6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов

6.2.1. Основные понятия теории вероятностей

Первичным понятием теории вероятностей является понятие события.

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях. События обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C... Любое событие происходит вследствие испытания (эксперимента, исследования).

Испытание — это условия, в результате которых происходит (или не происходит) событие.

Например, испытание — подбрасывание монеты, события: A — «появление герба», B — «появление числа»; испытание — подбрасывание кубика, события: A — «появление 1 очка», B — «появление 2 очков», C — «появление 3 очков», D — «появление 4 очков», E — «появление 5 очков», G — «появление 6 очков).

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти во время проведения определенного испытания.

Например: во время вытягивания наугад одной карты из колоды вы взяли короля. Событие A — «взят король» — является случайным.

Случайные события могут быть массовыми и единичными.

Массовыми называют однородные события, наблюдающиеся при определенных условиях, которые могут быть повторены (можно наблюдать) неограниченное количество раз.

Например, попадание или промах в серии выстрелов; появление бракованных деталей при серийном выпуске; радиоактивный распад атомов вещества и др.

Примером единичного случайного события является падение Тунгусского метеорита.

Теория вероятностей изучает только массовые случайные события.

Достоверным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика натурального числа меньше 7» — является достоверным.

Невозможным называется событие, которое вследствие данного испытания не может произойти.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика числа 7».

Полной группой событий называется множество событий, таких, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Например: в испытании — бросок игрального кубика — полную группу событий составляют события:

A_1 — «появление числа 1»;
A_2 — «появление числа 2»;
A_3 — «появление числа 3»;
A_4 — «появление числа 4»;
A_5 — «появление числа 5»;
A_6 — «появление числа 6»...

или события:

B_1 — «появление четного числа»;
B_2 — «появление нечетного числа».

Попарно несовместимые события — это события, два из которых не могут произойти одновременно.

Например, попадание и промах при одном выстреле — это два несовместных события; появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном броске игрального кубика — это шесть несовместимых событий.

Равновозможные события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще, чем другое, во время многоразовых испытаний, которые проводятся при одинаковых условиях.

Например, появление чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при броске игрального кубика — равновозможные события.

Если события:

1) образуют полную группу событий;

2) являются несовместимыми;

3) являются равновозможными,

то такие события образуют *пространство элементарных событий*.

6.2.2. Классическое определение вероятности

Рассмотрим испытание — бросок игрального кубика; пространство элементарных событий состоит из событий:

A_1 — «появление числа 1»;

A_2 — «появление числа 2»;

A_3 — «появление числа 3»;

A_4 — «появление числа 4»;

A_5 — «появление числа 5»;

A_6 — «появление числа 6».

Рассмотрим событие A — «выпало четное число». Событию A соответствуют элементарные события: A_2, A_4, A_6.

Отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству событий пространства элементарных событий, называется **вероятностью случайного события** A и обозначается $P(A)$.

В приведенном примере $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Итак,

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где A — событие; $P(A)$ — вероятность события; n — общее количество событий пространства элементарных событий; m — число событий, которые способствуют событию A.

Это классическое определение вероятности было введено основателями теории вероятностей Б. Паскалем и П. Ферма. Вероятность достоверного события равна 1. Вероятность невозможного события равна 0.

Пример 1. Найдите вероятность того, что при броске двух монет выпадет два герба.

Решение. Пусть событие A — «выпало два герба».

Пространство элементарных событий состоит из четырех событий: A_1 — «выпало два герба»; A_2 — «выпали герб и число»; A_3 — «выпали число и герб»; A_4 — «выпали два числа».

Событию A способствует только событие A_1.

Итак, $m = 1$, $n = 4$, и тогда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

Непосредственный подсчет вероятностей событий значительно упрощается, если использовать формулы комбинаторики. Правильность решения задачи зависит от умения определить вид соединения, образуемого совокупностью событий, о которых идет речь в условии задачи. Вспомним алгоритм определения вида соединений. Рассмотрим примеры решения задач.

П р и м е р 1. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — черные. Из урны наугад вынимают два шарика. Какова вероятность того, что они белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты два шарика) равно числу способов, какими можно вынуть 2 шарика из 20, то есть числу сочетаний из 20 элементов по 2 $(n = C_{20}^2)$. Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «вынуты два белых шарика». Это количество равно числу способов, которыми можно вынуть 2 шарика из 12 белых, то есть числу сочетаний из 12 элементов по 2 $(m = C_{12}^2)$.

Итак, если событие A — «вынуты два белых шарика», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}.$$

Ответ: $\frac{33}{95}$.

П р и м е р 2. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — черные. Из урны наугад вынимают три шарика. Какова вероятность того, что среди выбранных два шарика белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты три шарика) равно $n = C_{20}^2$.

Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «среди трех выбранных шариков два белых». Два белых шарика из 12 белых шариков можно выбрать C_{12}^2 способами, а один черный шарик можно выбрать 8 способами, тогда событию «среди трех выбранных шариков два белых» способствуют $m = C_{12}^2 \cdot 8$ элементарных событий.

Итак, если событие A — «среди трех выбранных шариков два белых», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}.$$

Ответ: $\frac{44}{95}$.

П р и м е р 3. В урне лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шариков, одинаковых на ощупь. Наугад вынимают 6 шариков. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шарика?

Решение. В этой задаче испытание состоит в том, что из урны вынимают 6 шариков. Вынуть шесть шариков из 15 + 9 + 6 = 30 шариков можно $n = C_{20}6$ способами. Нас интересует вероятность события A — «вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шарика». Один зеленый шарик можно вынуть C_6^1 способами, 2 синих шарика можно вынуть C_9^2 способами, 3 красных шарика можно вынуть C_{15}^3 способами. Итак, событию A способствуют $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1$ элементарных событий. Тогда

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}.$$

Ответ: $\frac{24}{145}$.

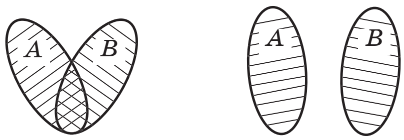
6.2.4. Операции над событиями

Вычислять вероятность событий, строя каждый раз множество элементарных событий и подсчитывая число событий, которые способствуют этому событию, иногда трудно. Поэтому для вычисления вероятностей пользуются правилами, которые позволяют по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, которые образуются из них с помощью некоторых операций.

Суммой событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении во время единичного испытания или события A, или события B, или двух событий одновременно.

Сумму двух событий обозначают так:

$$C = A + B \text{ или } C = A \cup B.$$



а *б*

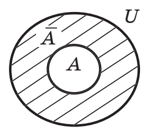
Графически сумму событий можно изобразить как объединение множеств. Сумму событий A и B, как и сумму множеств, называют **объединением**. На рисунке, *а* изображено объединение (сумма) совместимых событий A и B, на рисунке *б* изображена сумма двух несовместимых событий A и B, которая состоит в выполнении или события A, или события B (одновременное появление событий A и B исключено).

П р и м е р 1. Если событие A — «попадание в цель с первого выстрела», событие B — «попадание в цель со второго выстрела», то событие $C = A + B$ — «попадание в цель».

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. (Читается: «не A»).

П р и м е р 2. Если событие A — «попадание в цель при выстреле», то событие $\bar{A}$ — «промах при выстреле».

П р и м е р 3. Если событие A — «взята стандартная деталь» при испытании — наугад взята деталь из ящика, то $\bar{A}$ — «взята нестандартная деталь».

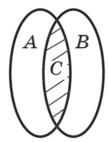


Для любого события A имеют место равенства:

$$A + U = U;\ A + A = A;\ A + \bar{A} = U;\ A + \varnothing = A.$$

Произведением событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении двух событий A и B во время единичного испытания.

Произведение двух событий A и B обозначают так: $C = A \cdot B$ или $C = AB$, или $C = A \cap B$.



Графически произведение двух событий, как и двух множеств, изображается так, как на рисунке.

Для любого события A и полной группы несовместных событий U имеют место равенства:

$$A \cdot A = A;\ A \cdot \varnothing = \varnothing;\ A \cdot \bar{A} = \varnothing;\ A \cdot U = A.$$

П р и м е р . Если событие A — «первый стрелок попал в цель», событие B — «второй стрелок попал в цель», тогда событие $C = A \cdot B$ — «в цель попали оба стрелка».

В теории вероятностей различают простые и сложные события. Например, во время броска двух монет событие A — «на первой монете выпал герб» — является простым.

Событие называется **сложным**, если появление его зависит от появления других, простых событий. Например, во время броска двух монет событие A — «выпал хотя бы один герб» — сложное, потому что оно состоит из таких событий:

A_1 — «выпал герб только на первой монете»;
A_2 — «выпал герб только на второй монете»;
A_3 — «выпал герб на двух монетах»;
то есть

$$A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2 + A_2.$$

6.2.5. Вероятность сложных событий

Вероятность суммы несовместимых событий

Теорема. **Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий.**

Если $A \cap C = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1. В урне лежат 2 черных, 3 красных, 9 зеленых, 6 синих шариков. Из нее наугад вынимают один шарик. Какова вероятность того, что он не черный?

Решение. Пусть событие A — «появление не черного шарика», A_1 — «появление черного шарика», A_2 — «появление красного шарика», A_3 — «появление зеленого шарика», A_4 — «появление синего шарика». Тогда $A = A_2 + A_3 + A_4$, причем A_2, A_3, A_4 — несовместимые, $P(A_2) = \frac{3}{20}$, $P(A3) = \frac{9}{20}$, $P(A_4) = \frac{6}{20}$. По теореме о вероятности суммы несовместимых событий получаем:

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

Ответ: $\frac{9}{10}$.

Из теоремы о вероятности суммы несовместных событий вытекают два следствия.

Следствие 1. **Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна единице.**

$$P(A_1) + PA(_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2. **Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример 2. В коробке есть 20 деталей, из которых 15 стандартных. Найдите вероятность того, что среди 3 выбранных наугад деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. Событие A — «среди выбранных деталей есть хотя бы одна стандартная», событие $\bar{A}$ — «все выбранные детали нестандартные». Согласно следствию 2 имеем: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдем $P(\bar{A})$. Общее число способов, которыми можно выбрать 3 детали из 20 деталей, равно $n = C_{20}^3$. Число нестандартных деталей $20 - 15 = 5$, из этого числа деталей можно $m = C_5^3$ способами выбрать 3 нестандартные детали.

Итак, $P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114}$.

Ответ: $\frac{113}{114}$.

6.2.6. Независимые события

Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет.

Пример 1. Монета бросается дважды. Вероятность появления герба в первом испытании не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании. В свою очередь, вероятность появления герба во втором испытании не зависит от результатов первого испытания. Итак, событие A — «появление герба в первом испытании» — и событие B — «появление герба во втором испытании» — независимы.

Пример 2. В урне 5 белых и 4 черных шарика. Из нее наугад берут шарик. Вероятность появления белого шарика (событие A) равна $\frac{5}{9}$. Взятый шарик возвращают в урну и продолжают испытание. Вероятность появления белого шарика при втором испытании (событие B) также равна $\frac{5}{9}$. В свою очередь, вероятность вынуть белый шарик при первом испытании не зависит от второго испытания. Итак, события A и B — независимы.

Вероятность произведения независимых событий

Теорема. **Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, то есть**

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. Найдите вероятность одновременного выпадение герба на двух монетах при одном броске двух монет.

Решение. Событие A — «выпал герб на первой монете», $P(A) = \frac{1}{2}$. Событие B — «выпал герб на второй монете», $P(B) = \frac{1}{2}$.

Так как события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что оба охотника попадают в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

Событие $C = A \cdot B$ — «оба охотника попали в цель», тогда

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ: 0,56.

Пример 3. Два охотника стреляют в цель одновременно и независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) только один из охотников попадет в цель;

б) ни один из охотников не попадет в цель;

в) хотя бы один охотник попадет в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

а) $C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$ — «только один из охотников попал в цель», тогда

$P(C) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - P(B)) + (1 - P(A)) \cdot 0{,}8 =$

$= 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.

б) $D = \bar{A} \cdot \bar{B}$ — «ни один из охотников не попал в цель», тогда

$P(D) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

в) $F = \bar{D}$ — «хотя бы один из охотников попадет в цель».

1 способ

$P(F) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

2 способ

$F = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + AB$, тогда

$P(F) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot (1 - 0,8) + (1 - 0,7) \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,8 =$
$= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,56 = 0,14 + 0,24 + 0,56 = 0,94.$

Ответ: а) 0,38; б) 0,06; в) 0,94.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий

Во время решения задач иногда приходится определять вероятность выполнения хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$, вероятности которых известны.

Теорема. **Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ — независимы, то вероятность выполнения хотя бы одного из них может быть выражена через вероятность этих событий по формуле:**

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot ... \cdot (1 - P(A_n)).$$

Следствие. **Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то вероятность выполнения хотя бы одного из них**

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Рассмотрим применение этой теоремы к решению задач.

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех пушек соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,9. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех пушек.

Решение. Вероятность попадания в цель каждой из пушек не зависит от результатов стрельбы из других пушек, поэтому события A_1 – «попадание первой пушкой», A_2 — «попадание второй пушкой», A_3 — «попадание третьей пушкой» независимы. Если A — «хотя бы одно попадание», то

$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_2)) =$
$= 1 - (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,7) \cdot (1 - 0,9) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$

Ответ: 0,994.

Пример 2. В типографии находятся 4 типографские машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найдите вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Пусть событие A — «работает в данный момент хотя бы одна машина», тогда по следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - (1 - 0,9)^4 = 0,9999.$

Ответ: 0,9999.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен выполнить стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Событие A — «при n выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз».

Согласно следствию из теоремы имеем:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$

Так как $P(A) \geq 0,9$, $p = 4$, то получим:

$1 - (1 - 0,4)^n \geq 0,9;$

$0,6^n \leq 0,1;$

$n \lg 0,6 \leq \lg 0,1$, так как $\lg 0,6 < 0$,

то $n \geq \dfrac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \dfrac{-1}{-0,2218} = 4,5.$

Итак, $n \geq 5$, то есть стрелок должен сделать не меньше 5 выстрелов.

Ответ: не меньше 5.

П р и м е р 4. Вероятность того, что событие произойдет хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,936. Найдите вероятность выполнения события в одном испытании, если известно, что во всех испытаниях вероятность выполнения события одна и та же.

Решение. Согласно следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

По условию $P(A) = 0{,}936$, $n = 3$, тогда

$0{,}936 = 1 - (1 - p)^3$; $(1 - p)^3 = 0{,}064$; $1 - p = 0{,}4$; $p = 1 - 0{,}4$; $p = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

6.2.7. Зависимые события

Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления второго события.

П р и м е р. В ящике 100 деталей: 80 стандартных и 20 нестандартных. Наугад берут одну деталь, не возвращая ее. Если появилась стандартная деталь (событие A), то вероятность появления стандартной детали при втором испытании (событие B) $P(B) = \frac{79}{99}$; если же в первом испытании вынут нестандартную деталь, то вероятность $P(B) = \frac{80}{99}$. Итак, вероятность появления события B зависит от появления или непоявления события A. События A и B — зависимые.

Пусть события A и B — зависимые, и событие A уже произошло.

Число, которое выражает вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, называется **условной вероятностью** события B относительно события A и обозначается $P(B \backslash A)$ или $P_A(B)$.

Пусть k — количество всех элементарных событий, которые способствуют событию A;

n — количество всех элементарных событий некоторого испытания;

m — количество элементарных событий, которые способствуют событию B;

r — количество элементарных событий, которые способствуют событию $A \cdot B$ ($r \le k$ и $r \le m$).

Если событие A произошло, то это означает, что произошло одно из элементарных событий, которые способствуют событию A. При этом событию B способствуют r и только r событий, которые способствуют событию $A \cdot B$.

Поэтому $P_A(B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, отсюда

$$P(A \cdot B) = P_A(B) \cdot P(A).$$

Вероятность произведения зависимых событий

Теорема. **Вероятность произведения зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события, если первое уже произошло.**

П р и м е р 1. В урне 3 белых и 7 красных шариков. Наугад вынимают один шарик, а потом второй. Найдите вероятность того, что из вынутых шариков первый будет белым, а второй — красным.

Решение. Событие A — «первым взят белый шарик», $P(A) = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что второй из шариков будет красным (событие B), найдена при условии, что первый — белый, то есть условная вероятность равна $P_A(B) = \frac{7}{9}$.

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{7}{9} = \dfrac{7}{30}$.

Ответ: $\dfrac{7}{30}$.

6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли

Взаимно независимыми называются такие испытания, в которых вероятность результата каждого из них не зависит от того, какие результаты имеют или будут иметь остальные испытания.

Многие задачи в теории вероятностей приводятся к следующей схеме, которая называется схемой Бернулли: происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может случиться или не случиться. Вероятность выполнения события A в каждом испытании одинакова и равна p, а вероятность невыполнения события A $q = 1 - p$. Необходимо найти вероятность $P_{m,\,n}$ того, что событие A случится m раз в этих n испытаниях.

Искомую вероятность можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}.$$

Выведение формулы Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A случится m раз и не случится $n - m$ раз, по теореме о произведении вероятностей независимых событий равна $p^m q^{n-m}$.

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить комбинаций из n элементов по m элементов, то есть C_n^m.

Так как эти сложные события несовместимы, то по теореме сложения вероятностей несовместимых событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Так как вероятность всех сложных событий одинакова, то искомая вероятность (случится m раз событие A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события $p^m q^{n-m}$, умноженной на их число C_n^m, то есть

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$$

или

$$P_{m,\,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

П р и м е р 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на протяжении суток не превышает установленной нормы, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии на протяжении 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Итак, вероятности перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянны и равны

$q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$P_{4,\,5} = C_6^5 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}30.$

Ответ: 0,30.

П р и м е р 2. Какова вероятность того, что при десяти бросках игрального кубика 3 очка выпадет 2 раза?

Решение. В этой задаче $n = 10,\ m = 2,\ p = \dfrac{1}{6},\ \ q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$, и тогда

$$P_{2,\,10} = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5^{8}}{6^{10}} \approx 0,29.$$

Ответ: $\approx 0{,}29$.

6.2.9. Статистическое определение вероятности

Вероятность случайного события мы определили как отношение количества событий, которые способствуют этому событию, к количеству всех равновозможных несовместимых событий, образующих полную группу событий во время определенного испытания. Такое определение вероятности называется классическим.

Классическое определение вероятности имеет определенные недостатки, а именно:

1) с помощью этого определения можно вычислять вероятность только для конечного количества элементарных событий;
2) в случае бесконечного количества элементарных событий определение использовать невозможно;
3) вычисление количества элементарных событий иногда очень громоздкое;
4) вывод о равновозможности элементарных событий делается без логических обоснований.

Поэтому наряду с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности.

Проведем испытание — подбрасывание монеты. Во время одноразового проведения испытания мы никаких закономерностей не заметим. Закономерности начинают выявляться тогда, когда эксперимент выполняют много раз в одинаковых условиях. В таблице приведены результаты экспериментов с подбрасыванием монеты, проведенных разными исследователями.

Исследователь	**Ж. Бюффон**	**О. де Морган**	**К. Пирсон**	**В. Феллер**	**У. Джевонс**	**В. Романовский**
Количество подбрасываний монеты — n	4040	4092	12 000	10 000	20 450	50 640
Количество выпаданий герба — m	2048	2048	6019	4979	10 379	40 151
Отношение $\dfrac{m}{n}$	0,5069	0,5005	0,5010	0,4979	0,5068	0,4979

Из таблицы видно, что отношение $\dfrac{m}{n}$, то есть отношение количества выпаданий герба к общему количеству бросков монеты, колеблется около числа 0,5. Данные таблицы показывают, как предвидение того, что герб выпадет с вероятностью 0,5, хорошо согласуется с исследованием.

Дадим статистическое определение вероятности.

Пусть n — количество всех испытаний в отдельной серии испытаний, а m — количество тех испытаний, в которых происходит событие A. Отношение $\dfrac{m}{n}$ называется относительной частотой события A в данной серии испытаний. Выясняется, что в разных сериях испытаний соответствующие частоты $\dfrac{m}{n}$ для больших n практически совпадают, колеблясь около некоторого постоянного значения $P(A)$, которое называется **статистической вероятностью** события:

$$P(A) = \frac{m}{n},\ \text{ или }\ P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}.$$

Понятие статистической вероятности широко используется в биологии, медицине, инженерном деле, экономике и других науках.

Пример. Количество рыб в озере неизвестно. Из озера поймали n рыб и пометили их, а затем выпустили в озеро. Через несколько дней в такую же погоду снова забросили невод и в нем оказалось m рыб, из которых k помеченных. Укажите приблизительное количество рыб в озере.

Решение. Пусть событие A — «пойманная рыба помечена», тогда $P(A)=\frac{k}{m}$. Но если в озере x рыб, среди которых n рыб помечены, то $P(A)=\frac{n}{x}$. Итак, $\frac{k}{m}=\frac{n}{x}$, отсюда $x=\frac{mn}{k}$.

Ответ: $\frac{mn}{k}$.

6.2.10. Закон больших чисел

На практике нередко бывает трудно определить, какова вероятность какого-нибудь события. В то же время можно на основании испытаний (наблюдений) сказать, какова частота появления события, если одно и то же испытание повторяется много раз.

Еще Якоб Бернулли (1654–1705), известный швейцарский математик, заметил следующую интересную закономерность, которая носит название «закона больших чисел»: чем больше выполняется однотипных испытаний, тем ближе частота появления события к вероятности этого события. Точнее, **теорема Бернулли** утверждает: если в ряде испытаний вероятность некоторого события остается для каждого испытания постоянной и равной p, то при достаточно большом количестве испытаний практически вероятно, что частота $\frac{m}{n}$ появления события отличается от ее вероятности меньше, чем на сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.

Итак, теорема Бернулли математически подтверждает нашу интуитивную убежденность в том, что при большом количестве испытаний должно выполняться приближенное равенство $\frac{m}{n} \approx p$.

В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события ее частоту, вычисленную при достаточно большом количестве испытаний.

Пример. Рассматривая данные о рождении детей, можно сделать вывод: частота рождения мальчиков при достаточно большом количестве наблюдений за рождаемостью близка к числу 0,511, поэтому это число и принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать демографические прогнозы.

Решение задач

Для решения задач на нахождение вероятностей одного события из условия, что другое произошло, используют определенный алгоритм.

1. Обозначить все события, о которых идет речь в задаче.
2. Выяснить и записать символами то, что известно по условию задачи, и то, что необходимо найти.
3. Выразить событие, вероятность которого необходимо найти, через события, вероятности которых известны или их легко можно найти.
4. Вычислить искомую вероятность, используя изученные теоремы, определения.

Пример. В шкатулке лежат 6 шаров, 3 из которых — красные. Наугад взяты 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара — красные?

Решение.

1 способ

Пусть событие A — «взятые два шара — красные»; n — количество возможностей выбора двух шаров из шести, $n = C_6^2$; m — количество возможностей выбора двух красных шаров из трех, $m = C_3^2$, тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

2 способ

Пусть событие A — «первый взятый шар — красный», $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; событие B — «второй взятый шар — красный», $P(B) = \frac{2}{5}$; событие C — «оба взятых шара — красные», тогда $C = A \cdot B$.

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2.
«Вероятность событий»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что шестерка выпадет только один раз?

B2. Из 10 изготовленных деталей 3 детали оказались с дефектами. Какова вероятность того, что выбранные наугад 2 детали будут без дефектов?

B3. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что оба охотника попадут в мишень?

B4. В коробке 5 белых и 7 черных шаров. Из коробки наугад выбирают шар. Какова вероятность того, что этот шар белым?

B5. В коробке 6 белых и 5 черных шаров. Из коробки вынимают один шар и откладывают его в сторону, он оказывается белым. После этого из коробки вынимают еще один шар. Какова вероятность того, что он тоже окажется белым?

B6. Куб, все грани которого раскрашены, разрезали на 1000 равных кубиков. Какова вероятность того, что наугад выбранный кубик имеет только две раскрашенные грани?

B7. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что лишь один из охотников попадет в цель?

B8. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартные), а во втором — 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна стандартная?

B9. Трое стрелков, для которых вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только два из стрелков попадут в цель?

B10. Трое стрелков, для которых вероятность попадания в цель соответственно равна 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только один из них попадет в цель?

B11. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартные), а во втором — 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна нестандартная?

B11

B12. Имеется пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7 и 9 см. Определите вероятность того, что из трех наугад выбранных отрезков (из данных пяти) можно построить треугольник?

B12

B13. Трое стрелков, для которых вероятность попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в цель?

B13

B14. В ящике 4 белых, 5 красных и несколько синих шаров. Найдите общее количество шаров в ящике, если вероятность вынуть наугад синий шар равна 0,25.

B14

B15. В сумке лежат яблоки, среди них 8 красных, остальные — желтые. Найдите количество желтых яблок, если вероятность вынуть из сумки наугад красное яблоко равна 0,4.

B15

B16. Отдел доставки пиццерии получил заказ на фирменную пиццу и другие три вида пиццы, причем 80 % клиентов заказали фирменную пиццу. Определите вероятность того, что среди двух наугад выбранных заказов будет только один на фирменную пиццу.

B16

B17. Участнику телевизионного шоу разрешается открыть любые два сейфа из пяти предложенных (в двух из них лежат призы, остальные — пустые). Определите вероятность получения двух призов.

B17

B18. Вероятность успешного прохождения во II тур «Евровидения» двух музыкальных групп равна 0,6 и 0,7 соответственно. Определите вероятность того, что обе группы не пройдут во II тур.

B18