом n элементов m элементов с возвращением и без упорядочивания порядка следования элементов. В этом опыте различными исходами будут совокупности m элементов, отличающиеся друг от друга составом элементов. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Количество таких совокупностей (а следовательно, и исходов опыта) определяется числом сочетаний с повторениями из n элементов по m: C_{n+m-1}^{m}.

• Схема выбора с возвращением и с упорядочиванием порядка следования элементов (схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями). Опыт состоит в выборе из исходной совокупности объемом n элементов m элементов с возвращением и с упорядочиванием порядка следования элементов. В этом опыте различными исходами будут совокупности m элементов, отличающиеся друг от друга, как составом элементов, так и порядком следования элементов. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Количество таких совокупностей (а следовательно, и исходов опыта) определяется числом размещений с повторениями из n элементов по m: n^m.

Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности дал еще Лаплас, но тогда ее приложение не выходило за сферу азартных игр.

Пьер-Симóн Лаплáс (1749 1827) — французский математик; один из создателей теории вероятностей.

Классическое определение вероятности несовершенно и имеет много недостатков.

- применимо лишь в тех случаях, когда число элементарных событий конечно, но на практике не всегда имеет место;
- предполагается, что все элементарные события равновероятны (не всегда можно определить равновероятность наступления отдельных элементарных событий).

➢ **Определение** (*классическое по Лапласу определение*) *Вероятность случайного события* A - число элементарных событий, благоприятствующих появлению события A, деленному на все число элементов в наборе элементарных событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad 0<P(A)<1$$

Пример

Какова вероятность выпадения четного числа очков при бросании кости

Решение

$$n=6,\ m=3,\ P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$