43а Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой.

В данном разделе это понимается так: для всякого E>0 существует N, что для всех n>N выполняется $|x_n| > E$

Анализ задачи. Можно упростить $|x_n| = |(-1)^n| \cdot n = 1 \cdot n = n$ Из какого неравенства типа n>N (N целое) следует $n > E$(то есть, выразить N через E)?

Само решение. Можно взять наименьшее возможное N по формуле $N = [E]$(квадратные скобки -знак целой части, наибольшее целое число, не превосходящее E. Тогда если n>N, то обязательно $n \geq N + 1$(оба целые) , а $N + 1 = 1 + [E] > E$, значит и $|x_n| = n > E$. Таблица зависимости N от E:

E	10	100	1000	10000	10153,2	...
N	10	100	1000	10000	10153	

(пример дробного E взят специально, чтобы показать, что не всегда N=E)

51.Предполагая, что n натуральное, найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

Анализ задачи. Число слагаемых в этой сумме n-1. Они образуют при каждом фиксированном n арифметическую прогрессию. Формула для ее суммы “первый плюс последний член, пополам, умноженные на число членов”

$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

Вывели компактную формулу для последовательности, у которой надо найти предел.

Само решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=$$

(по формуле разности пределов)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$$

(ранее в задачнике доказано, что последовательность $\frac{1}{n}$ является бесконечно малой, поэтому ее предел равен 0)

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

58. Доказать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

Анализ задачи. Для доказательства по определению пришлось бы решать неравенство относительно n

$$\frac{n}{2^n}<\varepsilon$$

, считая ε произвольным положительным параметром. Однако это неравенство трансцедентное и не имеет точного решения. Поэтому надо применить оценку

Решение. Пусть $n\geq 2$. Тогда в формуле Бинома Ньютона не менее трех слагаемых и все они положительные, значит, сумма всех слагаемых, начиная с 4-го, ≥ 0

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+...\geq 1+n+\frac{n(n-1)}{2}=1+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}>\frac{n^2}{2}$$

Поэтому

$$\frac{n}{2^n}<\frac{n}{\frac{n^2}{2}}=\frac{2}{n}$$

Имеем двустороннее неравенство (при n=1 оно тоже верно)

$$0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}$$

Причем мы легко находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2\cdot 0=0$$

По признаку 1 существования предела (приведенному в начале решаемой главы), последовательность $\frac{n}{2^n}$ заключена между двумя последовательнстями, имеющими одинаковый предел 0, поэтому предел ее существует и равен 0

101 Найти $\inf x_n,\ \sup x_n,\ \varliminf_{n\to\infty} x_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} x_n$

$$x_n=1-\frac{1}{n}$$

Решение. n монотонно возрастает

Тогда $\frac{1}{n}$ монотонно убывает

Тогда $1-\frac{1}{n}$ монотонно возрастает

Для монотонно возрастающих последовательностей $\inf x_n = x_1 = 1-\frac{1}{1} = 0$

$$\sup x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

существует, то верхний и нижний пределы равны ему

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$$

Ответы: 0,1,1,1

102.

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Решение. Если n четное, то $(-1)^n = 1$ и

$$x_n = \frac{1}{n} + 1 \quad (n = 2k)$$

Эта последовательность убывающая, ее предел равен 1, наибольший член

$$x_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Если n нечетное, то $(-1)^n = -1$ и

$$x_n = -\frac{1}{n} \quad (n = 2k-1)$$

Эта последовательность возрастающая (как и в предыдущей задаче), ее предел равен 0, наименьший член

$$x_1 = -1$$

Поэтому

$$\inf x_n = -1$$

$$\sup x_n = \frac{3}{2}$$

Последовательнсть x_n разбилась на две подпоследовательности, каждая из которых имеет предел: подпоследовательность с четными номерами имеет предел 1, с нечетными - предел 0. Оба они являются частичными пределами, а других частичных пределов не может быть, потому что тогда была бы еще более редкая подпоследовательность с номерами только четными или только нечетными, имеющая этот предел. Противоречие, так как с четными - предел только 1, с нечетными -предел только 0. Верхним пределом является наибольший из частичных пределов

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1$$

Ответы $-1, \frac{3}{2}, 0, 1$