6. МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОГРАММ

6.1. Модели оптимизации

Модели оптимального формирования производственных программ применяют там, где требуется подготовить план выпуска продукции, *оптимальный с точки зрения выбранного критерия* – максимума прибыли или минимума издержек. При этом имеющиеся в наличии материальные, финансовые и иные ресурсы ограничены.

Для формализации - записи задачи в математической форме необходима следующая информация

- n – количество выпускаемых изделий, включенных в производственную программу;
- m – количество используемых для производства ресурсов;
- a_{ij} – удельные затраты i-го ресурса, необходимые для производства единицы j-го продукта;
- b_i – имеющиеся в наличии запасы i-го ресурса;
- c_j – доход, получаемый от выпуска и реализации единицы j-го продукта либо издержки, связанные с производством единицы j-го продукта.

В качестве управляемых переменных (переменных решения) – x_j выбирают объемы выпуска продуктов каждого типа (j=1,2,…,n).

Модель линейного программирования для поиска оптимальных производственных программ имеет вид:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max \quad (\min), \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{6.3}$$

В модели

- (6.1) – целевая функция, в которой Z – суммарный доход от реализации продукции либо суммарные издержки, связанные с выполнением производственной программы;

- (6.2) – система ограничений, обусловленная имеющимся запасом ресурсов:
- (6.3) – условие неотрицательности управляемых переменных;
- $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ – производственная программа.

Задача заключается в нахождении такой производственной программы – набора значений для управляемых переменных $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, при котором целевая функция будет достигать своего максимального, либо минимального значения в рамках ограничений, обусловленных имеющимися ресурсами.

В реальных задачах к ограничениям по ресурсам могут добавляться дополнительные ограничения, связанные, например, с необходимостью выполнения контрактных обязательств, с особенностями спроса на тот или иной продукт и т.д.

На практике помимо планирования производственных программ к *моделям классического типа (6.1) - (6.3)* приводит и большое число других управленческих ситуаций, связанных с решением задач

- оптимального смешения (задачи о диете);
- оптимизации раскроя материалов;
- оптимизации финансовых потоков;
- разработки оптимальных графиков платежей;
- поиска наиболее выгодных путей размещения финансовых средств (задачи оптимального инвестирования) и многое другое.

Рассмотрим примеры решения некоторых типовых задач, относящихся к моделям указанного типа.

6.2. Задача об оптимальной производственной программе предприятия

Предприятие выпускает три вида крепежных изделий: болты, гайки, шайбы. Нормы расхода сырья, времени работы оборудования и затрат электроэнергии, которые необходимы для производства одной тонны каждого изделия, приведены в табл. 6.1.

Месячные запасы ресурсов, которыми располагает предприятие, ограничены. По сырью эти ограничения обусловлены ёмкостью складских помещений, по оборудованию – станочным парком и трудовыми ресурсами, по электроэнергии – техническими и финансовыми причинами. Размеры запасов и доход от реализации продукции в у.е. ($) за 1 тонну приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1.

Производственные ресурсы	Расход ресурсов на тонну продукции			Запасы ресурсов
	Болты	Гайки	Шайбы	
Сырьё	3	5	12	154
Оборудование	5	7	8	210
Электроэнергия	2	8	11	100
Доход от реализации ($ / тонну)	194	175	264	

Помимо запасов на формирование программы влияет необходимость выполнения контрактных обязательств: предприятие обязано обеспечить поставку болтов в количестве 4 тонн, гаек – в количестве 2 тонн, шайб – в количестве 3 тонн.

Требуется сформировать месячную производственную программу (определить объемы выпуска каждого вида продукции), при которой доход от реализации будет максимальным.

Решение

Для формализации задачи обозначим через x_1, x_2, x_3 искомую производственную программу – объемы выпуска болтов, гаек, шайб (тонн). Тогда, доход от реализации будет равен

$$Z = 194x_1 + 175x_2 + 264x_3. \tag{6.4}$$

Производственная программа x_1, x_2, x_3, может быть реализована только при выполнении следующих условий (ограничений)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 \le 154, \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \le 210, \\ 2x_1 + 8x_2 + 11x_3 \le 100, \\ x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 2, \\ x_3 \ge 3. \end{cases} \tag{6.5}$$

Переменные решения x_1, x_2, x_3 неотрицательны*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \tag{6.6}$$

Получаем задачу линейного программирования: необходимо максимизировать целевую функцию (6.4) – доход от реализации продукции – при условии, что на переменные x_1, x_2, x_3 наложены ограничения (6.5), (6.6.).

Для решения задачи в Excel создаем на рабочем листе табличный вариант модели оптимизации (6.4) – (6.6.) – рис. 6.1.

Вводим необходимую информацию в надстройку «Поиск решения» (рис. 6.2.) и получаем на рабочем листе Excel оптимальное решение (рис.6.3.). Найденная «Поиском решения» оптимальная производственная программа (ячейки B8, C8, D8 – рис. 6.3):

$$\begin{cases} x_{1опт} = 25{,}5, \\ x_{2опт} = 2, \\ x_{3опт} = 3. \end{cases}$$

Максимально возможный при данных запасах ресурсов доход – Zmax составит 6089 $ (ячейка E8 рабочего листа Excel).

	A	B	C	D	E	F
1		**Болты**	**Гайки**	**Шайбы**	**Запасы**	
2	**Сырьё**	3	5	12	154	
3	**Оборудование**	5	7	8	210	
4	**Электроэнергия**	2	8	11	100	
5	**Доход ($ / тонну)**	194	175	264		
6						
7		**X1**	**X2**	**X3**	**z**	
8	**Перем. решен.=>**				***=СУММПРОИЗВ(B5:D5;B8:D8)***	
9						
10	**Левые части ограничений**		**Знак**	**Пр.ч.огр**		
11	**=СУММПРОИЗВ(B2:D2;$B$8:$D$8)**		**≤**	**154**		
12	**=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$8:$D$8)**		**≤**	**210**		
13	**=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$8:$D$8)**		**≤**	**100**		
14	**=B8**		**≥**	**4**		
15	**=C8**		**≥**	**2**		
16	**=D8**		**≥**	**3**		

Рис. 6.1.

* В данном примере условие неотрицательности переменных вводить необязательно, так как оно «перекрывается» тремя последними ограничениями в (6.5).

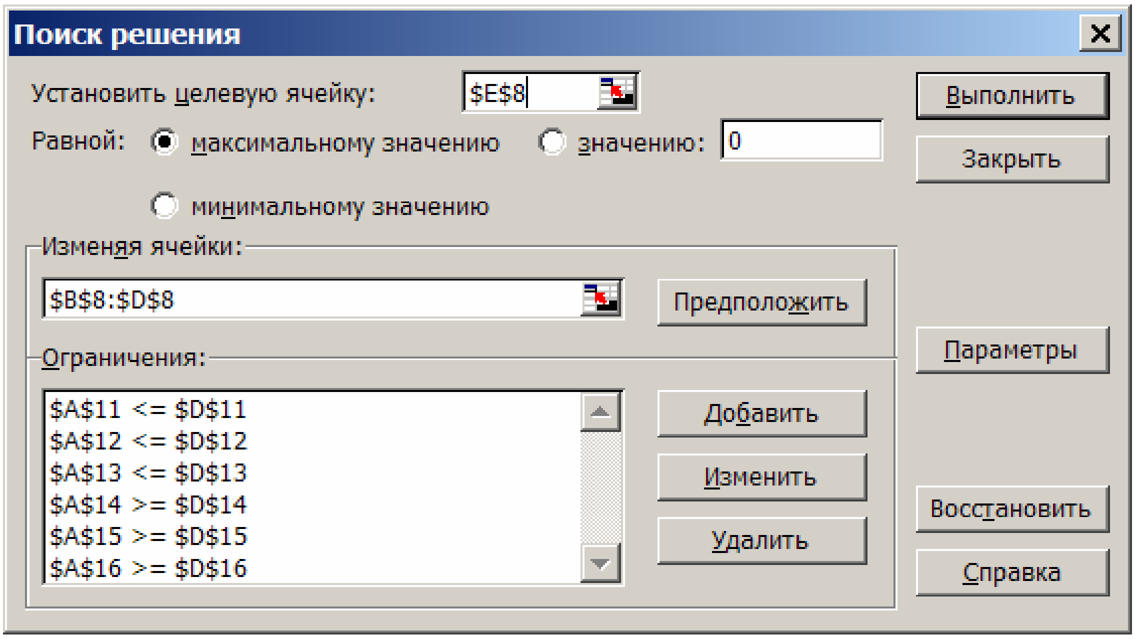

Рис. 6.2

	A	B	C	D	E
1		**Болты**	**Гайки**	**Шайбы**	**Запасы**
2	**Сырьё**	3	5	12	154
3	**Оборудование**	5	7	8	210
4	**Электроэнергия**	2	8	11	100
5	**Доход ($ / тонну)**	194	175	264	
6					
7		**X1**	**X2**	**X3**	**z**
8	**Перем. решен. =>**	25,5	2	3	***6089***
9					
10	**Левые части ограничений**		**Знак**	**Пр.ч.огр**	
11		**122,5**	**≤**	**154**	
12		**165,5**	**≤**	**210**	
13		**100**	**≤**	**100**	
14		**25,5**	**≥**	**4**	
15		**2**	**≥**	**2**	
16		**3**	**≥**	**3**	

Рис. 6.3.

Ответ

Наибольший доход от реализации продукции в размере 6089 $ будет достигнут при производственной программе:

- болты необходимо производить в количестве 25,5 тонн,
- гайки необходимо производить в количестве 2 тонн,
- шайбы необходимо производить в количестве 3 тонн.

Анализ оптимального решения

Для выяснения вопроса о том, можно ли улучшить найденное оптимальное решение и за счет каких ресурсов, используем *отчет по устойчивости*. Активировать отчет можно в диалоговом окне *Результаты поиска решений* (поле *Тип отчета*), которое появляется непосредственно перед выводом окончательных результатов на рабочий лист Excel (рис. 6.4.).

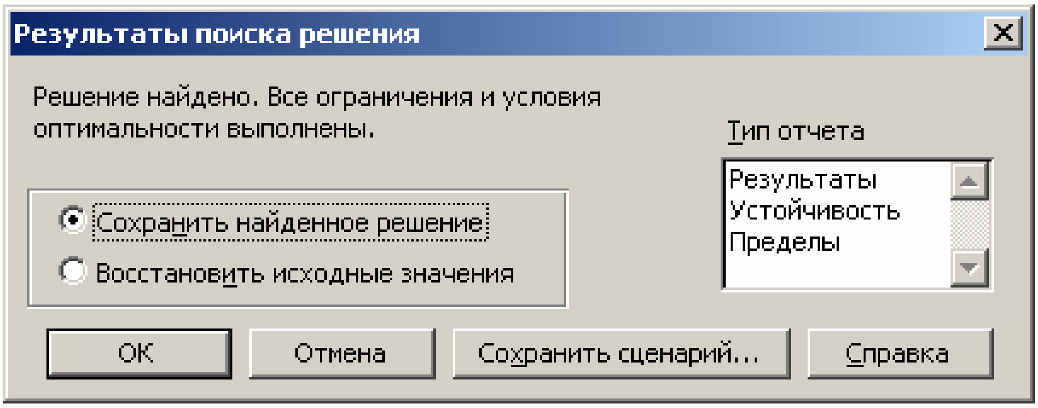

Рис. 6.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Пример 6.1.xls]Лист1							
3	Отчет создан: 02.02.2005 22:00:07							
4								
5	Изменяемые ячейки							
6				Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
7		Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
8		$B$8	Перем. решен. => X1	25,5	0	194	1E+30	146
9		$C$8	Перем. решен. => X2	2	0	175	601	1E+30
10		$D$8	Перем. решен. => X3	3	0	264	803	1E+30
11								
12	Ограничения							
13				Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14		Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение
15		$A$11	Левые части ограничений	122,5	0	154	1E+30	31,5
16		$A$12	Левые части ограничений	165,5	0	210	1E+30	44,5
17		$A$13	Левые части ограничений	100	97	100	17,8	43
18		$A$16	Левые части ограничений	3	-803	3	3,91	2,28
19		$A$15	Левые части ограничений	2	-601	2	5,375	3,42
20		$A$14	Левые части ограничений	25,5	0	4	21,5	1E+30

Рис. 6.5. Отчет по устойчивости

Как следует из отчета по устойчивости – рис. 6.5, наибольшая *теневая цена* (ячейка E17), соответствует ресурсу «электроэнергия» –

	A	B	C	D	E
1		Болты	Гайки	Шайбы	Запасы
2	Сырьё	3	5	12	154
3	Оборудование	5	7	8	210
4	Электроэнергия	2	8	11	*117,8*
5	Доход ($ / тонну)	194	175	264	
6					
7		X1	X2	X3	Z
8	Перем. решен. =>	34,4	2	3	*7815,6*
9					
10	Левые части ограничений		Знак	Пр.ч.огр	
11		149,2	≤	154	
12		210	≤	210	
13		117,8	≤	*117,8*	
14		34,4	≥	4	
15		2	≥	2	
16		3	≥	3	

Рис. 6.6.

она равна 97 $. Это означает, что увеличение (уменьшение) запаса данного ресурса на единицу приводит к росту (снижению) дохода на 97 $. Допустимое увеличение составляет 17,8 единиц (ячейка G17). Выясним, что произойдет, если предприятие найдет возможность увеличить запас ресурса «электроэнергия» со 100 до 117,8 единиц. Для этого внесем изменения в табличную модель (рис. 6.6.). Запустив повторно «Поиск решения» с новым значением правой части соответствующего ограничения (ячейка D13), получаем новую оптимальную производственную программу

$$x_{1\text{опт}} = 34{,}4, \quad x_{2\text{опт}} = 2, \quad x_{3\text{опт}} = 3,$$

при которой суммарный доход составит Zmax =7815,6 $ (ячейка E8).

Вывод

Оптимальное решение может быть улучшено за счет увеличения запаса ресурса «электроэнергия» на 17,8 единиц. При этом месячный доход предприятия увеличится с 6089 $ до 7815,6 $.

6.3. Задача об оптимальном плане загрузки оборудования

Завод при изготовлении двух типов изделий (слябы и заготовка) использует три типа оборудования (печи, кристаллизаторы, прокатные станы) и две технологические схемы – № 1 и № 2 . Выпускать каждое из изделий можно как по технологической схеме № 1, так и по технологической схеме № 2.

Необходимые исходные данные по нормам загрузки оборудования, в пересчете на единицу продукции при различных технологиях, и прибыль от реализации единицы каждого продукта приведены в таблице 6.2 (цифры условные).

Требуется составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль, т.е. установить, какое из изделий и в каком количестве следует производить на каждой технологической линии.

Таблица 6.2.

Оборудование	Продукция				Имеющийся фонд времени по загрузке оборудования
	Слябы		Заготовка		
	Технологические схемы				
	№1	№2	№1	№2	
Печи	2	2	3	0	20
Кристаллизаторы	3	1	1	2	37
Прокатные станы	0	1	1	4	30
Прибыль (тыс. у.е.)	11	6	9	6	

Решение

Обозначим через

x_1 - объем выпуска слябов по технологии №1,

x_2 - объем выпуска слябов по технологии № 2,

x_3 - объем выпуска заготовки по технологии № 1,

x_4 - объем выпуска заготовки по технологии № 2.

Тогда при выбранной программе загрузки x_1, x_2, x_3, x_4 прибыль будет равна

$$Z = 11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 .$$

При этом переменные должны удовлетворять системе ограничений

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20, \\
3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 37, \\
x_2 + x_3 + 4x_4 \le 30.
\end{cases}
$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

На рис. 6.7 – 6.9 показаны табличный вариант оптимизационной модели в Excel, информация, вносимая в надстройку Поиск решения, и найденное оптимальное решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Оборудование	Продукция				Ресурсы		
2		Слябы		Заготовка				
3		Технологические схемы						
4		№1	№2	№1	№2			
5	Печи	2	2	3	0	20		
6	Кристаллизаторы	3	1	1	2	37		
7	Прокатные станы	0	1	1	4	30		
8	Прибыль (тыс. у.е.)	11	6	9	6			
9								
10		X1	X2	X3	X4	z		
11	Перем. решен. =>					=СУММПРОИЗВ(B8:E8;B11:E11)		
12								
13		Лев.ч.огр.	Знак	Пр.ч.огр.				
14	Печи	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;$B$11:$E$11)						
15	Кристаллизаторы	=СУММПРОИЗВ(B6:E6;$B$11:$E$11)						
16	Прокатные станы	=СУММПРОИЗВ(B7:E7;$B$11:$E$11)						

Рис. 6.7.

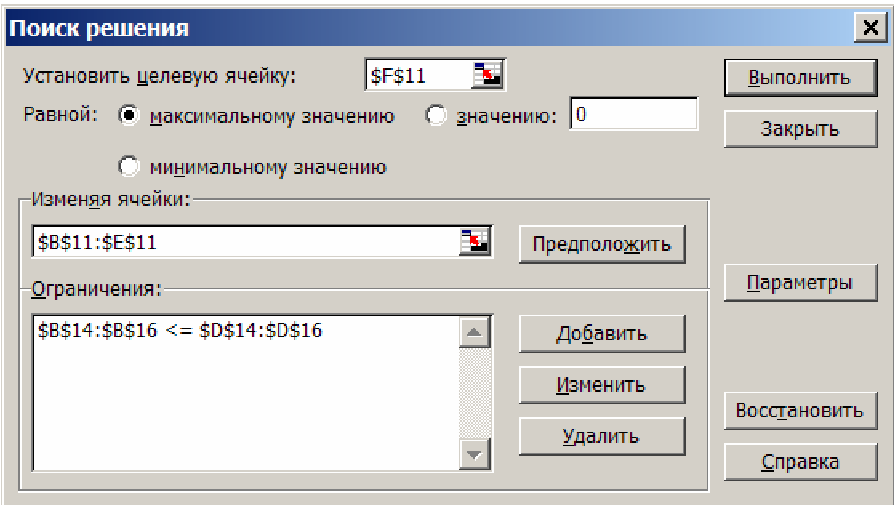

Рис. 6.8.

	A	B	C	D	E	F
2	Оборудование	Слябы		Заготовка		Ресурсы
3		Технологические схемы				
4		№1	№2	№1	№2	
5	Печи	2	2	3	0	20
6	Кристаллизаторы	3	1	1	2	37
7	Прокатные станы	0	1	1	4	30
8	Прибыль (тыс. у.е.)	11	6	9	6	
9						
10		X1	X2	X3	X4	z
11	Перем. решен. =>	7	0	2	7	137
12						
13		Лев.ч.огр.	Знак	Пр.ч.огр.		
14	Печи	20	≤	20		
15	Кристаллизаторы	37	≤	37		
16	Прокатные станы	30	≤	30		

Рис. 6.9.

Ответ

Наибольшая прибыль, равная 137 тыс. у.е., будет достигнута, если

- по технологии № 1 будут выпускаться 7 тыс. тонн слябов и 2 тыс. тонн заготовки;
- по технологии № 2 – 0 тыс. тонн слябов и 7 тыс. тонн заготовки.

6.4. Задача об оптимальном плане аренды складских помещений

Крупная фирма – импортер бытовой электротехники постоянно нуждается в аренде складских помещений. Во втором квартале текущего года, в соответствии с запланированными поставками из-за рубежа, потребности в складских площадях составят в апреле – 30 тысяч квадратных метров, в мае – 40 тысяч квадратных метров, в июне – 25 тысяч квадратных метров. Арендодатель предлагает свои площади, состоящие из блоков по 1000 квадратных метров. Стоимость аренды складских помещений зависит от срока, на который заключается договор. Она составляет 10, 8 и 6 долларов за один квадратный метр в месяц для одно-, двух- и трехмесячных договоров соответственно. Оплата должна производиться в начале каждого месяца, предшествующего соответствующему договору за весь срок аренды.

В соответствии со своими финансовыми возможностями, фирма в предстоящем квартале может выделить на арендные платежи не более 400 тысяч долларов в апреле, 300 тысяч долларов в мае и 200 тысяч долларов в июне.

Требуется:

1) составить план аренды, минимизирующий затраты фирмы по оплате складских площадей;
2) оценить диапазон эффективности решений, сравнив наилучший вариант аренды, обеспечивающий минимальные издержки, с «наихудшим», при котором затраты будут максимальными;
3) выяснить, что произойдет, если снять финансовые ограничения, и сколько удастся сэкономить на аренде в этом случае.

Решение

Обозначим через x_{ij} площадь, включаемую в договор аренды сроком на i месяцев, который заключен в начале j-го месяца. Тогда, например, x_{22} – это площадь, арендуемая по двухмесячному договору, который заключен во 2-ом месяце (мае); x_{13} – это площадь, арендуемая по одномесячному договору аренды, который заключен в 3-ем месяце (июне) и т.д.

Для удобства анализа и формализации задачи оптимизации, а также с учетом введенных переменных, сведем всю имеющуюся информацию в табл. 6.3.

Таблица 6.3.

Тип договора	Апрель	Май	Июнь	Арендная ставка ($/кв.м. в месяц)
1-месячный	x_{11}	x_{12}	x_{13}	10
2-х месячный	x_{21}	x_{22}	-	8
3-х месячный	x_{31}	-	-	6
Потребность в площадях (тыс. кв. м.)	30	40	25	
Финансовые возможности (тыс. долл.)	400	300	200	

Прочерки в таблице означают, что в соответствующем месяце договор не может быть заключен. Например, в начале июня заключать договора аренды сроком на два или на три месяца не имеет смысла, т.к. арендные отношения прекращаются через месяц. В то же время в этот период возможно заключить договор сроком на один месяц.

Следует также иметь в виду, что двухмесячный договор аренды, заключенный в апреле, действует два месяца – в апреле и мае, а заключенный в мае – в мае и в июне. Трехмесячный договор, заключенный в апреле, действует на протяжении всех трех месяцев.

План аренды – это набор значений переменных: x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31},– показывающих, какую площадь (тыс. кв. м.) необходимо арендовать в каждом из месяцев и по каким договорам (с какой продолжительностью).

Подсчитаем суммарные затраты фирмы на аренду, если будет принят план: x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31}. Тогда, с учетом ставок арендной платы, получаем

$$Z = (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \cdot 10 + (x_{21} + x_{22}) \cdot 8 \cdot 2 + x_{31} \cdot 6 \cdot 3$$

Или после несложных преобразований

$$Z = 10 \cdot (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 16 \cdot (x_{21} + x_{22}) + 18 \cdot x_{31}.$$

Размер площадей, арендуемых в апреле, согласно плану, составит $(x_{11} + x_{21} + x_{31})$. Так как эта площадь должна удовлетворить потребности фирмы, то

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30.$$

Суммарная площадь, которая будет в распоряжении фирмы во втором месяце (мае) состоит из

- площади, арендуемой по одномесячному договору, заключенному на май - x_{12};
- площадей, снятых в аренду по двухмесячным договорам, заключенным в апреле и в мае, $(x_{21} + x_{22})$;
- площади, снятой в аренду по трехмесячному договору, заключенному в апреле $-\ x_{31}$.

Ее размер должен удовлетворять потребностям фирмы, следовательно

$$x_{12} + (x_{21} + x_{22}) + x_{31} \geq 40.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что для третьего месяца (июня)

$$x_{13} + x_{22} + x_{31} \geq 25.$$

Выясним теперь, сколько понадобится средств для реализации выбранного плана аренды, и сопоставим их с финансовыми возможностями фирмы.

В первом месяце для оплаты договоров аренды потребуется $x_{11} \cdot 10 + x_{21} \cdot 8 \cdot 2 + x_{31} \cdot 6 \cdot 3 = 10 \cdot x_{11} + 16 \cdot x_{21} + 18 \cdot x_{31}$ тысяч долларов. Эта сумма не должна превышать имеющихся возможностей. Следовательно

$$10 \cdot x_{11} + 16 \cdot x_{21} + 18 \cdot x_{31} \le 400.$$

Для второго и третьего месяцев соответственно получаем

$$10 \cdot x_{12} + 16 \cdot x_{22} \le 300,$$

$$10 \cdot x_{13} \le 200.$$

Объединив полученные результаты, получаем следующую модель линейного программирования

$$Z = 10 \cdot (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 16 \cdot (x_{21} + x_{22}) + 18 \cdot x_{31} \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 30, \\ x_{12} + (x_{21} + x_{22}) + x_{31} \ge 40, \\ x_{13} + x_{22} + x_{31} \ge 25, \\ 10 \cdot x_{11} + 16 \cdot x_{21} + 18 \cdot x_{31} \le 400, \\ 10 \cdot x_{12} + 16 \cdot x_{22} \le 300, \\ 10 \cdot x_{13} \le 200. \end{cases}$$

Кроме того, все переменные должны быть неотрицательными и целочисленными. Условие целочисленности обусловлено тем, что площади сдаются в аренду блоками по 1000 кв.м. Поэтому ни одна из переменных, измеряемая в тыс.кв.м., не может быть нецелым числом равным, например, 3,4 тыс.кв.м. или 7,12 тысячам кв.м.

Задача оптимизации заключается в отыскании такого плана аренды, при котором суммарные затраты фирмы по найму складских помещений будут минимальными, а сам план будет удовлетворять системе ограничений.

На рис. 6.10. показана «заготовка» табличной модели оптимизации в Excel. Управляемые переменные x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31} расположены в ячейках A2:C4.

На рис. 6.11. приведены формулы для вычисления целевой функции и левых частей ограничений.

	A	B	C	D	E
1	**Апрель**	**Май**	**Июнь**	Аренда $/кв.м./месяц	$/кв.м./контракт
2				10	10
3				8	16
4				6	18
5	30	40	25	<=Потребность в площадях	
6	400	300	200	<=Ограничения по средствам	
7					
8		**<=Целевая функция**			
9					
10	**Ограничения по требуемым площадям**				
11		≥	30		
12		≥	40		
13		≥	25		
14	**Ограничения по имеющимся средствам**				
15		≤	400		
16		≤	300		
17		≤	200		

Рис. 6.10.

	A	B	C	D	E
1	Апрель	Май	Июнь	$/кв.м./месяц	$/кв.м.
2				10	10
3				8	16
4				6	18
5	30	40	25		
6	400	300	200		
7					
8	**=СУММ(A2:C2)*D2+СУММ(A3:B3)*D3*2+A4*D4*3**		***<= Целевая функция***		
9					
10	***Ограничения по требуемым площадям***	***Знак***	***Потребность***		
11	**=СУММ(A2:A4)**	≥	**30**		
12	**=СУММ(B2:B3;A3:A4)**	≥	**40**		
13	**=СУММ(C2;B3;A4)**	≥	**25**		
14	***Ограничения по имеющимся средствам***		***Возможности***		
15	**=СУММПРОИЗВ(A2:A4;E2:E4)**	≤	**400**		
16	**=СУММПРОИЗВ(B2:B3;E2:E3)**	≤	**300**		
17	**=СУММПРОИЗВ(C2;E2)**	≤	**200**		

Рис. 6.11.

На рис. 6.13 показано найденное оптимальное решение задачи.

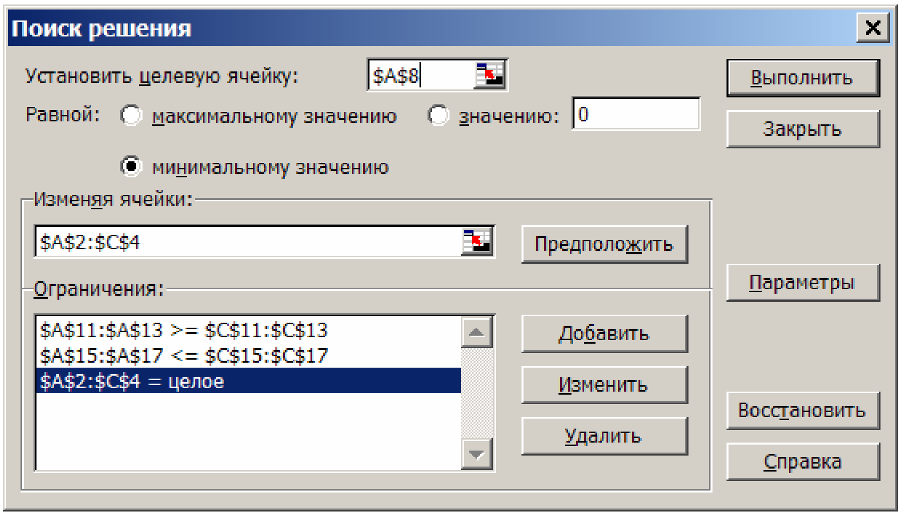

Рис. 6.12.

	A	B	C	D	E
1	Апрель	Май	Июнь	Аренда $/кв.м./месяц	
2	17	22	9	10	10
3	2	5	0	8	16
4	11	0	0	6	18
5	30	40	25	<=Потребность в площадях	
6	400	300	200	<=Ограничения по средствам	
7					
8	790	<=Целевая функция			
9					
10	Ограничения по требуемым площадям				
11	30	≥	30		
12	40	≥	40		
13	25	≥	25		
14	Ограничения по имеющимся средствам				
15	400	≤	400		
16	300	≤	300		
17	90	≤	200		

Рис. 6.13.

Ответы

1) Оптимальный план аренды следующий

В апреле необходимо арендовать

- 17 тысяч квадратных метров по одномесячному договору;
- 2 тысячи квадратных метров по двухмесячному договору;

- 11 тысяч квадратных метров по трехмесячному договору.

В мае следует арендовать
- 22 тысячи квадратных метров по одномесячному договору;
- 5 тысяч квадратных метров по двухмесячному договору.

В июне необходимо заключить один договор
- сроком на 1 месяц на аренду 9 тыс. квадратных метров.

При этом потребности фирмы в складских площадях будут удовлетворены полностью, средств фирмы хватит для оплаты договоров, а суммарные квартальные издержки на аренду будут минимальными и составят 790 тысяч долларов.

2) Оценить эффективность полученного оптимального плана можно, решив задачу на максимум издержек. Для этого в диалоговом окне «Поиска решения» (рис. 6.12.) необходимо поставить флажок «Установить целевую ячейку … Равной «*максимальному значению*». Полученный для этого случая результат показан на рис. 6.14.

	A	B	C	D	E
1	Апрель	Май	Июнь	Аренда $/кв.м./месяц	
2	20	30	20	10	10
3	0	0	0	8	16
4	11	0	0	6	18
5	30	40	25	<=Потребность в площадях	
6	400	300	200	<=Ограничения по средствам	
7					
8	898	<=Целевая функция			
9					
10	Ограничения по требуемым площадям				
11	31	≥	30		
12	41	≥	40		
13	31	≥	25		
14	Ограничения по имеющимся средствам				
15	398	≤	400		
16	300	≤	300		
17	200	≤	200		

Рис. 6.14.

Суммарные издержки для наихудшего из решений составят 898 тысяч долларов. Тогда разница между наихудшим и наилучшим планами составит 898-790=*108 тысяч долларов*. Этот диапазон может служить оценкой «эффективности» оптимального плана аренды.

3) Решение задачи для случая, когда ограничений по средствам, выделяемым фирмой на аренду, нет, показан на рис. 6.15. Как видно оптимальное решение приводит к суммарным издержкам, равным 630 тысячам долларов. Такой план аренды мог бы сэкономить фирме *160 тысяч долларов*.

	A	B	C	D	E
1	**Апрель**	**Май**	**Июнь**	**Аренда $/кв.м./месяц**	
2	0	10	0	10	
3	5	0	0	8	
4	25	0	0	6	
5	30	40	25	<=Потребность в площадях	
6					
7					
8	**630**	<=Целевая функция			
9					
10	Ограничения по требуемым площадям				
11	**30**	**>**	**30**		
12	**40**	**>**	**40**		
13	**25**	**>**	**25**		

Рис. 6.15.

6.5. Задача об оптимальном плане привлечения соинвесторов

Фирма «Инвест-строй» получила пакет разрешительной документации на строительство в предстоящие полтора года трех жилых зданий в различных районах г. Москвы. Площади жилых домов - 8 000, 10 000 и 15 000 квадратных метров.

Для каждого из объектов был разработан поэтапный план строительства с помесячной оценкой требуемых затрат. В затраты были включены производственные издержки (техника, рабочая сила, строительные материалы, работа сторонних организаций) и платежи по погашению ранее взятых кредитов, потраченных на разработку и продвижение разрешительной документации.

Начинать строительство всех домов сразу не представлялось возможным из-за ограниченности ресурсов. После предварительного анализа производственных возможностей было решено запускать первым строительство дома площадью 15 000 квадратных метров, через три месяца – дом площадью 10 000 квадратных метров и еще спустя 6 месяцев – дом площадью 8000 квадратных метров.

Так как строящееся жилье можно продавать сразу после получения разрешительной документации, т.е. за месяц до начала строительства, то фирма рассчитывает, что *необходимые средства она сможет получить за счет привлечения соинвесторов и продажи им квартир на ранних стадиях строительства по льготным ценам*.

Плановые затраты приведены в табл. 6.4, где также показано, по какой цене за 1 квадратный метр могут быть проданы квартиры в различные периоды строительства.

Таблица 6.4.

Месяц	Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.
1	0	1000				
2	189 000	1050				
3	283 500	1050				
4	378 000	1100	0	1100		
5	567 000	1150	272 160	1100		
6	1 512 000	1180	408 240	1250		
7	1 417 500	1200	544 320	1300		
8	1 417 500	1200	1 496 880	1359		
9	1 417 500	1250	1 496 880	1400		
10	1 134 000	1300	1 496 880	1450	0	800
11	1 134 000	1500	1 496 880	1500	239 400	850
12			1 496 880	1550	538 650	900
13			1 360 800	1600	957 600	950
14			1 360 800	1650	957 600	1000
15			1 088 640	1750	897 750	1050
16			1 088 640	1900	897 750	1100
17					778 050	1150
18					718 200	1200

По мере готовности домов стоимость одного квадратного метра жилья, естественно, возрастает. В связи с этим руководство фирмы поставило задачу составить такой план-график продаж, который с одной стороны, обеспечил бы покрытие плановых затрат, а с другой стороны позволил получить максимальную прибыль.

Требуется:

1) составить оптимальный план продажи квартир, максимизирующий общую прибыль от реализации жилой площади всех домов;
2) определить размер прибыли, полученной при реализации оптимального плана;
3) выяснить, как изменится оптимальный план и суммарная прибыль, если предположить, что в первый месяц строительства любого из домов удастся продать не более 5% квартир, во второй – не более 10 %, в третий – не более 15 %, а далее можно продавать любое количество площадей.

Решение

Табличное представление задачи в Excel показано на рис. 6.16., где через x_i (i=1, 2, … , 33) обозначены площади продаваемых квартир. Если цены за 1 кв.м. квартир, продаваемых в соответствующем периоде для соответствующего дома, обозначить через c_i (i=1, 2, … , 33), то суммарный доход от продаж за весь период составит

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_{33}x_{33} = \sum_{i=1}^{33} c_ix_i$$

или

$$Z = 1000 \cdot x_1 + 1050 \cdot x_2 + \ldots + 1400 \cdot x_{17} + ... + 1200 \cdot x_{33} \qquad (6.7)$$

Очевидно, что Z является целевой функцией задачи оптимизации. Поскольку суммарные площади продаваемых квартир не должны превышать реально имеющейся площади, то получаем первые три ограничения (условия баланса)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{11} = 15000, \\ x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{24} = 10000, \\ x_{25} + x_{26} + \ldots + x_{33} = 8000. \end{cases} \qquad (6.8)$$

Так как в соответствии с поставленной руководством задачей доход, получаемый в данном месяце, должен покрывать затраты следующего, то в математической записи это должно означать выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} 1000 \cdot x_1 \geq 189000, \\ 1050 \cdot x_2 \geq 283500, \\ 1050 \cdot x_3 \geq 378000, \\ 1100 \cdot x_4 + 1100 \cdot x_{12} \geq 567000 + 272160, \\ \vdots \\ 1300 \cdot x_{10} + 1450 \cdot x_{18} + 800 \cdot x_{25} \geq 1134000 + 1496880 + 23940, \\ \vdots \\ 1150 \cdot x_{32} \geq 718200. \end{cases} \tag{6.9}$$

Также как и в других моделях оптимизации, переменные неотрицательны

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{33} \geq 0. \tag{6.10}$$

Таким образом, задача сведена к классической модели линейного программирования – *необходимо найти такой план продаж квартир* $x_1, x_2, \ldots, x_{33}$, *который максимизирует доход – целевую функцию (6.7), удовлетворяет системе ограничений (6.8) – (6.9) и условиям неотрицательности (6.10).*

Решение задачи в Excel показано на рис. 6.16 - 6.21.

Ответы

1) Оптимальный план продажи квартир, максимизирующий общую прибыль от реализации жилой площади всех домов, показан на рис. 6.21.

2) Размер прибыли, полученной при реализации оптимального плана, составит 8 098 280 долларов.

3) В случае, если в первый месяц строительства каждого из домов будет продаваться не более 5% квартир, во второй – не более 10 %, в третий – не более 15 %, а далее любое количество, то оптимальный план будет таким, как показано на рис. 6.22. При этом размер прибыли уменьшится и составит 7 922 206 долларов.

Выясните самостоятельно, как изменится план продаж, если руководство дополнительно потребует обеспечить покрытие предстоящих расходов с превышением на 10 % для создания «запаса прочности» на случай непредвиденных обстоятельств.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Объект 1				Объект 2				Объект 3			
2		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi	
3	1	0	1000		X1								
4	2	189 000	1050		X2								
5	3	283 500	1050		X3								
6	4	378 000	1100		X4	0	1100		X12				
7	5	567 000	1150		X5	272 160	1100		X13				
8	6	1 512 000	1180		X6	408 240	1250		X14				
9	7	1 417 500	1200		X7	544 320	1300		X15				
10	8	1 417 500	1200		X8	1 496 880	1359		X16				
11	9	1 417 500	1250		X9	1 496 880	1400		X17				
12	10	1 134 000	1300		X10	1 496 880	1450		X18	0	800		X25
13	11	1 134 000	1500		X11	1 496 880	1500		X19	239 400	850		X26
14	12					1 496 880	1550		X20	538 650	900		X27
15	13					1 360 800	1600		X21	957 600	950		X28
16	14					1 360 800	1650		X22	957 600	1000		X29
17	15					1 088 640	1750		X23	897 750	1050		X30
18	16					1 088 640	1900		X24	897 750	1100		X31
19	17									778 050	1150		X32
20	18									718 200	1200		X33
21		Общая площадь		15 000		Общая площадь		10 000		Общая площадь		8 000	
22													
23		Целевая функция				Плановые затраты				Прибыль			
24		0				29 043 000				-29 043 000			
25													
26		Ограничения											
27		Лев.ч	Знак	Пр.ч.									
28		0	=	15 000									
29		0	=	10 000		Условия баланса (проданная площадь = проектной)							
30		0	=	8 000									
31	1	0	≥	189 000									
32	2	0	≥	283 500		Условия покрытия затрат будущего месяца							
33	3	0	≥	378 000		за счет продаж площади в текущем месяце							

Рис. 6.16.

	A	B	C	D	E
26			Ограничения		
27		Лев.ч	Знак	Прав.ч.	
28		=СУММ(D3:D13)	=	=D21	
29		=СУММ(H6:H18)	=	=H21	Условия баланса
30		=СУММ(L12:L20)	=	=L21	проданная площадь = проектной
31	1	=C3*D3+G3*H3+K3*L3	≥	=(B4+F4+J4)	
32	2	=C4*D4+G4*H4+K4*L4	≥	=(B5+F5+J5)	
33	3	=C5*D5+G5*H5+K5*L5	≥	=(B6+F6+J6)	
34	4	=C6*D6+G6*H6+K6*L6	≥	=(B7+F7+J7)	
35	5	=C7*D7+G7*H7+K7*L7	≥	=(B8+F8+J8)	
36	6	=C8*D8+G8*H8+K8*L8	≥	=(B9+F9+J9)	
37	7	=C9*D9+G9*H9+K9*L9	≥	=(B10+F10+J10)	
38	8	=C10*D10+G10*H10+K10*L10	≥	=(B11+F11+J11)	Условия покрытия затрат
39	9	=C11*D11+G11*H11+K11*L11	≥	=(B12+F12+J12)	будущего месяца
40	10	=C12*D12+G12*H12+K12*L12	≥	=(B13+F13+J13)	за счет продаж площади в текущем
41	11	=C13*D13+G13*H13+K13*L13	≥	=(B14+F14+J14)	
42	12	=C14*D14+G14*H14+K14*L14	≥	=(B15+F15+J15)	
43	13	=C15*D15+G15*H15+K15*L15	≥	=(B16+F16+J16)	
44	14	=C16*D16+G16*H16+K16*L16	≥	=(B17+F17+J17)	
45	15	=C17*D17+G17*H17+K17*L17	≥	=(B18+F18+J18)	
46	17	=C18*D18+G18*H18+K18*L18	≥	=(B19+F19+J19)	
47	18	=C19*D19+G19*H19+K19*L19	≥	=(B20+F20+J20)	

Рис. 6.17

	A	B
22		
23		**Целевая функция**
24		=СУММПРОИЗВ(C3:C13;D3:D13)+СУММПРОИЗВ(G6:G18;H6:H18)+СУММПРОИЗВ(L12:L20;M12:M20)

Рис. 6.18

	D	F	G	J
22				
23		**Плановые затраты**		**Прибыль**
24		=СУММ(B3:B13;F6:F18;J12:J20)		=B24-F24

Рис. 6.19

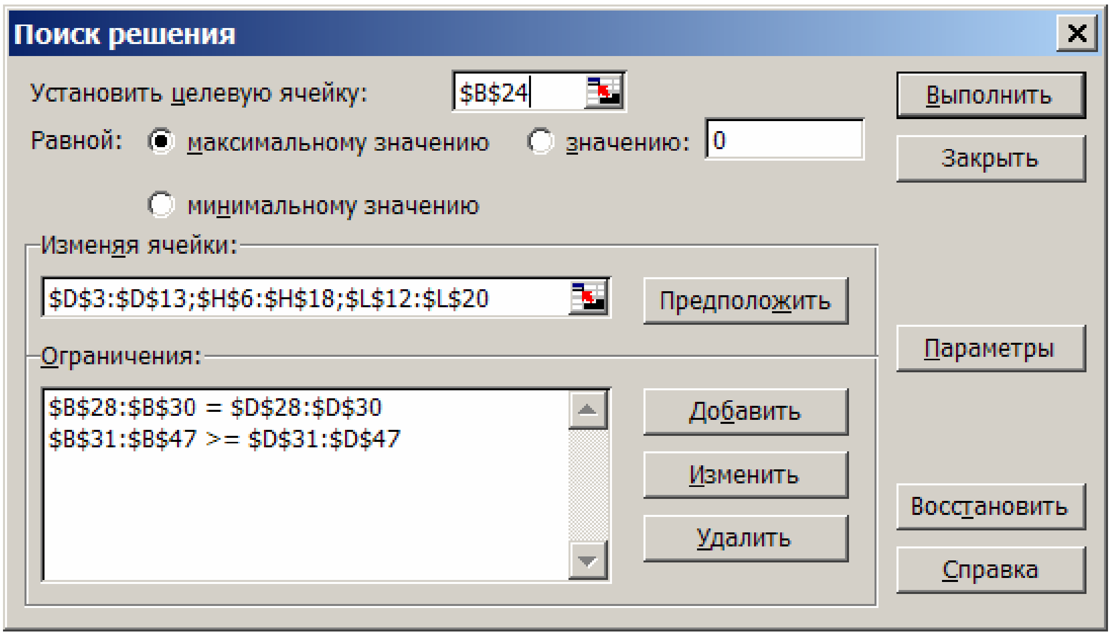

Рис. 6.20

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Объект 1				Объект 2				Объект 3			
2		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi	
3	1	0	1000	189,00	X1								
4	2	189 000	1050	270,00	X2								
5	3	283 500	1050	360,00	X3								
6	4	378 000	1100	762,87	X4	0	1100	0	X12				
7	5	567 000	1150	1 669,77	X5	272 160	1100	0	X13				
8	6	1 512 000	1180	1 662,56	X6	408 240	1250	0	X14				
9	7	1 417 500	1200	2 428,65	X7	544 320	1300	0	X15				
10	8	1 417 500	1200	2 428,65	X8	1 496 880	1359	0	X16				
11	9	1 417 500	1250	2 104,70	X9	1 496 880	1400	0	X17				
12	10	1 134 000	1300	1 766,77	X10	1 496 880	1450	0	X18	0	800	716,8	X25
13	11	1 134 000	1500	1 357,02	X11	1 496 880	1500	0	X19	239 400	850	0	X26
14	12					1 496 880	1550	0	X20	538 650	900	2576	X27
15	13					1 360 800	1600	0	X21	957 600	950	2440	X28
16	14					1 360 800	1650	208,59	X22	957 600	1000	1642	X29
17	15					1 088 640	1750	1135,1	X23	897 750	1050	0	X30
18	16					1 088 640	1900	8656,3	X24	897 750	1100	0	X31
19	17									778 050	1150	624,5	X32
20	18									718 200	1200	0	X33
21		Общая площадь		15 000		Общая площадь		10 000		Общая площадь		8 000	
22													
23		Целевая функция				Плановые затраты				Прибыль			
24		37 141 280				29 043 000				8 098 280			

Рис. 6.21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Объект 1				Объект 2				Объект 3			
2		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi		Плановые затраты, $	Цена, $/кв.м.	Xi	
3	1	0	1000	189,00	X1								
4	2	189 000	1050	270,00	X2								
5	3	283 500	1050	360,00	X3								
6	4	378 000	1100	762,87	X4	0	1100	0	X12				
7	5	567 000	1150	1 669,77	X5	272 160	1100	0	X13				
8	6	1 512 000	1180	1 662,56	X6	408 240	1250	0	X14				
9	7	1 417 500	1200	2 428,65	X7	544 320	1300	0	X15				
10	8	1 417 500	1200	2 428,65	X8	1 496 880	1359	0	X16				
11	9	1 417 500	1250	2 104,70	X9	1 496 880	1400	0	X17				
12	10	1 134 000	1300	1 961,75	X10	1 496 880	1450	0	X18	0	800	400	X25
13	11	1 134 000	1500	1 162,04	X11	1 496 880	1500	0	X19	239 400	850	344,1	X26
14	12					1 496 880	1550	798,97	X20	538 650	900	1200	X27
15	13					1 360 800	1600	0	X21	957 600	950	2440	X28
16	14					1 360 800	1650	0	X22	957 600	1000	1986	X29
17	15					1 088 640	1750	532,33	X23	897 750	1050	1005	X30
18	16					1 088 640	1900	8668,7	X24	897 750	1100	0	X31
19	17									778 050	1150	624,5	X32
20	18									718 200	1200	0	X33
21		Общая площадь		15 000		Общая площадь		10 000		Общая площадь		8 000	
22													
23		Целевая функция				Плановые затраты				Прибыль			
24		36 965 206				29 043 000				7 922 206			

Рис. 6.22