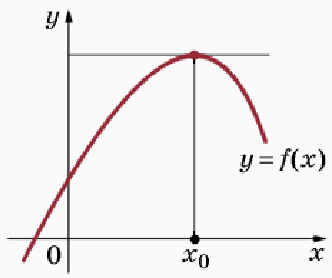
Лекция. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Производная применяется не только для исследования функций, но и для решения прикладных задач. Можно грубо определить два этапа:

1. Составляется математическая модель задачи (функциональная зависимость).
2. С помощью производной находят ответ на вопрос задачи (например, находят наибольшее (или наименьшее) значение).

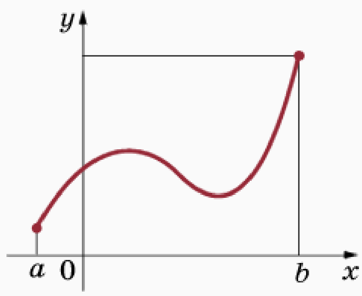
1. Задачи на максимум — минимум. Так традиционно называют задачи, в которых нужно найти наибольшее или наименьшее значение какой-нибудь величины. Математическая модель этой задачи обычно выглядит так: строится функция $y = f(x)$, у которой нужно найти наибольшее или наименьшее значение на фиксированном промежутке $[a; b]$. Для решения задачи находят точки, «подозрительные» на экстремум: это точки, в которых производная обращается в нуль; точки, в которых производная не существует (нарушается гладкость функции) и концы промежутка. Затем вычисляются значения функции в этих точках и сравниваются между собой.

Наибольшее значение функции в точке x_0



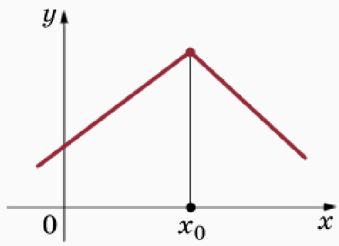
$f(x_0)$ — max
$f'(x_0) = 0$

Наибольшее значение функции на конце промежутка



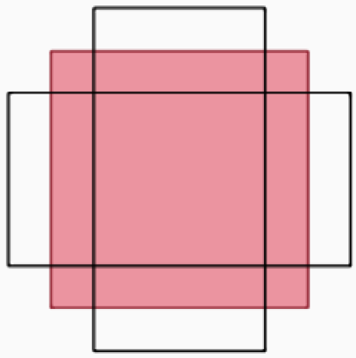
$f(b)$ — наибольшее

В точке x_0 производная не существует



Задача 1. Среди прямоугольников данного периметра найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Надеемся, что вам уже известен ответ в этой древнейшей задаче — таким прямоугольником будет квадрат. Напомним ее аналитическое решение. Пусть периметр прямоугольника равен $2p$. Обозначим через x длину одной из сторон прямоугольника, тогда вторая сторона равна $p - x$. Площадь S выразится функцией $S = x(p - x)$, заданной на промежутке $[0; p]$. $S'(x) = p - 2x$. $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2}$. Эта точка лежит внутри заданного промежутка; $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$. Так как $S(0) = S(p) = 0$, то в точке $x = \frac{p}{2}$ площадь принимает наибольшее значение. Если $x = \frac{p}{2}$, то $y = \frac{p}{2}$ и найденный прямоугольник является квадратом.



$$S = x(p - x)$$
$$S'(x) = p - 2x$$
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2}.$$

Наибольшую площадь среди прямоугольников данного периметра имеет квадрат.

Задача 2. В данный шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус основания и высоту вписанного цилиндра. Как видно из рисунка, выполняется соотношение $\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$.

Вычислим объем цилиндра: $V = \pi r^2 h = V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$.

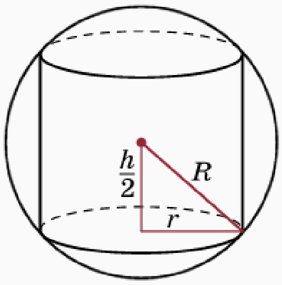
Заметим, что h меняется в пределах от 0 до $2R$, причем на концах отрезка цилиндр вырождается, объем его равен нулю.

Находим критические точки (точки, в которых производная обращается в нуль), считая h переменной: $V' = 0$, $\pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0, h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

При этом значении h объем будет максимальным: $V_{\max} = \pi r^2 h = \pi R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$.

Замечания. 1. Если считать переменной не h, а r, то получим: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ и $V = 2\pi r^2 = \sqrt{R^2 - r^2}$. Находить производную V (как функцию от r) в этом случае стало бы труднее, но можно воспользоваться очевидным соображением: функции V и V^2 принимают наибольшее значение одновременно. Тогда можно рассмотреть новую функцию $W = V^2 = 4\pi^2 r^4 = (R^2 - r^2)$ и без труда найти ее критические точки.

2. Функции V, kV $(k > 0)$, $V + c$, V^2 $(V \geqslant 0)$ принимают наибольшее значение одновременно. Это позволяет при нахождении производных убирать постоянные множители, слагаемые и радикалы.



$$0 < h < 2R$$

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Цилиндр, вписанный в шар, имеет максимальный объем

$$V_{\max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3.$$

Задача 3. Над центром круглого стола радиуса r висит лампа. На какой высоте h следует подвесить эту лампу, чтобы на краях стола получить наибольшую освещенность?

Из физики известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света и пропорциональна синусу угла наклона луча света к освещаемой маленькой площадке:

$$E = k\frac{\sin\varphi}{h^2 + r^2},$$

где E — освещенность на краю стола, $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$; h — расстояние от лампы до стола.

Вместо функции $E = k\frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$ рассмотрим функцию $T = \frac{1}{k^2}E^2 = \frac{h^2}{(h^2 + r^2)^3}$. При этом вместо h можно взять переменную $z = h^2$ и найти критические точки T как функции от z:

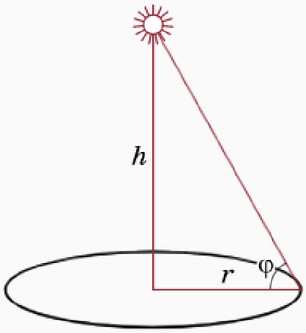
$$T = \frac{z}{(z + r^2)^3},$$

$$T' = \frac{(z + r^2)^3 - z \cdot 3(z + r^2)^2}{(z + r^2)^6} = \frac{z + r^2 - 3z}{(z + r^2)^4};$$

$$T' = 0,\ r^2 - 2z = 0,\ z = \frac{r^2}{2},$$

$$\text{т. е. } h^2 = \frac{r^2}{2} \text{ и } h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Итак, освещенность максимальна, если $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, т. е. если $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Максимальная освещенность достигается при следующих параметрах:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$\varphi \approx 32°.$$

2. Нахождение скорости протекания процесса. Так как производная есть скорость роста функции, то всюду, где мы сталкиваемся с какой-либо переменной величиной, полезно рассматривать и ее производную — скорость ее изменения.

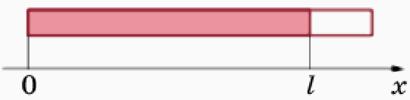
Задача 4. Работа (как функция времени). Если $A = A(t)$, то средняя скорость изменения работы $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ — есть средняя мощность, а производная работы по времени — мгновенная мощность.

$$A = A(t)$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = N,$$

где N — средняя мощность.

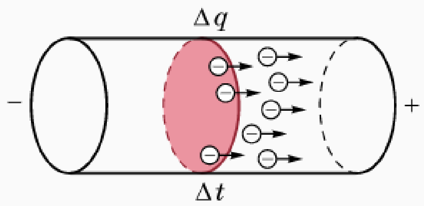
Задача 5. Масса тонкого стержня. Пусть имеется неоднородный тонкий стержень. Если ввести координаты так, как показано на рисунке, то можно рассмотреть функцию $m = m(l)$ — массу части стержня от точки 0 до точки l. «Средняя скорость» изменения массы на отрезке $[l_1, l_2]$ равна $\frac{m(l_2) - m(l_1)}{l_2 - l_1}$. Ее называют в физике средней линейной плотностью. Линейная плотность есть производная функции m, т. е. производная массы тонкого стержня по длине.



$$\frac{\Delta m}{\Delta l} = \rho,$$

где ρ — средняя линейная плотность.

Задача 6. Заряд. Пусть $q = q(t)$ — заряд, переносимый электрическим током через поперечное сечение проводника за время t. Средняя скорость переноса заряда есть $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ и называется средней силой тока. Если ток постоянный, то $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ — постоянная величина (и заряд q линейно зависит от времени). В общем случае производная от заряда по времени есть сила тока: $I(t) = q'(t)$.



$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I,$$

где I — средняя сила тока.

Задача 7. Работа. Приращение работы ΔA на малом участке перемещения Δx можно представить как произведение силы F, которая хотя и зависит от x, но ее можно считать постоянной на малом отрезке, на перемещение Δx: $\Delta A = F\,\Delta x$.

Следовательно, среднее значение силы есть $\frac{\Delta A}{\Delta x}$, а сама сила — производная работы по перемещению.

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = F,$$

где F — средняя сила.

Задача 9. Производительность труда. Важнейшей экономической характеристикой производства является рост производительности труда. Темпы роста производительности труда — это производная производительности труда по времени.

Предлагаю посмотреть видео урок по данной ссылке. https://www.youtube.com/watch?v=Erzf5ktLkMw

Глава 9 «Начала математического анализа», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.
В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://23.edu-reg.ru/
3. https://www.berdov.com/