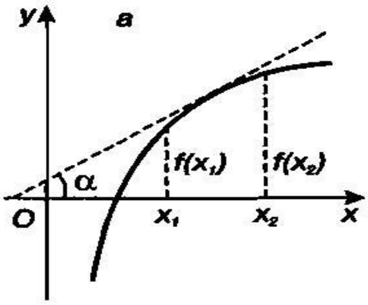
Тема 6. Применение производной к исследованию функций

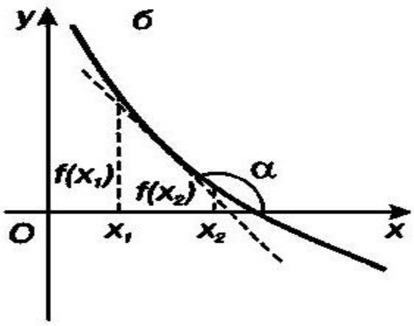
Промежутки возрастания и убывания функции

- *Функция называется **возрастающей** на данном промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.*



$f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$

- *Функция называется **убывающей** на данном промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.*



$f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$

Признак возрастания: *Если функция определена, дифференцируема и возрастает на некотором промежутке, то ее производная положительна в каждой точке этого промежутка.*

$$f'(x)>0$$

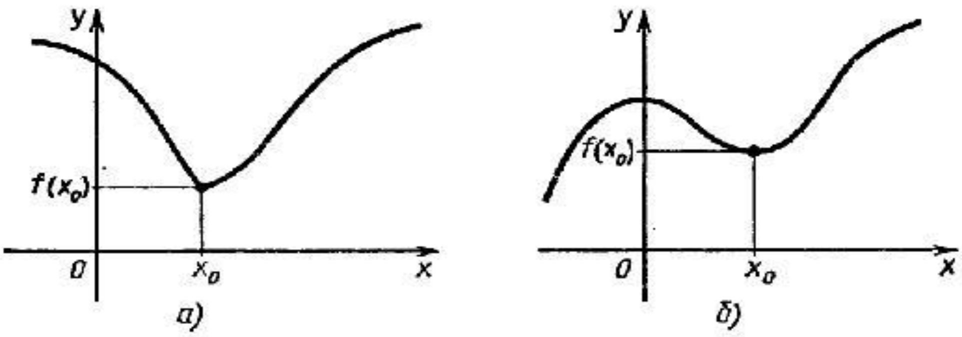
Признак убывания: *Если функция определена, дифференцируема и убывает на некотором промежутке, то ее производная отрицательна в каждой точке этого промежутка.*

$$f'(x)<0$$

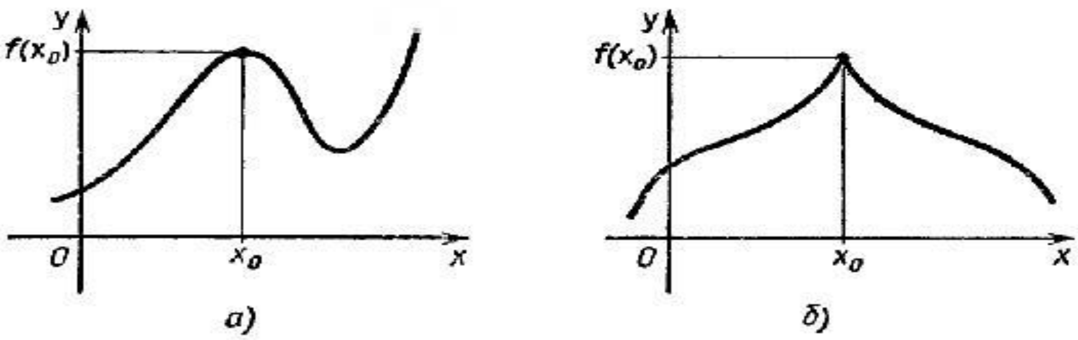
- *Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются* ***критическими точками.***

Экстремумы функции

- *Точка x_0 из области определения функции называется* ***точкой минимума****, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие* $\boldsymbol{f(x_0)<f(x)}$.



- *Точка x_0 из области определения функции называется* ***точкой максимума****, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие* $\boldsymbol{f(x_0)>f(x)}$.



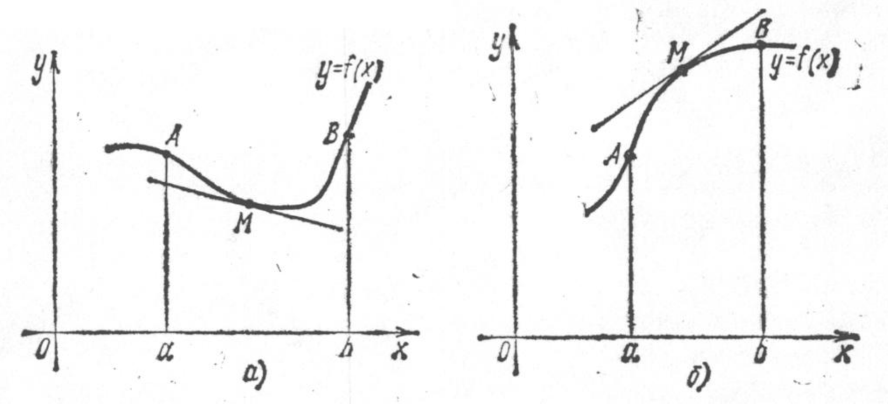
Признаки максимума и минимума функции:

Если $f'(x_0)=0$ и при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$меняет знак с + на -, то в точке $\boldsymbol{x_0}$ ***- максимум;***

если же производная $f'(x)$меняет знак с – на +, то в точке $\boldsymbol{x_0}$ ***- минимум.***

Промежутки выпуклости графика. Точки перегиба.

- *График функции называется **выпуклым вниз**, если он расположен выше касательной, проведенной к графику функции (рис. а); в противном случае график функции называется **выпуклым вверх** (рис.б).*



Признак выпуклости вверх: *Если функция определена, дифференцируема и выпукла вверх на некотором промежутке, то ее вторая производная отрицательна в каждой точке этого промежутка.*

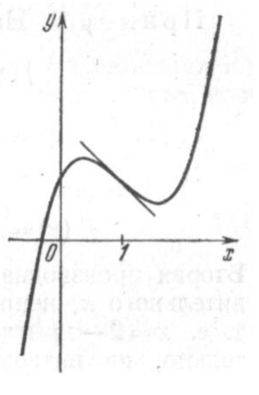
$$f''(x)<0$$

Признак выпуклости вниз: *Если функция определена, дифференцируема и выпукла вниз на некотором промежутке, то ее вторая производная положительна в каждой точке этого промежутка.*

$$f''(x)>0$$

- *Точки, в которых вторая производная равна нулю или не определена, называются **критическими точками II рода.***

- *Точки, в которых график функции меняет направление выпуклости, называются **точками перегиба.***



Признак точки перегиба: *Если в точке x_0 вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв, и при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба (x_0; $f(x_0)$).*

План исследования функции:

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность.
3. Найдите первую производную и критические точки.
4. Определите промежутки монотонности и найдите точки экстремума.
5. Найдите вторую производную и критические точки.
6. Определите направления выпуклости графика функции и найдите точки перегиба.
7. Найдите асимптоты графика.
8. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
9. Постройте график.

Пример 1: *Исследуйте функцию* $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ *и постройте график.*

1. $D(y) = R$

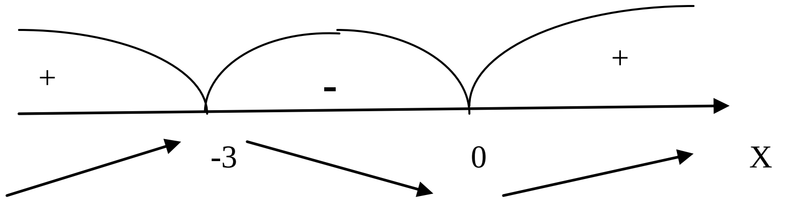
2. $y(-x) = (-x)^3 + \frac{9}{2}(-x)^2 = -x^3 + \frac{9}{2}x^2$, т.к. *y(-x)≠y(x)* и *y(-x)≠-y(x),* значит функция общего вида.

3. $y' = 3x^2 + 9x$

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$3x(x+3) = 0$$ => *x=0 или x=-3*

4.



Функция убывает [-3;0], функция возрастает (-∞;-3] и[0;∞).

$x_{max}=-3$, $x_{min}=0$

$y_{max}=y(-3)=13{,}5$ $y_{min}=y(0)=0$

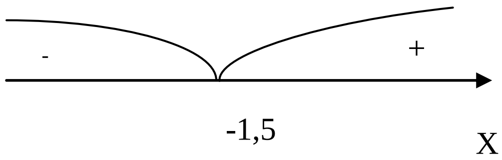
max(-3;13,5) min(0;0)

5. $y''=6x+9$

6x+9=0

$$x=-\frac{9}{6}=-1{,}5$$

6.



Функция выпукла вверх (-∞;-1,5], функция выпукла вниз [-1,5;∞).

x=-1,5 – точка перегиба.y(-1,5)=6,75

(-1,5; 6,75)- точка перегиба.

7. Найдем точки пересечения графика с осью X: y=0

$$x^3+\frac{9}{2}x^2=0$$

$$x^2\left(x+\frac{9}{2}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4{,}5\end{array}\right.$$

(0;0) и (-4,5; 0) точки пересечения с осью X.

Найдем точку пересечения с осью Y: x=0 , тогда y(0)=0. Значит (0;0) – точка пересечения с осьюY.

8. Асимптоты.

Точек разрыва нет, значит, нет вертикальных асимптот.

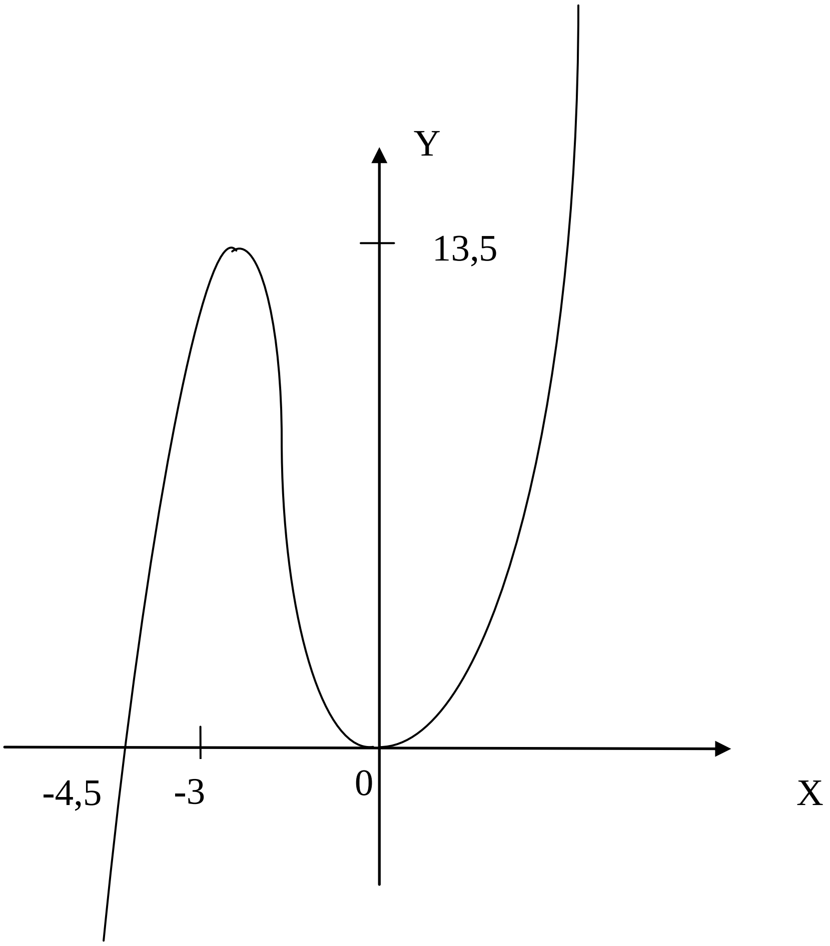
$y=b$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+\frac{9}{2}x^2)=\infty$, значит горизонтальной асимптоты нет.

$y=kx+b$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^3+\frac{9}{2}x^2):x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+\frac{9}{2}x\right)=\infty$, значит наклонной асимптоты нет.

9.



Пример 2: *Исследуйте функцию и постройте график функции* $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$**.**

1. $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; $D(f)$ симметричная относительно 0.

2. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$ график симметричен относительно начала координат.

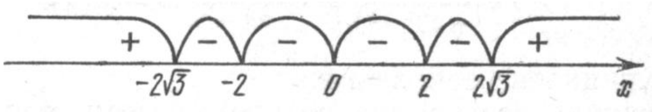
3. $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $D(f')=R\setminus\{-2;2\}$

Критические точки I рода: $f'(x)=0$, $x^2(x^2-12)=0$

$$x=0,\quad x=-2\sqrt{3},\quad x=2\sqrt{3}$$

x=2 и *x=-2* также являются критическими точками, т.к. $f'(x)$ не осуществляет в этих точках, но эти точки не входят в область определения функции, поэтому должны быть исключены из рассмотрения.

3.



$x_{\max}=-2\sqrt{3}$ $\qquad y_{\max}=-3\sqrt{3}$

$x_{\min}=2\sqrt{3}$ $\qquad y_{\min}=3\sqrt{3}$

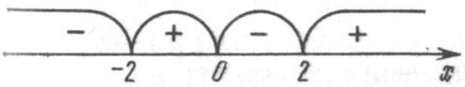
Функция возрастает $(-\infty;\ -2\sqrt{3}]$ и $[2\sqrt{3};\ \infty)$, убывает $[-2\sqrt{3};\ -2)\cup(-2;0]\cup[0;2)\cup(2;2\sqrt{3}]$.

5. $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. Критические точки II рода: $f''(x)=0$

$8x(x^2+12)=0$, *x=o.*

x=2 и *x=-2* также являются критическими точками, т.к. $f''(x)$ не осуществляет в этих точках.

6.



Функция выпукла вверх $(-\infty;\ -2)\cup[0;2)$, выпукла вниз $(-2;0]\cup(2;+\infty)$,

$f(0)=0$ *(0; 0)* – точка перегиба.

7. Асимптоты графика:

а). $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$ *и* $\lim\limits_{x \to -2 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$ значит, *x=-2* и *x=2* – вертикальные асимптоты.

б)..

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = 0$$

Значит, $y=x$ – наклонная асимптота.