МОДУЛЬ 1

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Связь радиус-вектора и его составляющих.
2. Модуль радиус-вектора.
3. Траектория, путь, перемещение.
4. Кинематические уравнения поступательного движения.
5. Средняя путевая скорость поступательного движения.
6. Средняя скорость перемещения.
7. Мгновенная скорость поступательного движения.
8. Проекции мгновенной скорости на оси координат.
9. Модуль мгновенной скорости поступательного движения.
10. Среднее ускорение поступательного движения.
11. Мгновенное ускорение поступательного движения.
12. Проекции вектора ускорения на оси координат.
13. Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения.
14. Модуль вектора ускорения.
15. Формула скорости прямолинейного равномерного движения.
16. Формула скорости прямолинейного равнопеременного движения.
17. Кинематическое уравнение прямолинейного равномерного движения.
18. Кинематическое уравнение прямолинейного равнопеременного движения.
19. График зависимости ускорения от времени для равномерного и равнопеременного движения.
20. График зависимости скорости от времени для равномерного и равнопеременного движения.
21. График зависимости координаты от времени для равномерного и равнопеременного движения.

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

22. Кинематическое уравнение вращательного движения.
23. Средняя угловая скорость.
24. Мгновенная угловая скорость.
25. Мгновенное угловое ускорение.
26. Кинематическое уравнение вращательного равномерного и равнопеременного движения.
27. Формула скорости вращательного равномерного и равнопеременного движения.
28. Связь периода и частоты вращения.
29. Связь угловой скорости с периодом и частотой вращения.
30. Связь линейной и угловой скорости.
31. Связь тангенциального и углового ускорений.
32. Связь нормального ускорения и угловой скорости.

РЕКОМЕНДАЦИИ

Для решения задач необходимо:

1. Знать основные физические формулы.
2. Понять условие задачи.
3. Записать краткое условие задачи, указав значения физических величин в СИ.
4. Представить схему, поясняющую содержание задачи.
5. Указать действующие на тела силы, ускорения, скорости и импульсы тел.
6. Составить систему уравнений.
7. Решить систему уравнений — получить рабочую формулу. Для этого искомую физическую величину надо выразить через буквенные обозначения величин, заданных в условии задачи.
8. Проверить правильность решения, подставив наименования физических величин в рабочую формулу, получить размерность искомой величины.
9. Найти численное значение искомой величины.

1. Кинематические уравнения движения

Радиус-вектор $\vec{r}_1$ определяет положение тела в пространстве.

Связь радиус-вектора и его составляющих:

$$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j},$$

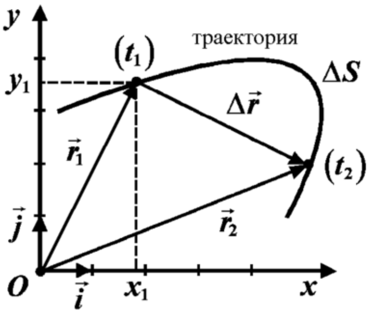


Рис. 1.

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные векторы.

Проекции радиус-вектора $\vec{r}_1$ принимают значения x_1, y_1.

Модуль радиус-вектора $|\vec{r}|$ определяется по теореме Пифагора:

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

При движении тела его координаты и радиус-вектор меняются с течением времени.

Кинематические уравнения движения — это зависимость радиус-вектора $\vec{r}$ или координат x, y от времени t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ или } x = x(t), \; y = y(t).$$

Задача 1. Уравнение движения в СИ имеет вид $\vec{r} = 2\cdot\vec{i} + 4t^2\cdot\vec{j} - 4t\cdot\vec{k}$. Найти значения координат *x*, *y*, *z* и модуль радиус-вектора *r* в момент времени 0,5 *с*.

Решение

Из уравнения движения $\vec{r} = 2\cdot\vec{i} + 4t^2\cdot\vec{j} - 4t\cdot\vec{k}$ следует, что коэффициенты перед ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, представляющие в общем случае зависимости координат *x*, *y* и *z* от времени, имеют вид:

$$x = 2 = const; \qquad y = 4t^2; \qquad z = -4t.$$

Подставив заданное значение времени t = 0,5 *с*, находим: x = 2 м; y =1 м; z = -2 м.

Модуль радиус-вектора вычислим с использованием теоремы Пифагора: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставляя значения x = 2 м; y =1 м; z = − 2 м, получаем: $r = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ м.

Ответ: x = 2 м, y = 1 м, z = − 2 м, r = 3 м.

Задача 2. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\cdot\vec{i} - 3t\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$. Определить значения координат *x*, *y*, *z* и модуль радиус-вектора *r* в момент времени 2 *с*.

Ответ: x = 16 м, y = − 6 м, z = 2 м; r = 17,2 м.

2. Длина пути. Перемещение

Траектория — это линия (рис. 1), описываемая движущимся телом.

Длина пути ΔS — это сумма длин всех участков траектории, пройденных телом за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 — начальный и t_2 — конечный моменты времени. Путь — величина скалярная и с течением времени не уменьшается.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ — это вектор (рис.1), соединяющий начальное и конечное положения тела:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Задача 3. Материальная точка, двигаясь по окружности радиусом R = 4 *м*, прошла половину окружности. Определить длину пройденного телом пути ΔS и перемещение Δr.

Решение

Согласно условию задачи длина пути рана (рис. 2) половине окружности:

$$\Delta S = 2\pi R/2 = \pi R = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}57 \text{ м}.$$

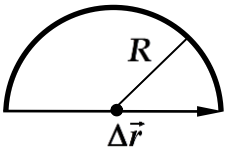


Рис. 2.

Перемещение — это вектор, соединяющий начальную и конечную точки пути. Модуль перемещения (рис. 2)

$$\Delta r = 2R = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м}.$$

Ответ: ΔS = 12,57 м, Δr = 8 м.

Задача 4. Тело, брошенное вертикально вверх, достигло высоты h и вернулось в исходную точку. Определить длину пройденного телом пути ΔS и перемещение Δr.

Ответ: $\Delta S = 2h$, $\Delta r = 0$.

3. Средняя скорость

Скорость характеризует быстроту изменения положения тела.

Средняя скорость перемещения — это вектор, равный отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к продолжительности Δt этого перемещения:

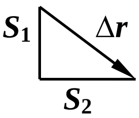
$$\vec{\overline{v}}_{\Delta r} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} .$$

Средняя путевая скорость или скорость движения — отношение пройденного телом пути ΔS ко времени Δt движения:

$$\overline{v}_{\Delta S} = \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Задача 5. Материальная точка прошла вдоль катетов прямоугольного треугольника длинной 3 и 4 м соответственно за 5 с. Определить среднюю путевую скорость и среднюю скорость перемещения материальной точки.

Дано:
S_1 = 3 м
S_2 = 4 м
Δt = 5 с
$\overline{v}_{\Delta S}$, $\overline{v}_{\Delta r}$ — ?



Решение

Средняя путевая скорость

$$\overline{v}_{\Delta S} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где длина пути равна сумме длин катетов $\Delta S = S_1 + S_2$.

Следовательно, $\overline{v}_{\Delta S} = \dfrac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \dfrac{3+4}{5} = 1{,}4$ м.

Средняя скорость перемещения

$$\overline{v}_{\Delta r} = \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

где перемещение равно гипотенузе прямоугольного треугольника (см. рис.) $\Delta r = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$

$$\text{Т. о., } \overline{v}_{\Delta r} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{5} = \frac{5}{5} = 1 \text{ м.}$$

Ответ: $\overline{v}_{\Delta s}$ = 1,4 м/с; $\overline{v}_{\Delta r}$ = 1,0 м/с.

Задача 6. Материальная точка, двигаясь по окружности радиусом R = 4 *м*, прошла половину окружности за 2 *с*. Определить среднюю путевую скорость и среднюю скорость перемещения точки (см. задачу 3).

Ответ: $\overline{v}_{\Delta s}$ = 6,28 м/с; $\overline{v}_{\Delta r}$ = 4 м/с.

4. Мгновенная скорость

Мгновенная скорость $\vec{v}$ — это первая производная радиус-вектора по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории.

Проекции мгновенной скорости на оси координат — это первые производные соответствующих координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Модуль мгновенной скорости определяется по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Задача 7. Уравнение движения имеет вид $\vec{r} = 4 \cdot \vec{i} + 3t \cdot \vec{j} - 2t^2 \cdot \vec{k}$. Найти проекции и модуль мгновенной скорости тела в момент времени 1 *с*.

Решение

Проекции мгновенной скорости на оси координат равны первым производным соответствующих координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(4)}{dt} = 0; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(3t)}{dt} = 3; \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(-2t^2)}{dt} = -2 \cdot 2t = -4t.$$

При t = 1 с проекции скорости равны: v_x = 0 м/с; v_y = 3 м/с; v_z = −4 м/с.

Модуль мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{0 + 3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: v_x = 0 м/с; v_y = 3 м/с; v_z = − 4 м/с; v = 5 м/с.

Задача 8. Движение материальной точки описывается уравнениями (в единицах СИ): $x = 2 + 4t$ и $y = 1 + 3t^2$. Найти проекции скорости точки на оси координат и модуль мгновенной скорости в момент времени t = 0,5 с.

Ответ: v_x = 4 м/с; v_y = 3 м /с; v = 5 (м/с).

5. Мгновенное ускорение

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости.

Мгновенное ускорение $\vec{a}$ — это вектор, равный первой производной скорости $\vec{v}$, или второй производной радиус-вектора $\vec{r}$ по времени t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Проекции вектора ускорения на оси координат равны первым производным соответствующих проекций скоростей или вторым производным соответствующих координат по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Модуль вектора ускорения можно определить, зная его проекции:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Задача 9. Зависимость скорости движения материальной точки от времени имеет вид (в единицах СИ): $\vec{v} = 3\cdot\vec{i} + 2t\cdot\vec{j} + t^2\cdot\vec{k}$ Найти проекции ускорения на оси координат и полное ускорение в момент времени t = 0,5 с.

Решение

Проекции ускорения на оси координат равны первым производным соответствующих проекций скоростей по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(3)}{dt} = 0; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

В момент времени t = 0,5 с проекции ускорения соответственно равны:

$$a_x = 0 \text{ м/с}^2;\ a_y = 2 \text{ м/с}^2;\ a_z = 2\cdot 0{,}5 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение найдем, применяя теорему Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{0 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}24 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $a_x = 0$ м/с^2; $a_y = 2$ м/с^2; $a_z = 1$ м/с^2; a = 2,24 м/с^2.

Задача 10. Уравнения движения материальной точки имеют вид $x = 2 + 3t + 2t^2$, $y = 5t + t^3$. Найти проекции ускорения на оси координат и полное ускорение в момент времени t = 0,5 с. Ответ: $a_x = 4$ м/с^2; $a_y = 3$ м/с^2; a = 5 м/с^2.

6. Средняя скорость. Среднее ускорение

Модуль среднего ускорения $\boldsymbol{a}_{\text{ср}}$ равен отношению изменения величины скорости Δv к промежутку времени Δt, за которое этого изменение произошло:

$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

где v_2 и v_1 — скорость в конечный t_2 и начальный t_1 моменты времени соответственно.

Задача 11. Движение точки описывается уравнением $x = 5 + 2t + 3t^2$. Найти среднюю скорость и среднее ускорение за первые две секунды движения.

Решение

Средняя скорость равна отношению пройденного телом пути Δx ко времени Δt движения:

$$v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t},$$

где x_1 и x_2 — начальная и конечная координата движущейся точки, которые определим, подставив в уравнение движения соответствующие значения времени. Так при t_1 = 0 с координата x_1 = 5 м, а при t_2 = 2 с — $x_2 = 5 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = 21$ м, и средняя скорость

$$v_{ср} = \frac{21-5}{2} = 8 \text{ м/с}.$$

Для вычисления среднего ускорения получим уравнение скорости, взяв производную по времени от уравнения движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5+2t+3t^2)}{dt} = 2+3\cdot 2t \ = 2+6t.$$

Среднее ускорение численно равно отношению изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло:

$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}.$$

В момент времени $t = 0$ *с* скорость v_1 = 2м/с, при $t = 2$ *с* скорость v_2 = 2 + 6·2 = 14 м/с, и среднее ускорение

$$a_{ср} = \frac{14-2}{2} = 6 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_{ср}$ = 8 м/с; $a_{ср}$ = 6 м/с^2.

Задача 12. Скорость движения точки вдоль оси описывается уравнением $v_x = 2 + 2t + 4t^2$.

Найти среднюю скорость и среднее ускорение за первую секунду движения.

Замечание. Для определения средней скорости необходимо найти первообразную скорости: $x = 2t + t^2 + \frac{4}{3}t^3$.

Ответ: $v_{ср}$ = 4,33 м/с; $a_{ср}$ = 6 м/с^2.

7. Графики. Мгновенная скорость, ускорение

Равномерное движение — движение, при котором ускорение $\boldsymbol{a = 0}$ (см. график 1) и, следовательно, скорость тела:

$$v = \pm v_0 = const \text{ (график 3).}$$

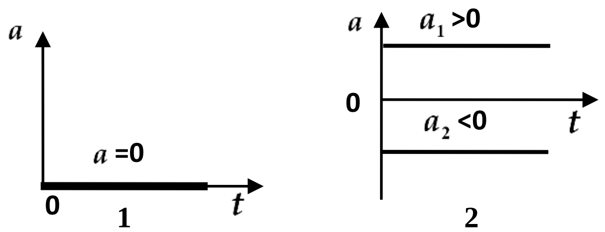
Равнопеременное движение — движение, при котором нормальное ускорение $\boldsymbol{a_n = 0}$, а тангенциальное $\boldsymbol{a_\tau = \pm a = const}$ (график 2).

Скорость в любой момент времени t определяется соотношением:

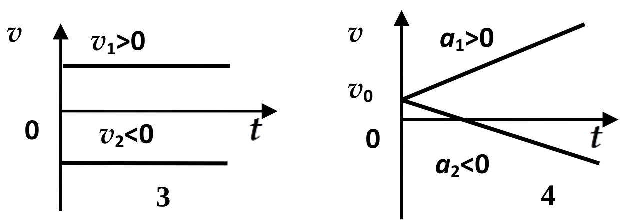
$$v = v_0 \pm at,$$

где $v_0 > 0$ — скорость в начальный момент времени ***t = 0*** (график 4).

Ускорение

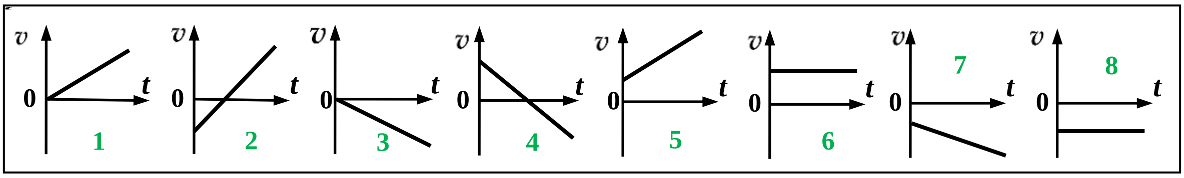


Скорость



Задача 13. График зависимости скорости v от времени t прямолинейного движения тела с постоянным ускорением $a > 0$ ($a < 0$, $a = 0$) и начальной скоростью $v_0 > 0$ ($v_0 < 0$, $v_0 = 0$) имеет вид…

Варианты ответа: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8



Решение

При движении тела с постоянным ускорением зависимость скорости v от времени t имеет вид: $v=v_0+at$, т.е. является линейной. Если начальная скорость v_0 = 0, то график начинается в точке пересечения осей абсцисс и ординат (см. например рис. 1 и 3). Если v_0 > 0, то график начинается в точке, лежащей на оси ординат выше пересечения осей (рис. 4, 5, 6), если же v_0 < 0, то в точке ниже пересечения осей (рис. 2, 7 ,8). При ускорении a = 0 скорость с течением времени не меняется (рис. 6, 8). Если a > 0, то скорость с течением времени возрастает (рис. 1, 2, 5), если a <0, то скорость уменьшается (рис. 3, 7).
Ответ: 5.

8. Графики. Координата, скорость, ускорение

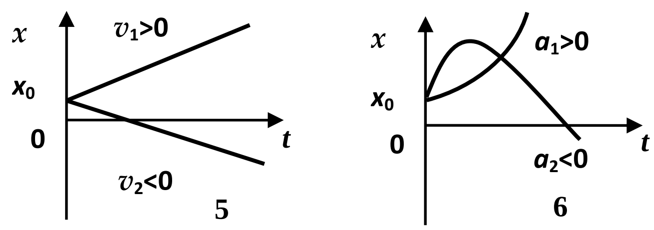
Координата x материальной точки в любой момент времени t при равномерном движении определяется соотношением:

$$x=x_0\pm v_0 t \text{ (график 5).}$$

Координата x материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, в момент времени t определяется соотношением:

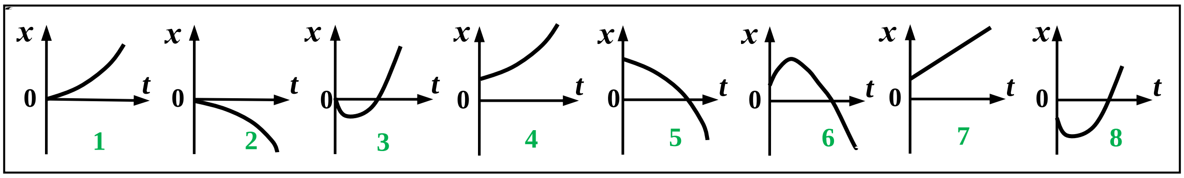
$$x=x_0+v_0 t\pm\frac{at^2}{2},$$

где x_0 — начальная координата (график 6) при t = **0**.



Задача 14. График зависимости координаты x от времени t прямолинейного движения тела с постоянным ускорением a > 0 (a = 0, a < 0), начальной скоростью v_0 = 0 (v_0 > 0, v_0 < 0) и начальной координатой x_0 = 0 (x_0 > 0, x_0 < 0), имеет вид…

Варианты ответа: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

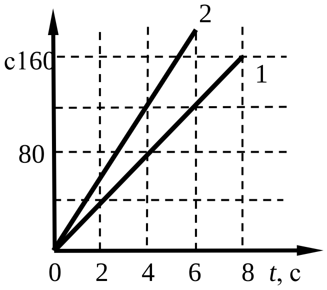


Решение

Уравнение движения имеет вид: $x=x_0+v_0t+\dfrac{at^2}{2}$. Если начальная координата x_0 = 0, то график начинается в точке пересечения осей абсцисс и ординат (см. например рис. 1, 2, 3), если x_0 > 0, то график начинается в точке, лежащей на оси ординат выше пересечения осей (рис. 4, 5, 6), если же x_0 < 0, то в точке ниже пересечения осей (рис. 8). Полагаем, что начальная скорость v_0 принимает только положительные значения. Тогда при ускорении a = 0 крайнее слагаемое в уравнении движения обратится в нуль, и координата будет возрастать прямо пропорционально времени (рис. 7). Если a > 0, то координата с течением времени возрастает по параболическому закону (рис. 1, 4). Если a <0, то в начальные моменты времени значения координаты увеличиваются, так как тело движется в положительном направлении оси 0x (рис. 6) вплоть до остановки, а затем с прежним ускорением начнет двигаться в обратном направлении.
Ответ: 1.

9. Графическое определение скорости

Задача 15. На рисунке представлены графики зависимости пройденного пути от времени для двух тел. Скорость второго тела v_2 больше скорости первого тела v_1 на величину Δv, равную



Решение

Линейная зависимость пути от времени свидетельствует о движении тел с постоянной скоростью. Так второе тело за время Δt_2 = 4 с прошло путь ΔS_2 = 120 м, следовательно, его скорость $v_2 = \dfrac{\Delta S_2}{\Delta t_2}$ = 30 м/с. Первое тело за Δt_1 = 8 с прошло путь ΔS_1 = 160 м, и его скорость $\boldsymbol{v_1}$ = 20 м/с. Таким образом, $\boldsymbol{\Delta v = v_2 - v_1}$ = 30 – 20 = 10 (м/с).

Ответ: Δv = 10 м/с.

10. Графическое определение пути, скорости, ускорения

Согласно определению, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

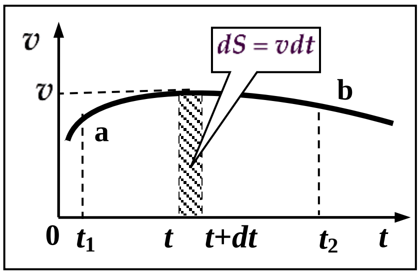
$$v = \frac{dS}{dt}.$$

Отсюда следует $\boldsymbol{dS = vdt}$ — приращение пути, пройденного телом за бесконечно малое время.

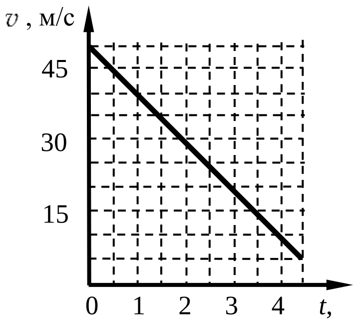
Длина пути, пройденного точкой за конечное время **$\Delta t = t_2 - t_1$,** находится интегрированием предыдущего выражения по времени в пределах от t_1 до t_2:

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

Пусть зависимость скорости от времени представлена графически (см. рис.). Тогда элемент пути $\boldsymbol{dS = vdt}$, пройденный телом за бесконечно малый промежуток времени $\boldsymbol{dt}$, численно равен площади заштрихованного прямоугольника. Длина пути за конечный интервал времени $\boldsymbol{\Delta t = t_2 - t_1}$ находится суммированием всех элементов пути в указанном интервале. Следовательно, длина пути равна площади криволинейной трапеции $\boldsymbol{t_1abt_2}$ под кривой $\boldsymbol{v(t)}$ (см. рис.).



Задача 16. На графике приведена зависимость скорости прямолинейно движущегося тела от времени. Определить путь, пройденный телом, среднюю скорость и модуль среднего ускорения за первые четыре секунды движения.



Решение

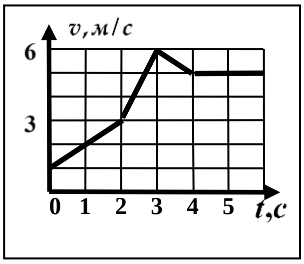
Путь численно равен площади трапеции, ограниченной зависимостью скорости от времени, значениями времени $t_1 = 0$ и $t_2 = 4$ с и осью $0t$. Разобьем трапецию на треугольник с основанием Δt = 4 с и высотой Δv_1 = 50 – 10 = 40 (м/с), площадь которого S_1 = 0,5 $\Delta t \cdot \Delta v_1$ = 80 м и прямоугольник. Стороны прямоугольника Δt = 4 с и Δv_2 = 10 м/с, а площадь S_2 = 40 м. Таким образом, путь $S = S_1 + S_2$ = 120 м.

Средняя скорость равна отношению пройденного телом пути S = 120 м к промежутку времени Δt = 4 с, т.е. $v_{ср}$ = 30 м/с.

Модуль среднего ускорения $a_{ср} = \left|\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{v_2 - v_1}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{10-50}{4}\right|$ = 10 м/с^2.

Ответ: ΔS = 120 *м*; $v_{ср}$ = 30 *м/с*; $a_{ср}$ = 10 *м/с*^{2}.

Задача 17. На графике приведена зависимость скорости прямолинейно движущегося тела от времени.

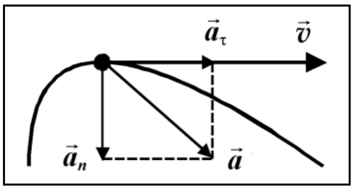


Определить путь, пройденный телом, среднюю скорость и модуль среднего ускорения за время движения от двух до пяти секунд.

Ответ: $\Delta S = 15$ *м*; $v_{ср} = 5$ *м/с*; $a_{ср} = 0{,}67$ *м/с*^{2}.

11.1. Тангенциальное, нормальное и полное ускорение

В общем случае вектор ускорения $\vec{a}$ направлен произвольно относительно скорости $\vec{v}$. Его удобно представлять составляющими:



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено вдоль (против) вектора скорости и характеризует быстроту изменения скорости по величине. Модуль тангенциального ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} .$$

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ направлено перпендикулярно вектору скорости к центру кривизны траектории и характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Модуль нормального ускорения:

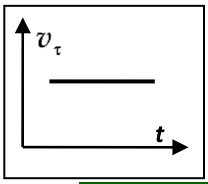
$$a_n = \frac{v^2}{R} ,$$

где R — радиус кривизны траектории.

Модуль полного ускорения определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Задача 18. Материальная точка движется по окружности со скоростью $\vec{v}$. На графике показана зависимость



проекции скорости v_τ от времени (τ – единичный вектор положительного направления, v_τ – проекция $\vec{v}$ на это направление). При этом для нормального a_n и тангенциального a_τ ускорения выполняются условия…

Варианты ответа:

N варианта ответа	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n a_τ	увелич. уменьш.	const увелич.	увелич. увелич.	const = нулю	увелич. const	уменьш. const	нет верно- го ответа	уменьш. уменьш.

Решение

На рисунке показано, что скорость с течением времени не меняется. Следовательно,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const и } a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Если бы скорость увеличивалась по линейному закону, то $a_n > 0$ и $a_\tau = \text{const}$.

Если бы скорость увеличивалась по параболическому закону, то $a_n > 0$ и $a_\tau > 0$. И т. д. Ответ: 4.

11.2. Тангенциальное, нормальное и полное ускорение

Задача 19. Материальная точка *M* движется по окружности со скоростью $\vec{v}$. На графике (рис.1) показана

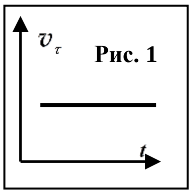


Рис. 1

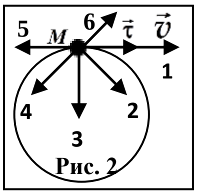


Рис. 2

зависимость проекции скорости v_τ от времени ($\vec{\tau}$ – единичный вектор положительного направления, v_τ – проекция $\vec{v}$ на это направление). При этом вектор полного ускорения (рис.2) имеет направление…

Варианта ответа: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Решение

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению, и при вращательном движении эта составляющая полного ускорения всегда присутствует и направлена по радиусу к центру окружности. Из графика (рис.1) следует, что скорость с течением времени не меняется по величине, и, следовательно, тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$. Таким образом, вектор полного ускорения имеет направление 3.

Если бы скорость увеличивалась с течением времени, то наряду с нормальной составляющей ускорения присутствовала бы и тангенциальная составляющая ускорения, направленная вдоль вектора мгновенной скорости. Полное ускорение в этом случае имело бы направление 2.

Если бы скорость уменьшалась, то тангенциальная составляющая ускорения была бы направлена против вектора мгновенной скорости, а полное ускорение имело бы направление 4.

12. Угловая скорость, угловое ускорение

Кинематическое уравнение вращательного движения — это зависимость угла поворота от времени:

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi(t)},$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ — это первая производная угла поворота по времени

$$\boldsymbol{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}.$$

Угловое ускорение $\boldsymbol{\beta}$ — это первая производная угловой скорости по времени

$$\boldsymbol{\beta = \frac{d\omega}{dt}}.$$

Задача 20. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, заданному уравнением $\varphi = 1 - 2t^2 + t^3$ рад. В какой момент времени угловая скорость вращения будет равна 4 рад/с? Определить угловое ускорение в этот момент.

Решение

Вначале определим уравнение угловой скорости тела, учитывая, что это первая производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - 2t^2 + t^3) = -2 \cdot 2t + 3t^2 = 3t^2 - 4t. \qquad (1)$$

Подставив в (1) значение угловой скорости ω = 4 рад/с, получим квадратное уравнение $3t^2 - 4t - 4 = 0$, решением которого является время t = 2 с.

Учитывая (1), найдем угловое ускорение

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 4t) = 6t - 4.$$

В момент времени t =2 с угловое ускорение β = 8 рад/с.

Ответ: t = 2 с, β = 8 рад/с.

Задача 21. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, заданному уравнением $\varphi = 0{,}5 - 0{,}5t^2 + 0{,}5t^3$ рад. В какой момент времени угловая скорость вращения будет равна 20 рад/с? Определить угловое ускорение в этот момент.

Ответ: t = 4 с, β = 11 рад/с.

13. Связь линейных и угловых кинематических характеристик

Связь линейной и угловой скорости:

$$\boldsymbol{v = \omega \cdot R}.$$

Связь тангенциального и углового ускорений:

$$\boldsymbol{a_\tau = \beta \cdot R}.$$

Связь нормального ускорения и угловой скорости:

$$\boldsymbol{a_n = \omega^2 \cdot R}.$$

Задача 22. Диск радиусом 0,2 м вращается вокруг неподвижной оси по закону, заданному уравнением $\varphi = 3 - 10t + 5t^3$ рад. Определить для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала вращения: 1) линейную скорость v; 2) тангенциальное ускорение a_τ; 3) нормальное ускорение a_n; 4) полное ускорение a.

Решение

1. Вначале определим уравнение угловой скорости тела, учитывая, что это первая производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(3 - 10t + 5t^3) = -10 + 15t^2 . \qquad (1)$$

Подставив в (1) заданное время t = 1 с, найдем угловую скорость ω = 5 рад/с.

Воспользовавшись связью линейной и угловой скорости

$$v = \omega \cdot R ,$$

и учитывая значение R = 0,2 м, получаем v = 5·0,2 = 1 м/с.

2. Для определения тангенциального ускорения первоначально нужно найти угловое ускорение, которое рано первой производной угловой скорости по времени:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(-10 + 15t^2) = 30t .$$

Учитывая связь тангенциального a_τ и углового β ускорения, найдем a_τ в момент времени t = 1 с:

$$a_\tau = \beta \cdot R = 30 \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 6 \text{ м/с}^2.$$

3. Нормальное ускорение a_n точек на окружности диска найдем, воспользовавшись связью a_n с линейной скоростью:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1^2}{0{,}2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

4. Полное ускорение найдем по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7{,}81 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: v = 1 м/с; a_τ = 6 м/с^2; a_n = 5 м/с^2; a = 7,81 м/с^2.

Задача 23. Диск радиусом 0,2 м вращается вокруг неподвижной оси по закону, заданному уравнением $\varphi = 2 - 2t^2 + 2t^3$ рад. Определить для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала вращения: 1) линейную скорость v; 2) тангенциальное ускорение a_τ; 3) нормальное ускорение a_n; 4) полное ускорение a.

Ответ: v = 0,4 м/с; a_τ = 1,6 м/с^2; a_n = 0,8 м/с^2; a = 1,84 м/с^2.