2.1. Виды математических моделей САУ

Целью математического описания САУ является составление той или иной математической модели, используемой в дальнейшем для анализа и синтеза САУ. Любая математическая модель является, приближением к действительному состоянию взаимодействия отдельных информационных параметров объекта или всей системы в целом и отражает наиболее существенные взаимосвязи между переменными величинами. Так большинство переменных величин объектов и систем управления подвергается ограничению естественным или искусственным путем. Множество зависимостей между информационными параметрами являются нелинейными и должны быть представлены нелинейными математическими моделями. Однако в рамках настоящего пособия рассматриваются линейные математические модели, так как многие режимы функционирования САУ характеризуются незначительными изменениями переменных величин, в пределах которых зависимости между величинами могут считаться линейными. Системы, работающие в полных диапазонах изменений переменных, а также системы, содержащие элементы с явно выраженными нелинейными характеристиками (например, релейными), являются существенно нелинейными системами и рассматриваются в курсе «Нелинейные системы управления».

Различают следующие виды математических моделей САУ:

1. дифференциальные и разностные уравнения систем управления и их элементов;
2. векторно-матричные модели в пространстве состояний;
3. передаточные функции элементов и систем управления;
4. структурные схемы систем управления;
5. направленные графы систем управления;
6. временные характеристики САУ;
7. частотные характеристики САУ.

Эти же виды математических моделей в той или иной мере используются и для описания нелинейных САУ.

Дифференциально-разностные уравнения САУ

Дифференциальные (в частных случаях, алгебраические) уравнения непрерывных систем и разностные уравнения дискретных систем являются основной первичной формой математического описания любой САУ. Они могут использоваться самостоятельно для выполнения задач анализа и синтеза или служить основой для создания других форм математического описания.

Дифференциальные и алгебраические уравнения непрерывных САУ составляются на основании изучения и осознания основных физических, химических и информационных процессов, происходящих в объекте управления и системе в целом. Часто для записи уравнений используются уже известные законы, устанавливающие связь между технологическими переменными величинами.

Преобразование Лапласа

Несмотря на неограниченные возможности компьютерных технологий по решению систем дифференциальных и разностных уравнений преобразование Лапласа остается по-прежнему широко используемым при решении задач анализа и синтеза САУ.

Непрерывным преобразованием Лапласа непрерывной временной функции $f(t)$ называется следующее преобразование

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt,$$

где $s = \alpha + j\omega$, α и ω - постоянные, $j = \sqrt{-1}$. Преобразуемая функция $f(t)$ часто называется оригиналом, а $F(s)$ – изображением функции $f(t)$. К функции $f(t)$ предъявляется требование, чтобы она была однозначной и удовлетворяла условию $f(t) = 0$ при $t<0$.

Приведем в качестве примеров непрерывного преобразования изображения единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t)$.

$$L\{f(t)\} = L\{1(t)\} = \int_0^\infty 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности.

Непрерывное преобразование Лапласа являются линейным, т. е. изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации их изображений.

Так если $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$, то

$$L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s).$$

2. Изображение смещенной функции (теорема сдвига)

Сдвигу функции оригинала на τ, т. е. $f_1(t) = f(t-\tau)$ соответствует умножение непрерывного изображения на $e^{-s\tau}$:

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} L\{f(t)\} = e^{-s\tau} F(s).$$

3. Изображение производной (конечной разности) n -порядка

Если $L\{f(t)\} = F(s)$, то $L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$, при $f(0) = 0$ и всех $\frac{df^k}{dt^k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Другими словами взятию производной n-го порядка соответствует при нулевых начальных условиях умножение изображения на s^n.

4. Изображение интеграла (конечной суммы) функции-оригинала

Свойства изменения изображений функции после ее интегрирования или взятия конечной суммы в дискретном варианте является “обратными” по отношению к свойствам дифференцирования или взятия конечных разностей:

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s), \text{ где } F(s) = L\{f(t)\}.$$

Резюмируя свойства 3 и 4 отметим, что s – оператор дифференцирования в непрерывной области; $1/s$ – оператор интегрирования в непрерывной области.

5. Свойство изображения свертываемых функций (теорема свертки)

Сверткой двух непрерывных называется функция, значения которой вычисляются согласно $f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ для непрерывного времени.

Формулировка свойства об изображении свертки для непрерывного времени:

- изображение свертки равно произведению изображений свертываемых функций.

Если $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ и $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$, то

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

6. Определение начального значения функции оригинала по известному изображению

Зная изображение $F(s)$ можно сравнительно просто вычислить начальное и конечное значения функции-оригинала.
Начальное значение непрерывной функции $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$.

7. Конечное значение функции-оригинала

В непрерывном времени $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$.

Преобразование дифференциальных и разностных уравнений.

Пусть непрерывная система описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m g(t) + c_0 \frac{d^e f(t)}{dt^e} + c_1 \frac{d^{e-1} f(t)}{dt^{e-1}} + \ldots + c_e f(t),$$

где $y(t)$, $g(t)$, $f(t)$ – выходная управляемая величина, управляющее и возмущающее воздействие соответственно; $a_0, \ldots, a_n$; $b_0, \ldots, b_m$; $c_0, \ldots, c_e$ – постоянные коэффициенты. Предположим, что система работает при нулевых начальных условиях, т. е. при $t = 0$ имеем $\frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0,\ \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \frac{d^j g(t)}{dt^j} = 0,\ \ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ \frac{d^k f(t)}{dtk} = 0,\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ e-1$. Подвергнем заданное дифференциальное уравнение преобразованию Лапласа, используя свойства линейности и изображения производной,

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_n Y(s) =$$

$$= b_0 s^m G(s) + b_1 s^m G(s) + \ldots + b_m G(s) + c_0 s^e F(s) + c_1 s^{e-1} F(s) + \ldots + c_e F(s),$$

где $Y(s)$, $G(s)$, $F(s)$ – изображения по Лапласу функций $y(t)$, $g(t)$, $f(t)$.

Перепишем полученное уравнение в более сжатой форме

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n) Y(s) =$$

$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m) G(s) + (c_0 s^e + c_1 s^{e-1} + \ldots + c_e) F(s),$$

$$A(s) Y(s) = B(s) G(s) + C(s) F(s).$$

Сравнивая полученное уравнение с исходным, приходим к правилу преобразования по Лапласу любого дифференциального уравнения:

чтобы получить преобразованное по Лапласу уравнение, необходимо операторы дифференцирования $s = \dfrac{d}{dt}$ заменить комплексными операторами $s = \alpha + j\omega$, а все временные функции заменить их изображением.

Отметим, что преобразование по Лапласу уравнение является алгебраическим, что в корне облегчает все математические операции при его использовании.

Теперь возьмем отношения изображений присутствующих в уравнении величин, принимая одну из них (управление $G(s)$ или возмущение $F(s)$) равной нулю:

$$\left.\frac{Y(s)}{G(s)}\right|_{F(s)=0} = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad \left.\frac{Y(s)}{F(s)}\right|_{G(s)=0} = \frac{C(s)}{A(s)}.$$

Полученные отношения представляют собой передаточные функции системы по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W_g(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)}; \quad W_f(s) = \frac{C(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{F(s)}.$$

Передаточной функцией системы (элемента системы) называется отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.

Понятие передаточной функции является одним из фундаментальных в теории автоматического управления и широко используется на различных стадиях анализа и синтеза систем управления.