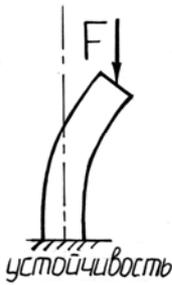


Понятие об устойчивости систем. Формы и методы определения устойчивости. Задача Эйлера. Условия закрепления концов стержня. Критические напряжения. Расчет на устойчивость. Расчет на устойчивость стержня при упруго-пластических деформациях. Расчет составной колонны. Продольно-поперечный изгиб.

19. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

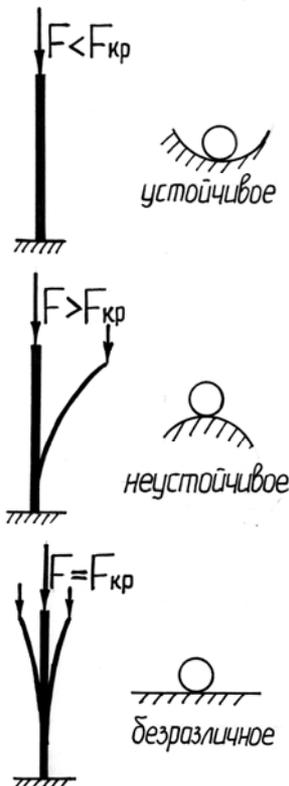
19.1. Основные понятия. Устойчивое и неустойчивое равновесие

В конструкциях и сооружениях большое применение находят детали, являющиеся относительно длинными и тонкими стержнями, у которых один или два размера поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. Поведение таких стержней под действием осевой сжимающей нагрузки оказывается принципиально иным, чем при сжатии коротких стержней. Опыт показывает, что при достижении сжимающей силой F некоторой критической величины, равной $F_{кр}$, прямолинейная форма равновесия длинного стержня оказывается неустойчивой, и при превышении $F_{кр}$ стержень начинает интенсивно искривляться (выпучиваться). При этом новым (моментным) равновесным состоянием упругого длинного стержня (при $F > F_{кр}$) становится некоторая новая уже криволинейная форма. Это явление носит название потери устойчивости.



Устойчивость – способность тела сохранять положение или форму равновесия при внешних воздействиях.

Обычно потеря устойчивости системы сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или разрушением. Возможны также случаи, когда система, потеряв устойчивость, переходит в режим незатухающих колебаний. Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность материала еще далеко не исчерпана.



При анализе устойчивости конструкций следует различать устойчивое и неустойчивое равновесие системы.

При *устойчивом равновесии* тело, выведенное какой-либо силой из своего первоначального положения, возвращается в это положение после прекращения действия силы.

При *неустойчивом равновесии* тело, выведенное какой-либо силой из своего первоначального положения, продолжает деформироваться в направлении данного ему отклонения, и, после удаления внешнего воздействия, в исходное состояние не возвращается. В этом случае говорят, что произошла потеря устойчивости.

Между этими двумя состояниями существует переходное состояние, называемое *критическим*, при котором деформированное тело находится в *безразличном равновесии*: оно может сохранить первоначальную форму, но может и потерять ее от самого незначительного возмущения.

Критическая сила ($F_{кр}$) – нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы (положения) тела.

С момента наступления критического состояния до момента разрушения деформации системы нарастают крайне быстро, и практически нет времени принять меры по предотвращению грозящей катастрофы. Таким образом, при расчете на устойчивость критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность.

При этом условие устойчивости можно записать в следующем виде:

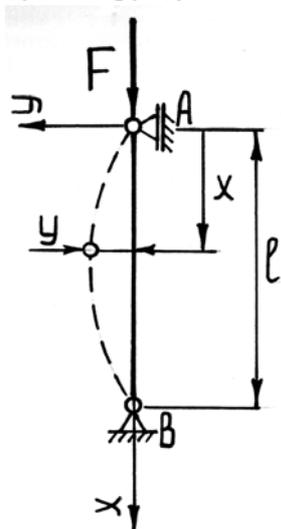
$$F_{max} \leq F_{кр},$$

или в напряжениях

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_y] = F_{кр} / A.$$

19.2. Устойчивость сжатого стержня. Задача Эйлера

При определении критической силы, вызывающей потерю устойчивости сжатого стержня, предполагается, что стержень идеально прямой и сила F приложена строго центрально. Рассматриваемый метод решения основан на том, что при достижении силой F критического состояния ($F=F_{кр}$) стержень находится в безразличном состоянии и ему присущи две формы равновесия: прямолинейная и криволинейная (в таких случаях говорят, что происходит ветвление, или бифуркация, равновесных состояний). Для выявления криволинейной формы равновесия достаточно приложить к стержню малую поперечную возмущающую нагрузку Q , которая вызовет малый прогиб. Если $F < F_{кр}$, то при удалении Q стержень



будет сохранять прямолинейную форму равновесия. Если $F > F_{кр}$, то равновесие стержня становится неустойчивым и сколь угодно малое возмущение достаточно для того, чтобы возникли большие прогибы. Задачу о критической нагрузке сжатого стержня с учетом возможности существования двух форм равновесия при одном и том же значении силы решил академик Петербургской Академии наук Л. Эйлер в 1744 году.

Рассмотрим шарнирно опертый по концам стержень, сжатый продольной силой F . Положим, что по какой-то причине стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в нем появился изгибающий момент M :

$$M = -F \cdot y,$$

где y – прогиб стержня в произвольном сечении с координатой x .

Для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением упругой линии:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}, \quad (19.2)$$

где E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции сечения стержня относительно оси z в данном случае; $E \cdot J$ – жесткость стержня при изгибе. Знаки левой и правой части (19.2) согласованны в данной системе координат.

Подставив в это уравнение выражение для изгибающего момента (19.1), получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.3)$$

Введя обозначение

$$\frac{F}{E \cdot J} = k^2, \quad (19.4)$$

перепишем формулу (19.3) так:

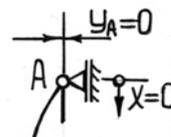
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0.$$

Общий интеграл полученного однородного дифференциального уравнения представляется функцией

$$y = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx. \quad (19.5)$$

Это решение содержит три неизвестные: постоянные интегрирования C_1 и C_2 и параметр k . Найдем эти величины из граничных условий – условий закрепления стержня по концам:

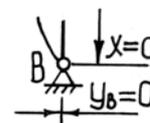
а) при $x=0$ прогиб в опоре (точка А) должен быть равен нулю $y=0$, тогда из уравнения (19.5) получим, что $C_2=0$, при этом формула приобретает вид



$$y = C_1 \cdot \sin kx. \quad (19.6)$$

Уравнение (19.6) указывает на то, что при продольном изгибе изогнутая ось стержня может быть представлена как некоторое число волн синусоиды с амплитудой C_1 .

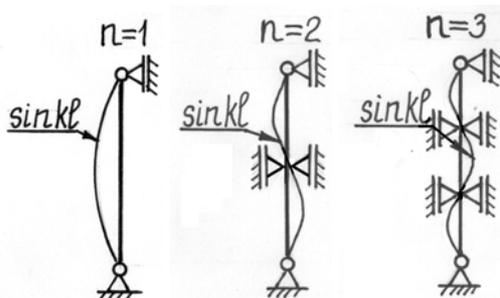
б) при $x=l$ прогиб в другой опоре (точка В) должен быть также равен нулю $y=0$, тогда из уравнения (19.6) получим, что $C_1 \cdot \sin kl = 0$. Согласно постановке задачи, коэффициент C_1 заведомо не равен нулю (иначе равен нулю прогиб балки во всех точках, что противоречит постановке задачи). В этом случае получаем



$$\sin kl = 0.$$

Из свойств синусоиды следует, что

$$k = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad (19.7)$$



где n – произвольное целое число ($n \neq 0$), которое представляет собой число полуволн синусоиды, укладываемых на длине изогнутой оси стержня.

Решая совместно уравнения (19.4) и (19.7), получим выражение для некоторых фиксированных значений сжимающей силы, при которых возможна криволинейная форма равновесия оси стержня

$$F = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}.$$

Как видим, минимальное значение критической силы примет при $n=1$ (на длине стержня укладывается одна полуволна синусоиды) и $J=J_{min}$ (стержень искривляется относительно оси с наименьшим моментом инерции)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l^2}. \quad (19.8)$$

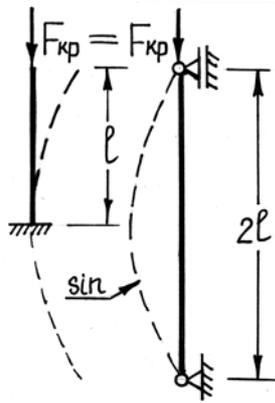
Это выражение обычно называют формулой Эйлера, а определяемую с ее помощью критическую силу – эйлеровой силой.

19.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня



Формула Эйлера была получена нами для, так называемого, основного случая – в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие случаи закрепления стержня. При этом можно получить формулу для определения критической силы для каждого из этих случаев, решая, как в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки с соответствующими граничными условиями. Но можно использовать и более простой прием, если вспомнить, что, согласно (19.8), при потере устойчивости на длине стержня должна укладываться одна полуволна синусоиды.

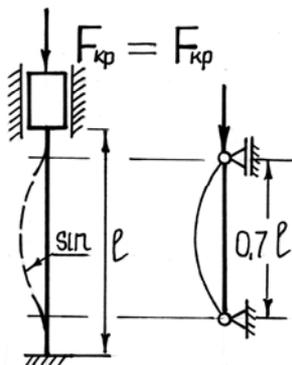
Рассмотрим некоторые характерные случаи закрепления стержня по концам и получим общую формулу для различных видов закрепления.



1-й случай

Стержень длиной l заделан одним концом и сжат продольной силой. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев можем сделать вывод, что ось стержня, заделанного одним концом, находится в тех же условиях, как и верхняя половина шарнирно опертого стержня длиной $2 \cdot l$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с одним зашпеленным концом может быть найдена так же как и для шарнирно опертой балки длиной $2 \cdot l$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(2 \cdot l)^2}.$$



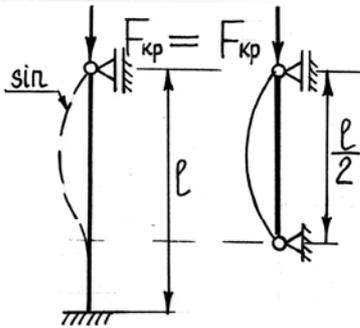
2-й случай

Стержень длиной l , у которого оба конца жестко заделаны. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев, а также из соображений симметрии, можем сделать вывод, что средняя часть стержня с заделанными концами, находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной $l/2$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с двумя зашпеленными концами может быть найдена

так же как и для шарнирно опертой балки длиной $l/2$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(0,5 \cdot l)^2}.$$

3-й случай



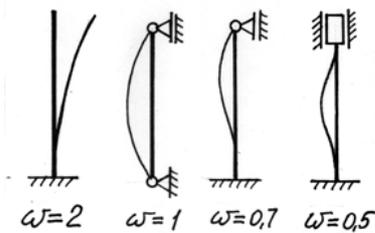
Стержень длиной l , у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно оперт. Из сравнения вида изогнутой оси балки для рассматриваемого и основного случаев, можем сделать вывод, что часть стержня находится в тех же условиях, как и шарнирно опертая балка длиной $0,7 \cdot l$. Таким образом, критическая сила для стержня длиной l с заделанным и шарнирно опертым концами может быть найдена так же как и для шарнирно опертой балки длиной $0,7 \cdot l$, то есть

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(0,7 \cdot l)^2}.$$

Все полученные выражения можно объединить в одну общую формулу

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2}, \quad (19.9)$$

где $\omega \cdot l = l_{пр}$ – приведенная длина стержня; l – фактическая длина стержня; ω – коэффициент приведенной длины, показывающий во сколько раз необходимо изменить длину стержня, чтобы критическая сила для этого стержня стала



равна критической силе для шарнирно опертой балки. (Другая интерпретация коэффициента приведенной длины: ω показывает, на какой части длины стержня для данного вида закрепления укладывается одна полуволна синусоиды при потере устойчивости.)

19.4. Критические напряжения. Расчет на устойчивость стержня при упруго-пластических деформациях

Введем понятие критического напряжения, то есть напряжения, соответствующего критической силе при потере устойчивости сжатого стержня

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\omega \cdot l)^2 \cdot A}. \quad (19.10)$$

Вспомним, что $J_{min}/A = i_{min}^2$ – квадрат минимального радиуса инерции. Тогда формулу (19.10) можно записать так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\omega \cdot l}{i_{min}}\right)^2}.$$

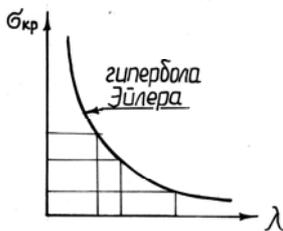
Величина

$$\lambda = \frac{\omega \cdot l}{i_{min}} \quad (19.11)$$

называется г и б к о с т ь ю стержня.

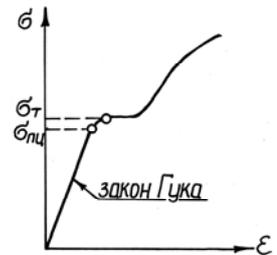
Окончательно получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \quad (19.12)$$



Как видим, критическое напряжение зависит только от упругих свойств материала (модуля Юнга E) и гибкости стержня λ . При этом зависимость между $\sigma_{кр}$ и λ может быть представлена гиперболической кривой, называемой гиперболой Эйлера.

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии балки. Поэтому использовать эту формулу можно лишь в том случае, когда деформирование материала протекает в соответствии с законом Гука, то есть пока критическое напряжение не превысит предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ (по диаграмме сжатия материала):



$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Используя это соотношение, можно найти условие для определения предельной гибкости стержня $\lambda_{пр}$, когда еще возможно применение формулы Эйлера:

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}. \quad (19.13)$$

Например, для малоуглеродистых сталей ($E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{пц} \approx 200$ МПа) предельная гибкость

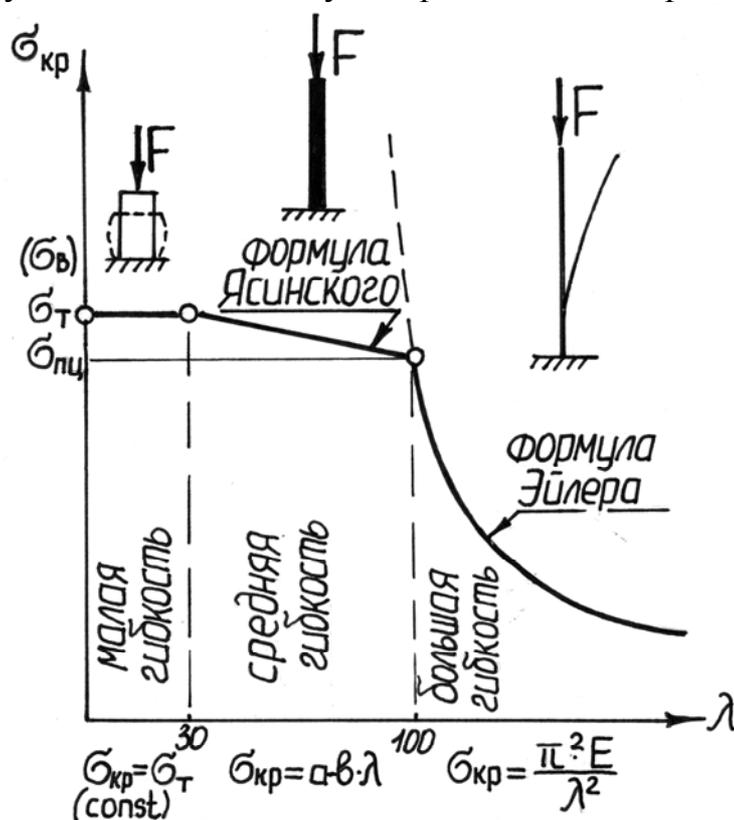
$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Итак, при $\lambda > \lambda_{пр}$ для определения критической силы будем пользоваться формулой Эйлера, если же $\lambda < \lambda_{пр}$, то формула Эйлера становится неприемлемой, так как дает завышенные значения критической силы, то есть всегда переоценивает действительную устойчивость стержней.

Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом пропорциональности не только неправильно, но и опасно.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому для расчетов на устойчивость в этой области обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого числа экспериментальных данных.

Прежде всего, выделим стержни с малой гибкостью, у которых $0 < \lambda < \lambda_1 \approx (0,3 \dots 0,4) \cdot \lambda_{пр}$ (для стали). Эти короткие стержни будут выходить из строя главным образом за счет потери прочности, потеря устойчивости в таких случаях, как правило, не наблюдается. Таким образом, для стержней малой гибкости при сжатии проводят обычный расчет на прочность, принимая в качестве предельного напряжения предел текучести σ_T (для пластичных материалов) или предел прочности σ_B (для хрупких материалов). Этому условию соответствует горизонтальная прямая на рисунке.



Для практических (инженерных) расчетов стержней средней гибкости $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_{пр}$ чаще всего используется эмпирическая зависимость, предложенная Ф. С. Ясинским на основе изучения опытных данных (формула Ясинского):

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda,$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала (например, для стали 40: $a=321$ МПа, $b=1,16$ МПа).

Формуле Ясинского на диаграмме критических напряжений соответствует наклонная прямая.

19.5. Определение допускаемых напряжений на устойчивость. Коэффициент понижения напряжений

Как видим, для продольно сжатых стержней необходимо проводить две проверки:

а) проверка на прочность

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_-],$$

где $[\sigma_-] = \sigma_o / n_{пр}$ – допускаемое напряжение на сжатие; σ_o – опасное напряжение (предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких); $n_{пр}$ – коэффициент запаса прочности.

б) проверка на устойчивость

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y],$$

где $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / n_y$ – допускаемое напряжение на устойчивость; $\sigma_{кр}$ – критическое напряжение на устойчивость; n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Отметим, что коэффициент запаса устойчивости (для сталей $n_y=1,8...3$) всегда выше коэффициента запаса на прочность ($n_{пр}=1,4...1,6$). Это объясняется тем, что коэффициент запаса устойчивости, кроме всего прочего, зависит от таких факторов, как начальная кривизна стержня, эксцентриситет приложения нагрузки, неоднородность материала, которые незначительно влияют на прочность, однако могут вызвать преждевременную потерю устойчивости.

Сравнивая выражения для допускаемых напряжений на устойчивость и прочность, установим связь между этими напряжениями

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \frac{n_{пр}}{\sigma_o} \cdot [\sigma_-].$$

Введем следующее обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \frac{n_{пр}}{\sigma_o}, \quad (19.14)$$

где φ – коэффициент понижения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость.

Тогда

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (19.15)$$

Коэффициент φ зависит от марки материала и гибкости λ стержня и приводится в справочных таблицах.

Таким образом, окончательно условие устойчивости примет вид

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (19.16)$$

Рассмотрим два вида расчета на устойчивость сжатых стержней – проверочный и проектировочный.

Проверочный расчет

Порядок проверочного расчета на устойчивость выглядит так:

- 1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения и условий закрепления стержня, вычисляем гибкость λ ;
- 2) по справочной таблице по известному λ находим коэффициент понижения допускаемого напряжения φ , затем определяем допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y]$ (19.15);
- 3) сравниваем максимальное напряжение с допускаемым напряжением на устойчивость по условию (19.16).

Проектировочный расчет

При проектировочном расчете (подобрать сечение под заданную нагрузку) в расчетной формуле (19.16) имеются две неизвестные величины – искомая площадь поперечного сечения A и неизвестный коэффициент φ (так как φ зависит от гибкости стержня, а значит и от неизвестной площади A). Поэтому при подборе сечения обычно приходится пользоваться методом последовательных приближений.

- 1) Обычно в первой попытке принимают $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$ и определяют площадь сечения в первом приближении

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_-]}.$$

- 2) По найденной площади A_1 подбирают сечение и вычисляют гибкость стержня в первом приближении λ_1 . Зная λ , находят новое значение φ_1' .
- 3) Далее, используя найденный φ_1' , проверяют условие устойчивости (19.16), и если σ_{max} и $[\sigma_y]$ (19.15) значительно отличаются друг от друга (более чем на 5 %), следует повторить расчет, приняв во второй попытке

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}.$$

19.6. Замечания о выборе материала и рациональной формы сечения при продольном изгибе

Выбор материала

Так как в формулу Эйлера из всех механических характеристик входит лишь модуль Юнга

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

то для повышения устойчивости стержней б о л ь ш о й гибкости нецелесообразно применять высокопрочные материалы, так как модуль Юнга для всех марок сталей примерно одинаков.

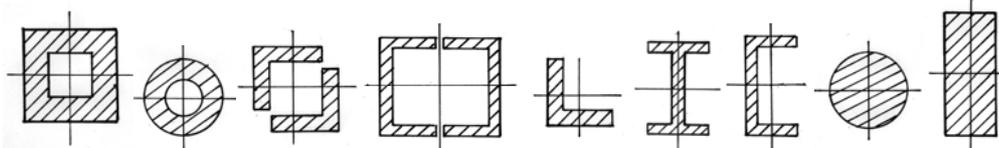
Для стержней м а л о й гибкости применение высокосортных сталей оправдано, так как с повышением предела текучести у таких сталей повышаются и критические напряжения, а значит и запас устойчивости.

Форма сечения

При проектировании стержней, работающих на устойчивость, следует выбирать такую форму сечения, чтобы гибкость стержня была одинаковой относительно обеих главных осей его сечения (условие равноустойчивости), а значит, согласно (19.10), (19.11), максимальный и минимальный моменты инерции такого сечения должны быть одинаковы

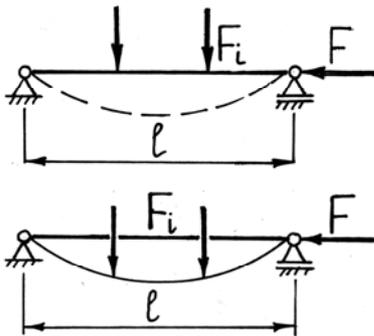
$$J_{max} = J_{min}.$$

Кроме того, необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших радиусов инерции. Для этого необходимо разместить материал сечения по возможности дальше от центра тяжести (трубчатые, коробчатые сечения).



По степени рациональности известные сечения можно распределить следующим образом: трубчатое сечение, уголок, двутавр, швеллер, квадрат, круг, прямоугольник.

19.7. Продольно-поперечный изгиб



Продольно-поперечный изгиб – это частный случай сложного сопротивления, при котором плоский поперечный изгиб балки сочетается с продольным изгибом от сжимающей нагрузки.

Отметим, что для гибких сжато-изогнутых стержней неприемлем принцип независимости действия сил, поскольку в этом случае сжимающая сила за счет значительных прогибов вызывает в стержне не только равномерное сжатие, но и дополнительный (к поперечному) изгиб. То есть, расчет гибких стержней должен вестись по деформированной схеме.

Получение точного решения рассматриваемой задачи часто вызывает серьезные затруднения, в связи с чем остановимся на приближенных методах решения.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня при продольно-поперечном изгибе можно представить в виде

$$M = M_{\pi} - F \cdot y, \quad (19.17)$$

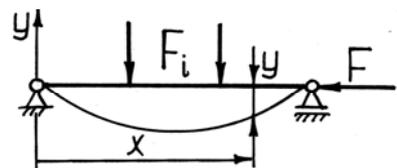
где M_{π} – изгибающий момент, вызванный только поперечной нагрузкой F_i ; F – продольная сжимающая сила.

Отсюда видно, что полный момент может быть найден только после того, как найден прогиб стержня, но, с другой стороны, прогиб нельзя найти, не зная момента.

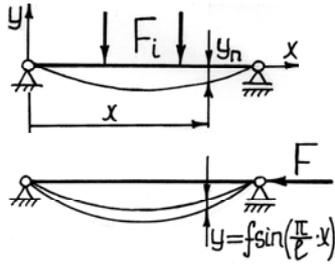
Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (M_{\pi} - F \cdot y). \quad (19.18)$$

Представим полный прогиб в виде следующей суммы



$$y = y_{\text{п}} + \Delta y, \quad (19.19)$$



здесь $y_{\text{п}}$ – прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой (без учета продольной силы F); Δy – дополнительный прогиб, появившийся в результате действия сжимающей силы F .

С учетом (19.19), уравнение (19.18) распадается на два уравнения вида:

$$\frac{d^2 y_{\text{п}}}{dx^2} = \frac{M_{\text{п}}}{E \cdot J}, \quad \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.20)$$

Предположим, что прогиб Δy , как и в случае (19.6), описывается синусоидой (в этом как раз и заключается приближенность решения)

$$\Delta y = f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right),$$

тогда

$$\frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \Rightarrow \frac{d^2(\Delta y)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta y.$$

С учетом второго из уравнений (19.20) имеем

$$\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta y = \frac{F \cdot y}{E \cdot J}. \quad (19.21)$$

Исходя из (19.19), можем показать, что $\Delta y = y - y_{\text{п}}$. В этом случае преобразуем (19.21) к следующему виду

$$y = \frac{y_{\text{п}}}{1 - F/F_3}, \quad (19.22)$$

где F_3 – эйлерова сила, которая, согласно (19.8), имеет вид:

$$F_3 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}.$$

Используя совместно (19.22) и (19.17), запишем формулу для определения полного момента при продольно-поперечном изгибе

$$M = M_{\text{п}} - \frac{F \cdot y_{\text{п}}}{1 - F/F_3}.$$

В этом случае выражение для определения максимального нормального напряжения при продольно-поперечном изгибе можно записать так:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{п}}}{W} - \frac{F \cdot y_{\text{п}}}{(1 - F/F_3) \cdot W},$$

где W – осевой момент сопротивления относительно оси поворота сечений балки при изгибе от поперечной нагрузки в плоскости xOy .

Как видим, нормальные напряжения нелинейно зависят от сжимающей силы и требуют для своего определения знания прогиба балки от поперечных нагрузок $y_{\text{п}}$.