Теория напряженного состояния. Понятие о тензоре напряжений, главные напряжения. Линейное, плоское и объемное напряженное состояние. Определение напряжений при линейном и плоском напряженном состоянии. Решения прямой и обратной задач.

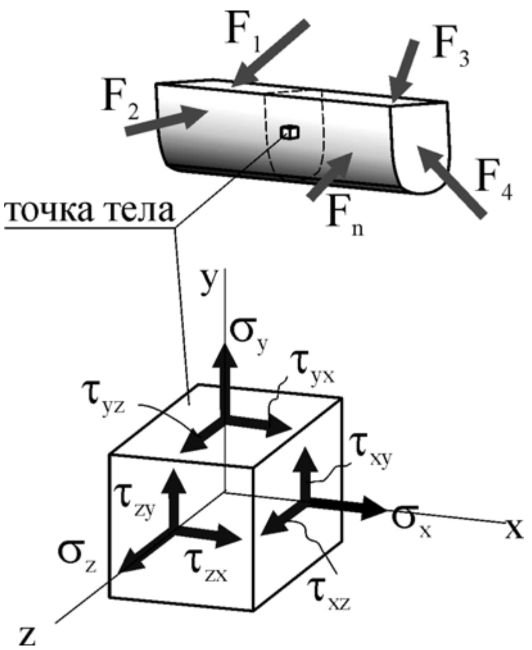
5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

5.1. Напряжения в точке. Главные напряжения и главные площадки

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют их смещению. Расположенная в данной точке частица по-разному взаимодействует с каждой из соседних частиц. Поэтому в общем случае в одной и той же точке напряжения различны по различным направлениям.

В сложных случаях действия сил на брус (в отличие от растяжения или сжатия) вопрос об определении наибольших напряжений, а также положения площадок, на которых они действуют, усложняется. Для решения этого вопроса приходится специально исследовать законы изменения напряжений при изменении положения площадок, проходящих через данную точку. Возникает проблема исследования напряженного состояния в точке деформируемого тела.

Напряженное состояние в точке – совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.



Исследуя напряженное состояние в данной точке деформируемого тела, в ее окрестности выделяют бесконечно малый (элементарный) параллелепипед, ребра которого направлены вдоль соответствующих координатных осей. При действии на тело внешних сил на каждой из граней элементарного параллелепипеда возникают напряжения, которые представляют нормальными и касательными напряжениями – проекциями полных напряжений на координатные оси.

Нормальные напряжения обозначают буквой σ с индексом, соответствующим нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения обозначают буквой τ с двумя индексами: первый соответствует нормали к площадке, а второй – направлению самого напряжения (или наоборот).

Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела, действует девять компонентов напряжения. Запишем их в виде следующей квадратной матрицы:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Эта совокупность напряжений называется т е н з о р о м н а п р я ж е н и й .

Тензор напряжений полностью описывает напряженное состояние в точке, то есть если известен тензор напряжений в данной точке, то можно найти напряжения на любой из площадок, проходящих через данную точку (заметим, что т е н з о р представляет собой особый математический объект, компоненты которого при повороте координатных осей подчиняются специфическим правилам тензорного преобразования, при этом тензорное исчисление составляет отдельный раздел высшей математики и здесь не рассматривается).

Не все девять компонентов напряжений, действующих на гранях параллелепипеда, независимые (несвязанные друг с другом). В этом легко убедится, составив уравнения равновесия элемента в отношении его вращений относительно координатных осей. Записав уравнения моментов от сил, действующих по граням параллелепипеда, и пренебрегая их изменением при переходе от одной грани к другой ей параллельной, получим, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},\ \tau_{xz} = \tau_{zx},\ \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Данные равенства называют з а к о н о м п а р н о с т и к а с а т е л ь н ы х н а п р я ж е н и й .

Закон парности касательных напряжений: по двум взаимно перпендикулярным площадкам касательные напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

В окрестности исследуемой точки можно выделить бесконечное множество взаимно перпендикулярных площадок. В том числе можно найти и такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называют г л а в н ы м и (более точно–площадки главных напряжений).

Главные площадки – три взаимно перпендикулярные площадки в окрестности исследуемой точки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам (то есть площадкам, на которых отсутствуют касательные напряжения).

На главных площадках нормальные напряжения (главные напряжения) принимают свои экстремальные значения – максимум σ_1, минимум σ_3 и минимакс σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). Тензор напряжений, записанный через главные напряжения, принимает наиболее простой вид:

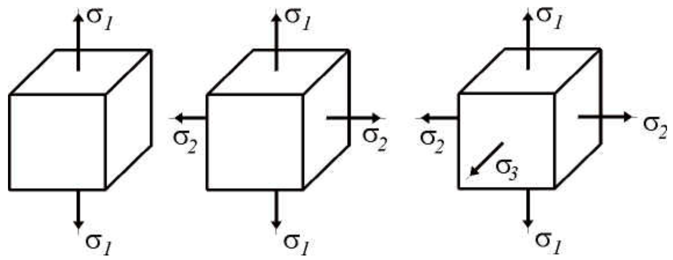
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от того, сколько главных напряжений действует в окрестности данной точки, различают три вида напряженного состояния:

1) **линейное (одноосное)** – если одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю ($\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = 0$);

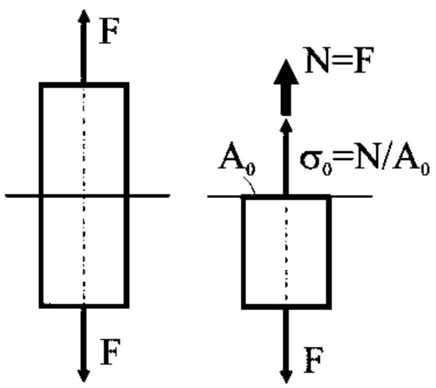
2) **плоское (двухосное)** – если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю ($\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 = 0$);

3) **объемное (трехосное)** – если все три главных напряжения отличны от нуля ($\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 \neq 0$).



5.2. Напряжения на наклонных площадках при линейном напряженном состоянии

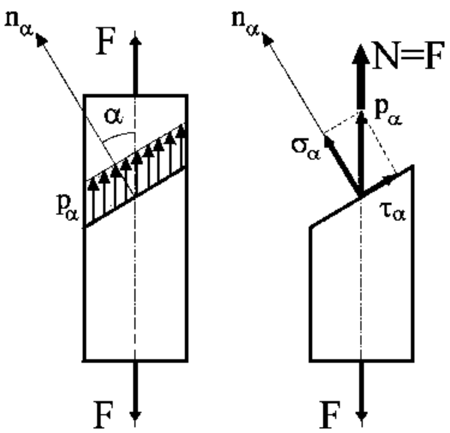
Элементы, находящиеся в линейном напряженном состоянии, можно выделить в окрестности некоторых точек стержня, работающего на изгиб, иногда – при сложном нагружении, но главным образом на растяжение или сжатие.



Рассмотрим стержень, испытывающий простое растяжение. Нормальные напряжения в его поперечных сечениях определяются следующим образом:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}.$$

Касательные напряжения здесь равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками ($\sigma_1=\sigma_0$).



Перейдем теперь к определению напряжений на неглавных, наклонных площадках. Выделим площадку, нормаль к которой составляет с осью стержня угол α. Проведенную таким образом наклонную площадку будем обозначать α-площадкой, а действующие на ней полные, нормальные и касательные напряжения – p_α, σ_α, τ_α соответственно. При этом площадь α-площадки (A_α) связана с площадью поперечного сечения стержня (A_0) следующим образом:

$$A_\alpha = A_0 / \cos\alpha .$$

Для определения напряжений воспользуемся методом мысленных сечений. Считая, что наклонная площадка рассекла стержень на две части, отбросим одну из них (верхнюю) и рассмотрим равновесие оставшейся (нижней). Осевая сила (N) в сечении представляет собой равнодействующую полных напряжений p_α. Следовательно,

$$N = p_\alpha \cdot A_\alpha .$$

Отсюда

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0} \cdot \cos\alpha = \sigma_0 \cdot \cos\alpha .$$

Нормальные и касательные напряжения определим, проецируя полное напряжение на нормаль и плоскость α-площадки соответственно:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha,$$

или, учитывая, что $p_\alpha = \sigma_0 \cdot \cos\alpha$

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Из анализа формул видно, что

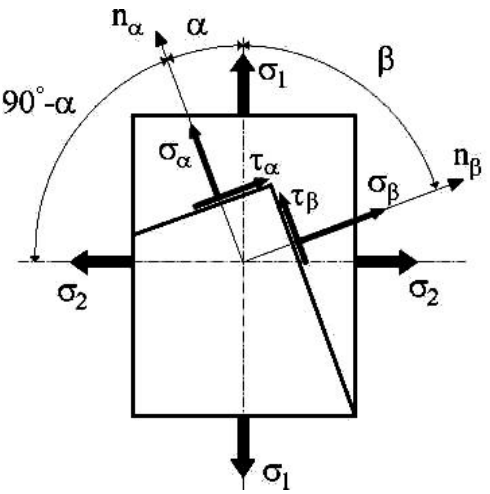
1) при $\alpha=0$ в поперечных сечениях стержня $\tau_\alpha=0$, $\sigma_\alpha=\sigma_0$ ($\sigma_1=\sigma_0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=0$);

2) при $\alpha=\pi/2$ в поперечных сечениях стержня $\tau_\alpha=0$, $\sigma_\alpha=0$;

3) при $\alpha=\pm\pi/4$ в поперечных сечениях стержня возникают максимальные касательные напряжения $\tau_\alpha= \tau_{max}= \sigma_0/2$ (нормальные напряжения $\sigma_\alpha= \sigma_0/2$).

5.3. Напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии

Плоское (двухосное) напряженное состояние встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении и является одним из наиболее распространенных видов напряженного состояния.

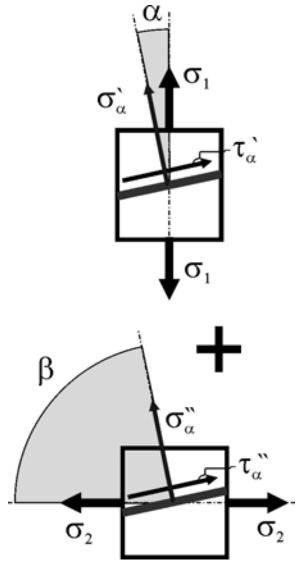


Определим напряжения на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии. Рассмотрим элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками. По ним действуют положительные напряжения σ_1 и σ_2, а третье главное напряжение $\sigma_3=0$.

Проведем сечение, нормаль к которому повернута на угол α от большего из двух главных напряжений (σ_1) против часовой стрелки (положительное направление α). Напряжения σ_α и τ_α на этой площадке будут вызываться как действием σ_1, так и действием σ_2.

Запишем п р а в и л а з н а к о в . Будем считать положительными следующие направления напряжений и углов: нормальные напряжения σ – растягивающие; касательные напряжения τ – вращающие элемент по часовой стрелке; угол α – против часовой стрелки от наибольшего из главных напряжений ($\alpha\le45^\circ$).

Плоское напряженное состояние может быть представлено как суперпозиция (наложение) двух ортогональных (взаимноперпендикулярных) одноосных напряженных состояний. При этом:



$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,$$

где σ'_α, τ'_α – напряжения, вызванные действием σ_1; σ''_α, τ''_α – напряжения, вызванные действием σ_2.

Напряжения при одноосном напряженном состоянии (от действия σ_1) связаны между собой как

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha;$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Напряжения σ''_α, τ''_α, вызванные действием σ_2, можно найти аналогично, но при этом необходимо учесть, что вместо угла α в формулы необходимо подставить угол $\beta = -\left(90^\circ - \alpha\right)$ – угол между α-площадкой и напряжением σ_2. Отсюда получим

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2\left[-\left(90^\circ - \alpha\right)\right] \Rightarrow \qquad \sigma''_\alpha = \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha;$$

$$\tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2 \cdot \left[-\left(90^\circ - \alpha\right)\right] \Rightarrow \qquad \tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Окончательно можем записать

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \tag{5.1}$$

На площадке, перпендикулярной данной, значения напряжений можно найти из этих же формул, подставляя вместо угла α величину угла $\beta = -\left(90^\circ - \alpha\right)$:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_1 \cdot \sin^2\alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha; \\ \tau_\beta &= -\frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Если сложить левые и правые части выражений для напряжений на α- и β-площадках, получим следующие равенства:

1) $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$, из которого следует, что сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина и н в а р и а н т н а я , то есть не зависит от поворота площадки.

2) $\tau_\alpha = -\tau_\beta$, которое еще раз указывает на закон парности касательных напряжений (знак «минус» связан с вышеприведенным правилом знаков для касательных напряжений).

Решая совместно уравнения (5.1) и (5.2) относительно напряжений σ_1 и σ_2, получим выражения для определения главных напряжений при плоском напряженном состоянии по известным напряжениям на произвольных взаимноперпендикулярных площадках:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4 \cdot \tau_\alpha^2} . \quad (5.3)$$

Обозначения главных напряжений σ_{max}, σ_{min} здесь оправданы тем, что одно из трех главных напряжений равно нулю.

Направление главных площадок найдем, исключая из выражений (5.1), (5.2) величины σ_1, σ_2 и решая полученное уравнение относительно угла α:

$$\mathrm{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} . \quad (5.4)$$

Задачи, рассматриваемые в теории напряженного состояния, могут даваться в прямой и обратной постановке.

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и соответствующие им главные напряжения; требуется найти нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом α к главным (аналитическое решение прямой задачи дается формулами (5.1) и (5.2)).

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным произвольным площадкам, проходящим через данную точку; требуется найти направление главных площадок и главные напряжения (аналитическое решение обратной задачи дается формулами (5.3) и (5.4)).

Отметим, что именно обратная задача оказывается наиболее распространенной в сопротивлении материалов, так как наиболее часто удается определить (теоретически или экспериментально) нормальные и касательные напряжения (σ_α, τ_α, σ_β, τ_β) на некоторых произвольных площадках. Затем по этим данным требуется найти положение главных площадок и величину главных напряжений, по которым и производится дальнейший расчет на прочность.