

Лекция 9 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Вопросы:

1. Взаимное пересечение кривых поверхностей
2. Особые случаи пересечения поверхностей
3. Пересечение кривой поверхности с поверхностью многогранника
4. Пересечение многогранников

1 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.1 Общие положения

Кривые поверхности пересекаются в общем случае по пространственной кривой линии, проекции которой строятся обычно по точкам. Для нахождения этих точек заданные поверхности пересекают третьей вспомогательной секущей поверхностью, определяют линии пересечения вспомогательной поверхности с каждой из заданных, затем находят общие точки построенных линий пересечения. Повторяя такие построения многократно, получают необходимое количество точек для определения линии пересечения.

Общий алгоритм построения линии пересечения поверхностей:

- 1) *Выбирают вид вспомогательных поверхностей.* При выборе вспомогательной секущей поверхности следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные поверхности по наиболее простым для построения линиям - прямым или окружностям. *В качестве вспомогательных поверхностей - посредников наиболее часто используют плоскости и сферы.*
- 2) *Строят линии пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями.*
- 3) *Находят точки пересечения полученных линий и соединяют их между собой.*
- 4) *Определяют видимость линии пересечения относительно рассматриваемых поверхностей и плоскостей проекций.*

Построения начинают с определения *характерных (опорных) точек* (точки, расположенные на очерковых образующих поверхностей, которые обычно делят линию пересечения на видимую и невидимую части (границы видимости), высшая и низшая точки линии пересечения, крайние точки (правая и левая).

При построениях применяют способы преобразования чертежа, если это упрощает и утоняет построения.

1.2 Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей

Задача. Построить линию пересечения конуса и цилиндра вращения (рис. 186).

В первую очередь определяем *характерные точки* линии пересечения:

- *Проекции высшей и низшей точек* A_2 и E_2 определены при помощи вспомогательной фронтальной плоскости Q , которая пересекает поверхность цилиндра и конуса по крайним образующим. Горизонтальные проекции точек находятся на горизонтальном следе $Q\pi_2$ вспомогательной плоскости.

- *Точки* C и C' найдены при помощи горизонтальной плоскости S , проведенной через ось цилиндра. Плоскость S пересекает поверхность цилиндра по крайним образующим (передней и задней), а поверхность конуса — по окружности. Пересечения горизонтальных проекций крайних образующих и окружности дают точки C_1 и C_1' — горизонтальные проекции точек C и C' . Фронтальные проекции этих точек лежат на фронтальном следе плоскости S .

Промежуточные точки линии пересечения найдены при помощи горизонтальных плоскостей P и R .

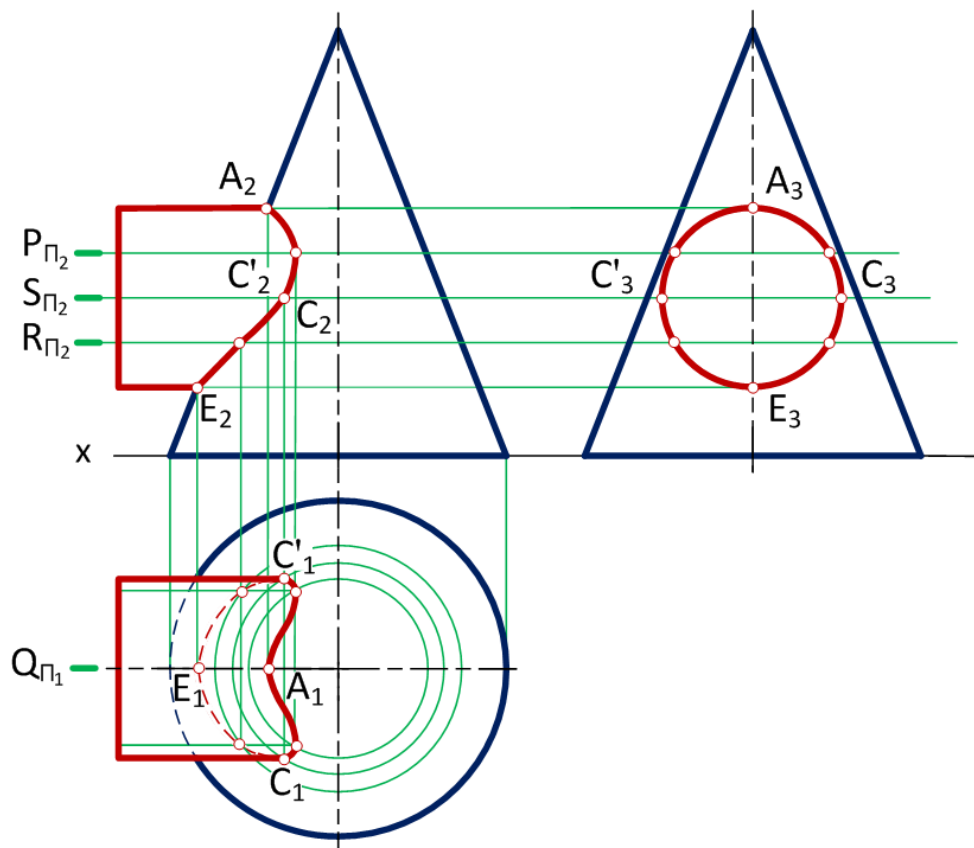


Рисунок 186

В рассмотренном примере точки линии пересечения найдены при помощи вспомогательных плоскостей частного положения. Иногда же введение плоскостей частного положения не дает желаемого эффекта и целесообразнее воспользоваться плоскостями общего положения.

1.3 Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих сфер с постоянным центром

Известно, что *если ось поверхности вращения проходит через центр сферы и сфера пересекает эту поверхность, то линия пересечения сферы и поверхности вращения - окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения. При этом если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии.*

На рис. 187 показана фронтальная проекция пересечения сферы радиуса R и поверхностей вращения - конуса, тора, цилиндра, сферы, оси которых проходят через центр сферы радиуса R и параллельны плоскости π_2 . Окружности, по которым пересекаются указанные поверхности вращения с поверхностью сферы, проецируются на плоскость в виде отрезков прямых. Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер.

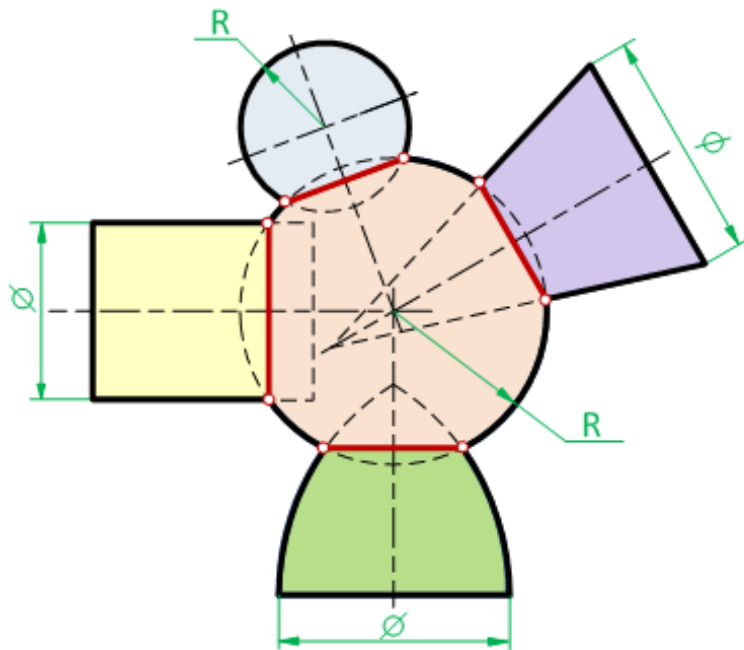


Рисунок 187

Способ секущих сфер с постоянным центром применяют при следующих условиях:

- 1) обе поверхности являются поверхностями вращения;
- 2) обе поверхности вращения пересекаются; точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;
- 3) плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна плоскости проекций. В том случае, если это условие не соблюдается, прибегают к способам преобразования чертежа.

Пример. Построить линию пересечения конуса вращения и цилиндра вращения (рис. 188).

Оси заданных поверхностей вращения пересекаются (точка O) и параллельны плоскости проекций π_2 , следовательно, необходимые для применения способа сфер условия имеются.

Определяем фронтальные проекции опорных точки 1_2 и 2_2 как точки пересечения фронтальных проекций очерков цилиндра и конуса. Горизонтальные проекции этих точек определяем при помощи линий проекционной связи.

Далее из центра пересечения цилиндра и конуса проводим ряд concentric окружностей, являющихся фронтальными проекциями вспомогательных сфер.

Радиус сферы максимального радиуса (R_{max}) равен расстоянию от фронтальной проекции центра сфер O_2 до наиболее удаленной точки проекции точки пересечения очерков (точка 1_2).

Сфера минимального радиуса (R_{min}) - это сфера, которая может быть вписана в одно геометрическое тело и пересекающая другое.

Сфера минимального радиуса только касается поверхности конуса и, следовательно, пересекает ее по окружности, фронтальная проекция которой — прямая A_2B_2 . Поверхность цилиндра

сфера R_{min} пересекает также по окружности, фронтальная проекция которой — прямая C_2D_2 . Пересечение этих прямых — точка 4_2 есть фронтальная проекция одной из точек искомой линии пересечения.

Аналогичным образом при помощи сферы промежуточного радиуса R_i построена фронтальная проекция 3_2 еще одной точки, принадлежащей линии пересечения. Горизонтальные проекции найденных точек могут быть построены как проекции точек, лежащих на поверхности конуса.

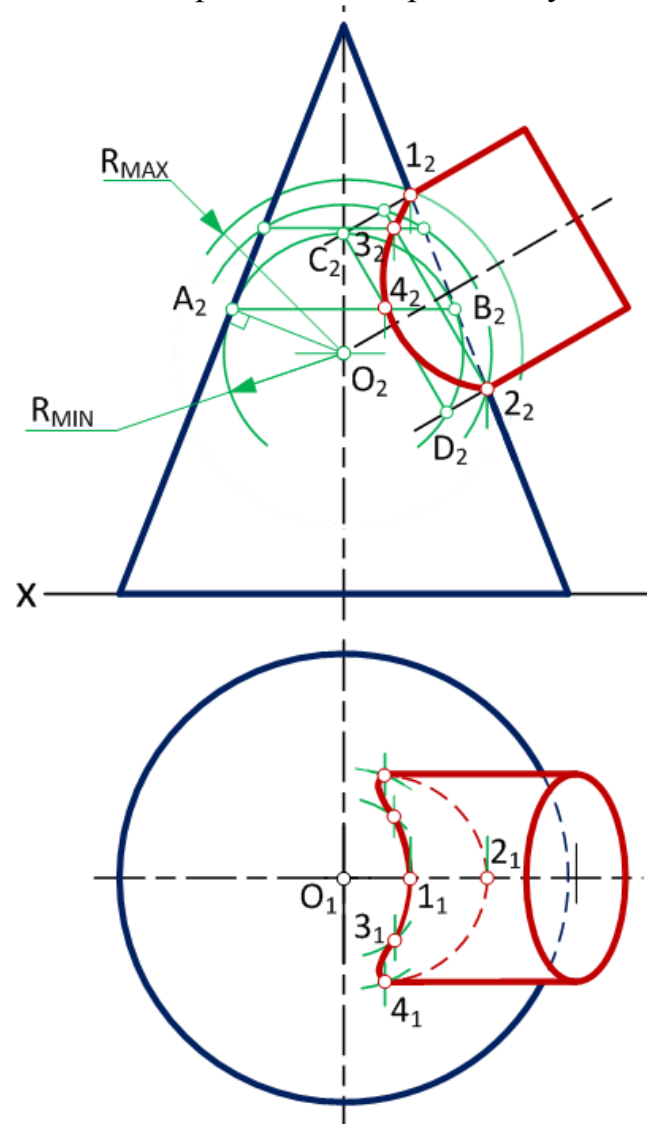


Рисунок 188

2 ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1 Соосные поверхности вращения

Соосные поверхности вращения пересекаются по окружности, так линиями пересечения конуса и цилиндра (рис. 189) являются две окружности, которые проецируются на горизонтальную плоскость в натуральную величину, а на плоскость π_2 - в отрезки прямых.

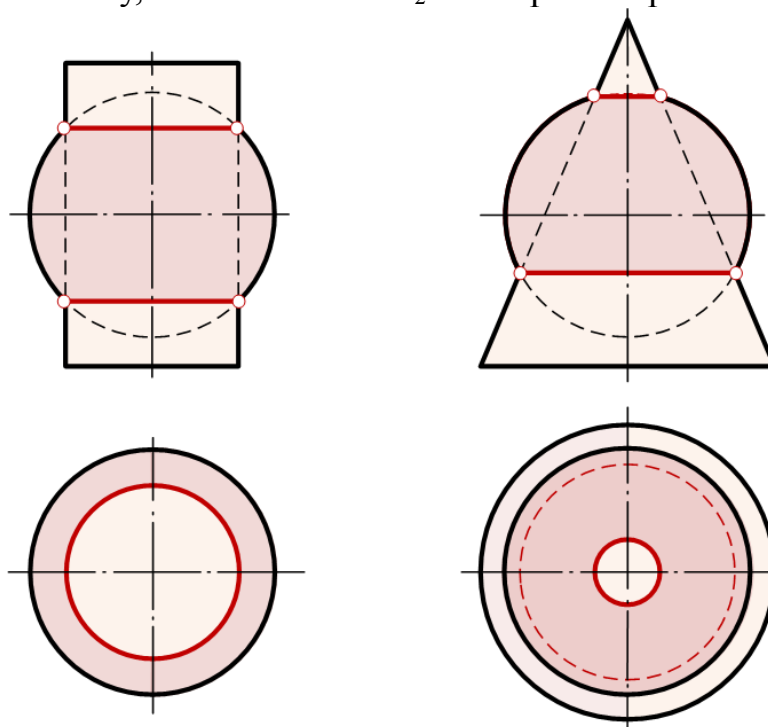


Рисунок 189

2 Пересечение поверхностей, описанных вокруг одной сферы

Как отмечалось ранее, линия пересечения двух кривых поверхностей в общем случае представляет собой пространственную кривую. Однако в некоторых частных случаях эта линия может распадаться на плоские кривые.

Теорема Монжа: *две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум кривым второго порядка* (рис. 190). Использование этой теоремы упрощает построение проекции линии пересечения таких поверхностей на плоскость, параллельную их осям – на эту плоскость они проецируются прямыми линиями. Например, два цилиндра (рис.190), оси которых пересекаются в точке O , описанные вокруг одной сферы, пересекаются по двум эллипсам, фронтальными проекциями которых являются отрезки прямых.

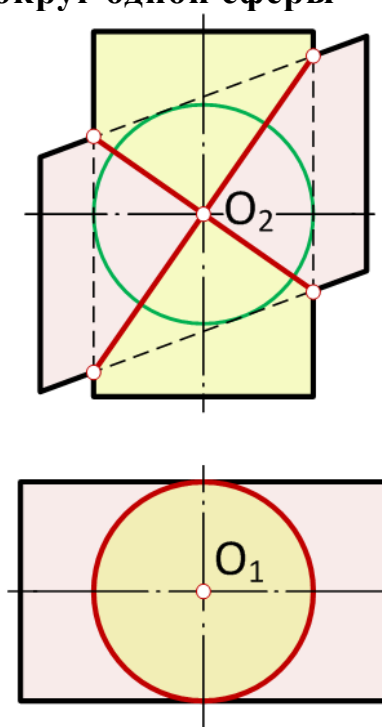


Рисунок 187

3 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА

Каждая грань многогранника в общем случае пересекает кривую поверхность по плоской кривой. Эти кривые пересекаются между собой в точках встречи ребер многогранника с поверхностью. Таким образом, задача на построение линии пересечения кривой поверхности с многогранником сводится к нахождению линии пересечения поверхности плоскостью и точек встречи прямой с поверхностью.

Пример. Построение линии пересечения поверхностей полусферы и призмы (рис.188).

Линию пересечения поверхностей полусферы и призмы выполняем методом вспомогательных секущих плоскостей.

Каждая грань призмы пересекает поверхность полусферы по полуокружностям, которые пересекаются между собой в точках встречи ребер призмы с поверхностью полусферы.

В приведенном примере одна из граней призмы расположена параллельно фронтальной плоскости проекций, поэтому окружность, по которой эта грань пересекает поверхность полусферы, спроецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения. Фронтальные проекции остальных двух дуг полуокружностей, очевидно, будут представлять собой дуги полуэллипсов. Построение их на эюре следует начинать с нахождения опорных точек. Для этого через каждое ребро призмы проведены фронтальные плоскости (P и Q), которые пересекают поверхность полусферы по окружностям.

Точки пересечения фронтальных проекций ребер с соответствующими полуокружностями являются фронтальными проекциями точек встречи ребер призмы с полусферой (точек $1, 2, 3$).

Точки 4 и 5 , разделяющие кривые на видимую и невидимую части, получены при помощи фронтальной плоскости S , проведенной через центр полусферы.

Промежуточные точки найдены аналогичным построением (при помощи фронтальных плоскостей R и T).

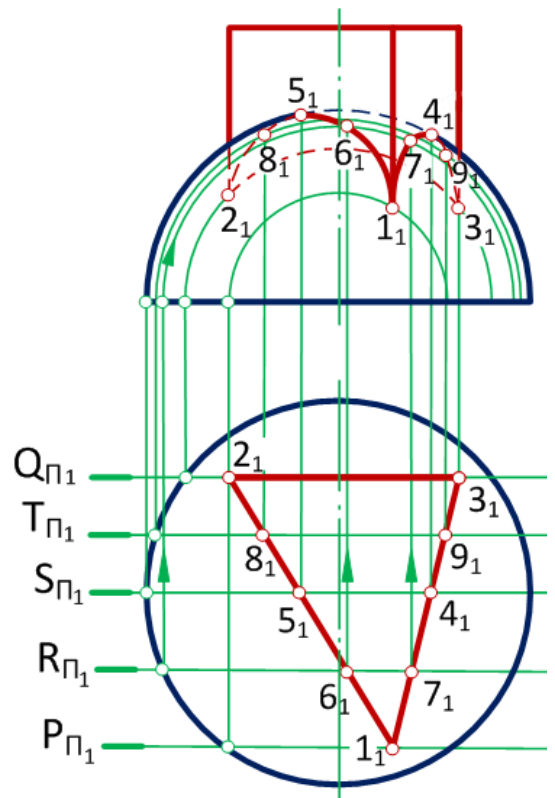


Рисунок 188

4 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Линия пересечения поверхностей двух многогранников представляет собой замкнутую пространственную ломаную линию (или две замкнутые ломаные линии), которая проходит через точки пересечения ребер одного из многогранников с гранями другого и ребер другого с гранями первого.

Построение линии пересечения многогранников можно производить двумя способами, комбинируя или выбирая из них тот, который в зависимости от условий дает более простые построения:

1 способ. Определяют точки, в которых ребра одного из многогранников пересекают грани другого и ребра второго пересекают грани первого. Через полученные точки в определенной последовательности проводят ломаную линию, представляющую собой линию пересечения заданных поверхностей. При этом можно соединять прямыми проекции только тех точек, которые лежат на одной и той же грани.

2 способ. Определяют отрезки прямых, по которым грани одного из многогранников пересекают грани другого; эти отрезки являются звеньями получаемой при пересечении многогранников ломаной линии.

Пример. Построение линии пересечения поверхностей призмы и пирамиды (рис.189)

Как видно из рис.189, с поверхностью пирамиды пересекается только одно переднее ребро призмы. Так как это ребро перпендикулярно плоскости π_1 , то горизонтальные проекции точек входа и выхода (точки 1 и 2) отмечаются непосредственно на эюре.

Для нахождения их фронтальных проекций через вершину пирамиды и переднее ребро призмы проведена вспомогательная горизонтально — проецирующая плоскость Q . Она пересекла поверхность пирамиды по прямым SD и

SE , в пересечении фронтальных проекций которых с фронтальной проекцией переднего ребра призмы отмечены фронтальные проекции $1_2, 2_2$ точек входа и выхода 1 и 2. Так как грани призмы — горизонтально

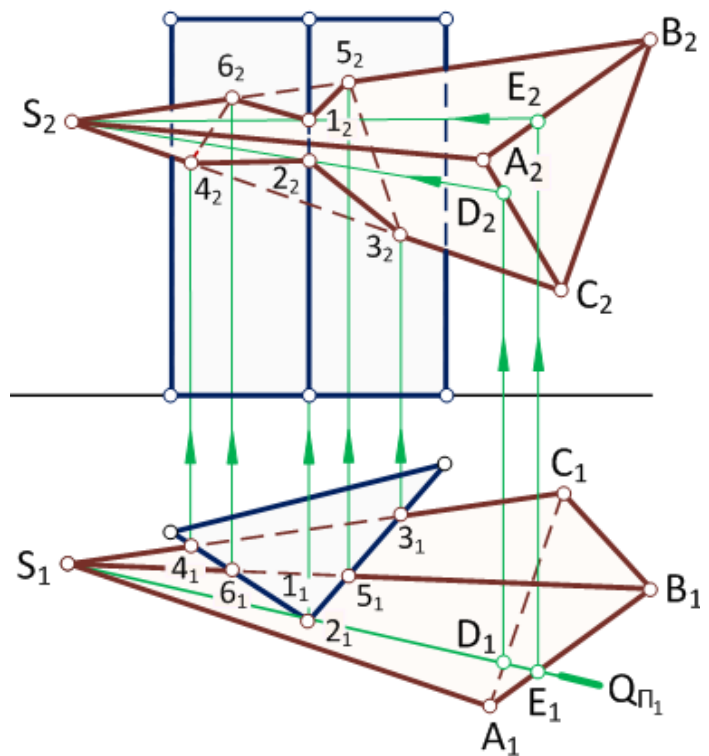


Рисунок 189

- проектирующие плоскости, то построение точек встречи ребер пирамиды с гранями призмы (точек 3, 4, 5, 6) никаких затруднений не представляет и понятно из чертежа. Соединив последовательно между собой фронтальные проекции найденных точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения. Горизонтальная проекция ее совпадает с горизонтальной проекцией призмы.

При **определении видимости точек**, принадлежащих линии пересечения, руководствуются следующим правилом: проекция точки, полученная при пересечении двух видимых линий, видима. Точка пересечения двух невидимых или одной видимой и другой невидимой линии невидима.