

А. В. Петров, А. Б. Сергиенко

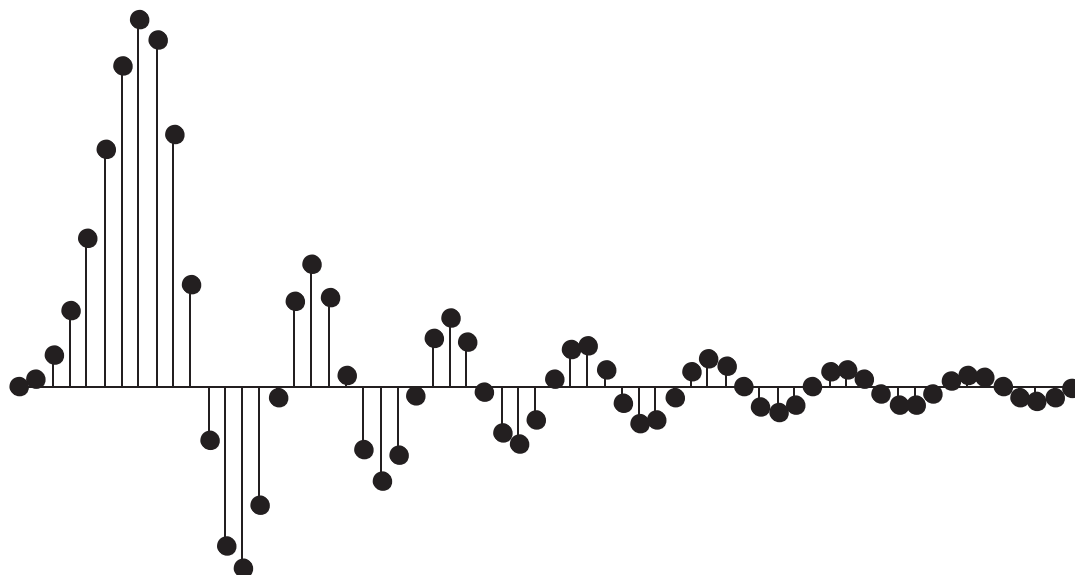
---

---

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

---

---



Санкт-Петербург

2018

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

---

А. В. ПЕТРОВ    А. Б. СЕРГИЕНКО

## **ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ**

Лабораторный практикум

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2018

УДК 621.391

ББК 32.811.3

ПЗ0

**Петров А. В., Сергиенко А. Б.**

ПЗ0 Цифровая обработка сигналов: лабораторный практикум. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 78 с.

ISBN 978-5-7629-2342-2

Представлено описание пяти компьютерных лабораторных работ, выполняемых при изучении курса «Цифровая обработка сигналов» в системе MATLAB с использованием специализированного пакета расширения Signal Processing Toolbox.

Предназначено для студентов факультета радиотехники и телекоммуникаций, обучающихся по программам подготовки бакалавров по направлению 11.03.01 «Радиотехника», а также по программе подготовки специалистов по специальности 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы».

УДК 621.391

ББК 32.811.3

Рецензенты: кафедра радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича; канд. техн. наук В. М. Москалев (Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета

в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2342-2

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018

# 1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

## 1.1. Цели работы

- Знакомство со средой MATLAB.
- Формирование и построение графика кусочно-линейного дискретного сигнала.
- Расчет и построение графика спектра дискретного сигнала.
- Расчет и построение графика аналогового сигнала, восстановленного по дискретным отсчетам в соответствии с теоремой Котельникова.

## 1.2. Теоретические сведения

**Дискретизация аналогового сигнала.** Исходный физический сигнал (напряжение, ток и т. д.) является непрерывной функцией времени  $s(t)$ . Такие сигналы, определенные во все моменты времени, называют *аналоговыми* (рис. 1.1, *а*). Последовательность чисел  $\{x(k)\}$ , представляющая сигнал при цифровой обработке, является дискретным рядом и не может полностью соответствовать аналоговому сигналу (рис. 1.1, *б*).

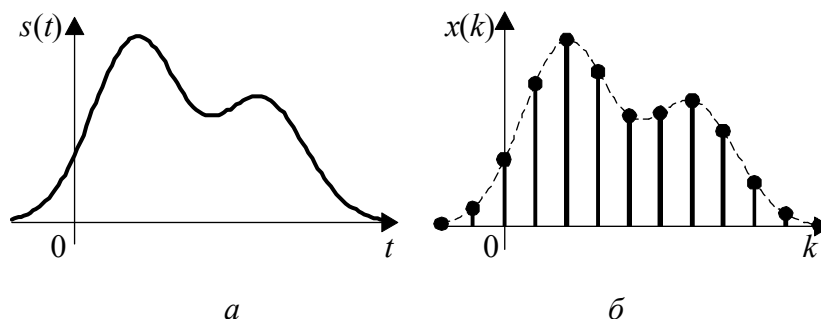


Рис. 1.1. Аналоговый (*а*) и дискретный (*б*) сигналы

Числа, составляющие последовательность  $\{x(k)\}$ , являются значениями сигнала в отдельные (дискретные) моменты времени и называются *отсчетами* сигнала  $x(k)$ . Как правило, отсчеты берутся через равные промежутки времени  $T$ , называемые *периодом дискретизации* (или интервалом, шагом дискретизации):

$$x(k) = s(kT). \quad (1.1)$$

Величина, обратная периоду дискретизации, называется *частотой дискретизации*:  $F_d = 1/T$ . Соответствующая ей *круговая частота* определяется следующим образом:  $\omega_d = 2\pi/T$ .

В общем случае представление сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как мы ничего не знаем о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Однако существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть точно восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов.

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией*, а результат такого преобразования — *дискретным сигналом*.

**Спектр дискретного сигнала.** Преобразование Фурье (ПФ) позволяет вычислить спектральную плотность сигнала, представляющего собой непрерывную функцию времени:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.2)$$

ПФ — это взаимная корреляционная функция (ВКФ) при нулевом сдвиге между сигналом и комплексными гармоническими колебаниями с разными частотами. Поэтому спектр дискретного сигнала рассчитывается аналогичным образом через ВКФ в дискретном времени:

$$\dot{X}(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\tilde{\omega}k}, \quad (1.3)$$

где  $\tilde{\omega}$  — нормированная частота. Она равна изменению фазы между соседними отсчетами гармонического сигнала и измеряется в радианах на отсчет.

Из этой формулы видно главное свойство спектра любого дискретного сигнала: спектр является периодическим, его период равен  $2\pi$  рад/отсчет (это значение соответствует нормированной частоте дискретизации:  $\tilde{\omega}_д = 2\pi$  рад/отсчет):

$$\dot{X}(\tilde{\omega} \pm 2\pi) = \dot{X}(\tilde{\omega}).$$

Следует также обратить внимание на размерность спектральной функции дискретного сигнала: она совпадает с размерностью отсчетов.

Установим связь между спектром дискретного сигнала и спектром аналогового сигнала. Пусть значения  $x(k)$  являются отсчетами аналогового сигнала  $s(t)$ , взятыми с периодом  $T$  (1.1). В этом случае спектр дискретного сигнала (см. (1.3)) связан со спектром аналогового сигнала (1.2) следующим образом:

$$\dot{X}_d(\tilde{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\frac{\tilde{\omega} - 2\pi n}{T}\right). \quad (1.4)$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного непрерывного сигнала  $s(t)$  (на рис. 1.2 изображен модуль спектра дискретного сигнала). Расстояние по частоте между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации  $\omega_d = 2\pi/T$ .

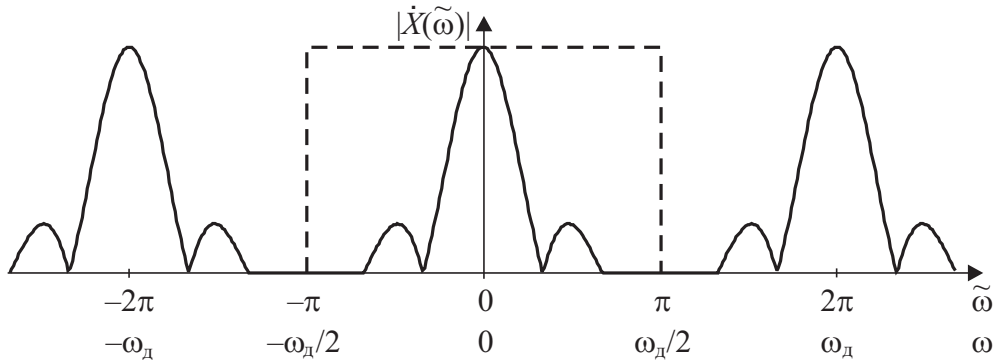


Рис. 1.2. Модуль спектра дискретного сигнала

Характер спектра дискретного сигнала демонстрирует частотно-временную дуальность преобразования Фурье:

- периодический сигнал  $\rightarrow$  дискретный спектр (ряд Фурье);
- периодический спектр  $\rightarrow$  дискретный сигнал.

Формула (1.3) позволяет рассчитать спектр последовательности отсчетов  $\{x(k)\}$ , никак не связывая эти отсчеты с аналоговым сигналом. Формула (1.4) предполагает, что отсчеты  $\{x(k)\}$  получены путем дискретизации аналогового сигнала  $s(t)$ , и показывает связь между спектрами дискретного и аналогового сигналов. Следует подчеркнуть, что эти 2 формулы дают одинаковый результат.

Отсюда следует еще один важный факт. Соединить отсчеты  $\{x(k)\}$  для получения аналогового сигнала можно произвольным образом. В каждом случае аналоговый сигнал будет, разумеется, иметь свой спектр. Однако результат суммирования сдвинутых копий спектров по формуле (1.4) всегда будет одним и тем же, поскольку определяется только значениями дискретных отсчетов  $\{x(k)\} = \{s(kT)\}$  и формулой (1.3).

Формула обратного преобразования Фурье в дискретном времени аналогична формуле вычисления коэффициентов комплексного ряда Фурье:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{X}(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}.$$

**Свойства преобразования Фурье в дискретном времени.** Под свойствами ПФ подразумевается взаимное соответствие трансформаций сигналов и их спектров. Ниже перечислены основные свойства ПФ в дискретном времени.

**Линейность.** ПФ в дискретном времени, согласно определению (1.3), является линейной комбинацией отсчетов последовательности, поэтому оно подчиняется принципу суперпозиции:

$$y(k) = ax_1(k) + bx_2(k) \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = a\dot{X}_1(\tilde{\omega}) + b\dot{X}_2(\tilde{\omega}).$$

**Задержка.** При задержке сигнала на  $\Delta k$  отсчетов амплитудный спектр не меняется, а фазовый спектр приобретает дополнительное слагаемое  $-j\tilde{\omega}\Delta k$ , линейно зависящее от частоты:

$$y(k) = x(k - \Delta k) \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}(\tilde{\omega}) e^{-j\tilde{\omega}\Delta k}.$$

**Свертка.** Линейной свертке дискретных последовательностей соответствует произведение их спектров:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(k-n) \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}_1(\tilde{\omega})\dot{X}_2(\tilde{\omega}).$$

**Чередование знаков сигнала.** Изменение знаков у элементов исходной последовательности с нечетными номерами приводит к сдвигу спектра сигнала по частоте на  $\pi$  рад/отсчет:

$$y(k) = x(k) \cdot (-1)^{-k} \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}(\tilde{\omega} + \pi).$$

**Инвертирование последовательности во времени.** Инверсия последовательности отсчетов во времени соответствует инверсии спектра по частоте:

$$y(k) = x(-k) \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}(-\tilde{\omega}).$$

**Вставка нулей.** Вставка  $N-1$  нулей между соседними элементами исходной последовательности приводит к сужению спектра сигнала в  $N$  раз:

$$y(k) = \begin{cases} x(k/N), & k = Nm, \\ 0, & k \neq Nm, \end{cases} \text{ где } m \text{ — любое целое число, } \leftrightarrow \dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}(N\tilde{\omega}).$$

**Восстановление аналогового сигнала по теореме Котельникова.** Рисунок 1.2 наглядно демонстрирует и способ восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам. Для этого необходимо пропустить дис-

кретный сигнал через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза, равной половине частоты дискретизации. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) такого фильтра показана на рис. 1.2 штриховой линией, а импульсная характеристика (ИХ) имеет форму  $\sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$ . Выходной сигнал (если сдвинутые копии спектра на рис. 1.2 не перекрываются, он будет в точности совпадать с исходным аналоговым сигналом), таким образом, будет представлять собой сумму сдвинутых и умноженных на отсчеты сигнала копий ИХ идеального ФНЧ:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}}. \quad (1.5)$$

Подводя итог сказанному, сформулируем *теорему Котельникова*: любой сигнал  $s(t)$ , спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения  $\omega_B = 2\pi f_B$ , может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами  $\{s(kT)\}$ , взятыми с интервалом  $T$ , удовлетворяющим следующему неравенству:

$$T < \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{\omega_B}.$$

Восстановление исходного непрерывного сигнала  $s(t)$  по набору его дискретных отсчетов  $\{s(kT)\}$  производится по формуле (1.5).

### 1.3. Индивидуальное задание

В данной лабораторной работе рассматривается кусочно-линейный сигнал  $s(t)$ , заданный параметрами  $U_k, T_k, k = 1 \dots 4$ , как показано на рис. 1.3.

При выполнении работы производится дискретизация данного сигнала с заданной частотой  $F_D$ .

Параметры сигнала и используемая частота дискретизации являются индивидуальными для каждой бригады и выдаются преподавателем в виде табл. 1.1.

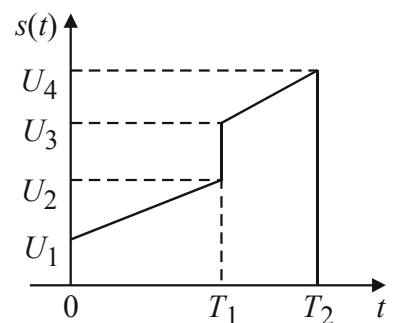



Рис. 1.3. Кусочно-линейный сигнал, исследуемый в работе



Таблица 1.1

$U_1, В$	$U_2, В$	$U_3, В$	$U_4, В$	$T_1, мс$	$T_2, мс$	$F_d, кГц$

#### 1.4. Указания к выполнению работы

**1. Запуск MATLAB и знакомство с его средой.** Запустите программу MATLAB (ее значок на рабочем столе имеет вид ). Откроется окно MATLAB.

MATLAB — интерпретируемый язык программирования, позволяющий осуществлять вычисления как в интерактивном режиме, так и путем запуска программ (*сценариев*, *scripts*). Работа в интерактивном режиме сводится к набору в командной строке MATLAB необходимых команд (выполнение команды производится после нажатия клавиши **Enter**), например:

```
>> A = sqrt(cos(pi/12)^2 + 1)
A =
    1.3903
```

В результате выполнения данной команды будет создана переменная **A** со значением, равным  $\sqrt{\cos^2(\pi/12) + 1}$ .

- Создайте переменные для всех параметров сигнала ( $U_1 \dots U_4, T_1, T_2$ ) и частоты дискретизации  $F_d$ .

##### Справка

Все созданные и хранящиеся на данный момент в памяти переменные отображаются в рабочей области **Workspace**.

**2. Формирование дискретного сигнала.** MATLAB ориентирован на работу с векторами и матрицами. Используйте эти возможности для создания *вектора отсчетов* заданного сигнала:  $x(k) = u(kT)$ , где  $T = 1/F_d$  — интервал дискретизации.

- Сформируйте вектор моментов времени взятия отсчетов.

##### Справка

Для создания векторов в виде арифметических прогрессий используется символ двоеточия. Конструкция **x1 : dx : x2** означает создание равномерной последовательности чисел с первым элементом **x1**, шагом **dx** и конечным значением, равным **x2** или меньше его не более чем на **dx**. Если шаг последовательности равен единице, **dx** можно не указывать: **x1 : x2**.

- Рассчитайте значения отсчетов первого линейного фрагмента сигнала ( $u(t) = a_1 t + b_1$  при  $t = 0 \dots T_1$ ). Значения параметров  $a_1$  и  $b_1$ , а также диапазон используемых номеров элементов вектора моментов времени определите самостоятельно.

### Справка

Для обращения к части элементов вектора нужно указать в круглых скобках *вектор номеров* этих элементов. Чаще всего требуется обращение к одиночному элементу (**x(n)**) или сплошному диапазону номеров (**x(n1:n2)**). Для ссылки на последний элемент можно использовать ключевое слово **end**.

### Внимание!

В отличие от многих языков программирования, нумерация элементов в MATLAB всегда начинается с единицы!

- Аналогичным образом рассчитайте значения отсчетов второго линейного фрагмента сигнала ( $u(t) = a_2 t + b_2$  при  $t = T_1 \dots T_2$ ). Значения параметров  $a_2$  и  $b_2$ , а также диапазон используемых номеров элементов вектора моментов времени определите самостоятельно.

### Замечание

Если на момент взятия отсчета приходится скачок уровня аналогового сигнала, для целей данной работы значение дискретного отсчета может быть выбрано произвольно в пределах диапазона скачка. Однако с теоретической точки зрения правильнее всего принять значение отсчета равным *середине* скачка (полусумме значений аналогового сигнала справа и слева от скачка).

- Постройте график дискретного сигнала, используя сначала функцию **plot**, а затем функцию **stem**, чтобы сравнить результаты их работы.

### Справка

Наиболее часто для построения графиков используется функция **plot** в форме **plot(y)** или **plot(x, y)** (в первом случае по горизонтали откладываются номера элементов вектора, во втором варианте строится зависимость  $y(x)$ ). Параметры **x** и **y** должны быть векторами одинаковой длины.

Для построения графиков дискретных сигналов полезна функция **stem**, которая имеет такой же синтаксис. Она строит графики в виде вертикальных «стебельков».

**3. Создание MATLAB-программы.** Для дальнейшей работы необходимо превратить код, созданный в интерактивном режиме, в MATLAB-программу (сценарий, script). Для этого выполните следующее:

- Создайте (средствами Windows) папку для лабораторных работ вашей бригады. Место расположения этих папок *указывает преподаватель*.
- В окне MATLAB сделайте созданную папку бригады текущей папкой. Для этого служит поле **Current Folder** в верхней части окна.
- В панели истории введенных команд (**Command History**) выделите команды, с помощью которых задавались параметры дискретного сигнала и производилось его формирование (выделение диапазона строк производится путем щелчка мышью при нажатой клавише **Shift**). Скопируйте выделенные команды в буфер обмена.

#### **Справка**

Если панель **Command History** отсутствует на экране, включите ее отображение командой меню **Desktop ► Command History**.

- Создайте новый файл MATLAB-программы (самый левый значок (**New script**) панели инструментов, команда меню **File ► New ► Script** или клавиши **Ctrl + N**) и вставьте программный код из буфера обмена.
- Сохраните файл, дав ему соответствующее имя.

#### **Справка**

Имена файлов в MATLAB фактически являются *идентификаторами переменных*, поэтому на них налагаются ограничения. Допустимые символы: латинские буквы, цифры, символ подчеркивания; первый символ — не цифра.

#### **Внимание!**

Русские буквы в именах файлов использовать нельзя!

- Отредактируйте код, удалив ненужные строки, возможно, оставшиеся после экспериментов, производившихся в интерактивном режиме. Запустите MATLAB-программу клавишей **F5**, кнопкой ► панели инструментов или командой меню **Debug ► Run**. Добейтесь того, чтобы программа работала без ошибок.

#### **Справка**

На данном этапе уже не нужен вывод на экран результатов выполнения каждой команды — это было полезно при освоении системы в интерактивном режиме. Чтобы отключить вывод результатов расчета на экран, в конце каждой строки кода нужно поставить символ «точка с запятой».

Чтобы избежать возможных ошибок из-за повторного определения переменных при очередном запуске программы, добавьте в ее начало команду **clear**, удаляющую все переменные, содержащиеся в рабочей области **Workspace**.

Последующие пункты работы выполняются путем дополнения созданной MATLAB-программы.

**4. Построение графика спектра дискретного сигнала.** Спектр дискретного сигнала рассчитывается по (1.3). При расчете необходимо учесть, что рассматриваемый сигнал содержит конечное число ( $N$ ) ненулевых отсчетов. Необходимо рассчитать спектр в *основном* частотном диапазоне ( $\tilde{\omega} = -\pi \dots +\pi$ ) и построить графики амплитудного и фазового спектров.

На примере расчета спектра дискретного сигнала можно познакомиться с выполнением в MATLAB векторно-матричных операций. Примерная последовательность выполнения расчета:

- Сформируйте *вектор-столбец* номеров отсчетов  $k$ :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \end{bmatrix}.$$

### Справка

Рассмотренный ранее способ создания равномерных последовательностей создает *вектор-строку*. Превратить строку в столбец можно с помощью операции транспонирования, которая в MATLAB задается символами «.'». Апостроф без точки («'») означает *эрмитово сопряжение* матрицы (транспонирование в сочетании с комплексным сопряжением). Для вещественных матриц обе операции эквивалентны.

Следует помнить, что оператор «.'» имеет более высокий приоритет, чем оператор «:», используемый для формирования равномерных последовательностей, поэтому для транспонирования строки ее следует взять в скобки:

**$\mathbf{k} = (0:N-1) . ' ;$**

- Сформируйте *вектор-строку* равномерно расположенных частот для расчета спектра. Диапазон частот — от  $-\pi$  до  $+\pi$ , шаг по частоте рекомендуется выбирать так, чтобы вектор содержал от 500 до 1000 элементов:

$$\mathbf{w} = [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \dots \quad \tilde{\omega}_M].$$

Здесь  $M$  — число частот в векторе  $\mathbf{w}$ .

### Справка

Константа  $\pi$  в MATLAB задается как `pi`.

- Вычислите произведение столбца  $\mathbf{k}$  и строки  $\mathbf{w}$  — это даст матрицу размером  $N \times M$ , содержащую все попарные произведения значений  $k$  и  $\tilde{\omega}$ .
- Умножьте полученную матрицу на  $-j$ , чтобы получить показатель комплексной экспоненты из (1.3).

### Справка

Мнимую единицу в MATLAB можно задать с помощью констант `1i` или `1j`. После запуска системы значение мнимой единицы также присвоено переменным `i` и `j`, однако эти значения могут быть переопределены в процессе работы.

- Вычислите значения комплексной экспоненты из формулы (1.3).

### Справка

Функции `exp`, `sin`, `sqrt` и т. п. обрабатывают матричные аргументы *поэлементно*.

- Умножьте сформированный ранее вектор отсчетов сигнала  $\mathbf{x}$  на матрицу значений комплексных экспонент. Эта операция реализует суммирование по  $k$  в формуле (1.3) и в результате дает вектор-строку значений спектра, рассчитанных для  $M$  частот из вектора  $\mathbf{w}$ .
- Постройте графики амплитудного и фазового спектров сигнала, разместив их друг под другом в одном графическом окне. Зависимости следует строить не от нормированной частоты  $\tilde{\omega}$ , а от линейной частоты  $f = F_d \tilde{\omega} / (2\pi)$ .

### Справка

Для создания нового графического окна служит команда `figure`. Команда `subplot(r, c, n)` делит графическое окно на «клетки» ( $r$  строк и  $c$  столбцов) и делает текущей «клетку»  $n$  (нумерация осуществляется по строкам). Последующие команды `plot` и `stem` будут выводить графики в текущей «клетке».

Чтобы избежать увеличения числа графических окон после каждого запуска программы, добавьте в ее начало команду **close all**, закрывающую все графические окна.

Для получения амплитудного и фазового спектров понадобятся следующие функции:

- **abs (x)** — вычисление модуля, в том числе для комплексных чисел;
- **angle (x)** — вычисление аргумента (фазы) комплексных чисел (в радианах).

### 5. Восстановление аналогового сигнала по теореме Котельникова.

Восстановление аналогового сигнала  $s(t)$  с ограниченным спектром по его дискретным отсчетам  $x(k)$  в соответствии с теоремой Котельникова производится по формуле (1.5).

При расчетах с помощью компьютера значения сигнала  $s(t)$  могут быть вычислены для произвольного *конечного* набора значений времени  $t$ . В данной лабораторной работе сигнал  $s(t)$  рассчитывается для равномерно следующих значений времени, расположенных в 10 раз чаще, чем было при дискретизации сигнала.

Для вычисления отдельных слагаемых формулы (1.5) удобно использовать матричные возможности MATLAB, рассчитывая эти слагаемые сразу для всех требуемых значений  $t$ , при этом для суммирования слагаемых придется организовать традиционный цикл.

#### Справка

Цикл с заранее заданным числом повторений (цикл **for**) в MATLAB чаще всего записывается следующим образом:

```
for k = 1:N  
    % тело цикла  
end
```

В данном случае тело цикла будет выполнено **N** раз, для целочисленных значений переменной **k**, меняющихся от единицы до **N**.

- Сформируйте вектор моментов времени для расчета восстановленного сигнала по (1.5). Шаг по времени должен быть в 10 раз меньше исходного интервала дискретизации. Охватываемый диапазон времени должен выходить за края сигнала как минимум на 5 исходных интервалов дискретизации (это необходимо для того, чтобы увидеть на графике затухающие «хвосты» функций  $\sin(x)/x$ ).

- Сформируйте заполненную нулями «заготовку» для вектора значений восстановленного сигнала  $s(t)$ . Длина этого вектора должна совпадать с длиной созданного на предыдущем шаге вектора моментов времени.

#### Справка

Функция **zeros** (**m**, **n**) возвращает заполненную нулями матрицу с **m** строками и **n** столбцами. Функция **length** (**x**) возвращает длину вектора **x**.

- Реализуйте вычисление суммы по  $k$  в (1.5), используя для этого цикл по отсчетам сигнала. В теле цикла к созданной ранее «заготовке» для сигнала должно прибавляться очередное слагаемое формулы (1.5).

#### Справка

Поскольку слагаемые формулы (1.5) рассчитываются сразу для всех моментов времени  $t$ , числитель и знаменатель функции  $\sin(x)/x$  являются *векторами*, и их деление друг на друга должно выполняться *поэлементно*. По умолчанию MATLAB выполняет операции умножения и деления по *матричным* правилам. Чтобы осуществить поэлементные действия с матрицами, перед знаком операции необходимо поставить точку: «**.**»», «**./**».

- Выведите график восстановленного сигнала с помощью функции **plot**. Разрывы на графике вызваны неопределенностями (0/0) при расчете функции  $\sin(x)/x$  с нулевым аргументом.

#### Справка

Избавиться от этих разрывов можно, используя для расчета функции  $\sin(x)/x$  готовые средства MATLAB. Функция **sinc** возвращает результат, равный  $\sin(\pi x)/(\pi x)$  (именно так определяется функция **sinc** в зарубежных источниках).

- Постройте графики исходного дискретного и восстановленного аналогового сигналов в общих координатных осях, чтобы наглядно видеть, как они соотносятся друг с другом.

#### Справка

Команды **hold on** и **hold off** включают и выключают режим сохранения текущего содержимого окна при построении нового графика.

Для управления цветом графиков можно добавлять к командам **plot** и **stem** дополнительные строковые параметры, например, **plot(x, y, 'r')** задает вывод графика красным цветом.

**6. Подготовка материалов для отчета.** В завершение работы необходимо скопировать в документ Microsoft Word (в качестве заготовки для отчета) созданный программный код и все полученные графики (дискретный сигнал; его амплитудный и фазовый спектры; совместно показанные дискретный и восстановленный аналоговый сигналы).

### **Справка**

Для переноса графиков в документы Word следует использовать команду **Copy Figure** из меню **Edit** окна графика. Перед этим целесообразно задать векторный формат копирования, выбрав в том же меню команду **Copy Options** и установив переключатели **Preserve Information** и **Transparent Background**.

## **1.5. Содержание отчета**

Отчет должен содержать созданный в процессе работы программный код, оформленный в виде законченного документа (с заголовками разделов, формулами и комментариями к коду). Полученные в ходе работы графики *с подписями осей и размерностями* размещаются в соответствующих разделах отчета. В конце отчета должны быть приведены выводы по результатам работы.

## **1.6. Контрольные вопросы**

1. Частоту дискретизации сигнала увеличили в 2 раза. Как изменится амплитуда выбросов аналогового сигнала, восстановленного согласно теореме Котельникова?

2. У отсчетов сигнала с *четными* номерами изменили знак, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = -x(k) (-1)^k$ . Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $Y(\tilde{\omega})$  через  $X(\tilde{\omega})$ .)

3. Построенный в отчете график амплитудного спектра дискретного сигнала имеет выраженный пик на некоторой ненулевой частоте. Приведя необходимые графики, продемонстрируйте, что сигнал действительно *имеет сходство* с гармоническим колебанием соответствующей частоты.

4. Последовательность отсчетов дискретного сигнала конечной длительности зеркально перевернули во времени, т. е. сформировали последовательность

$$\{y(k)\} = \{x(N-1), x(N-2), \dots, x(2), x(1), x(0)\}, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$



общая формула:  $y(k) = x(N - 1 - k)$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ .

Здесь  $N$  — число отсчетов сигнала. Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

5. Спектр  $\dot{X}(\tilde{\omega})$  некоторой дискретной последовательности  $\{x(k)\}$  преобразовали следующим образом:  $\dot{Y}(\tilde{\omega}) = \dot{X}(2\tilde{\omega})$ . Что представляет собой последовательность отсчетов  $\{y(k)\}$ ? (Как она связана с последовательностью  $\{x(k)\}$ ?)

6. Последовательность отсчетов дискретного сигнала бесконечной длительности инвертировали во времени, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = x(-k)$ . Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

7. Амплитуда пульсаций аналогового сигнала, восстановленного согласно теореме Котельникова, возрастает как вблизи скачков, так и вблизи точек излома сигнала, однако в окрестностях скачков это возрастание оказывается существенно сильнее. Как это можно объяснить?

8. Дискретный сигнал подвергли амплитудной модуляции, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = x(k) \cos(\tilde{\omega}_0 k)$ , где  $\tilde{\omega}_0$  — некоторая несущая частота. Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

9. У отсчетов сигнала с *нечетными* номерами изменили знак, после чего между всеми парами соседних отсчетов вставили по одному отсчету с нулевым значением, т. е. сформировали последовательность следующего вида:

$$y(k) = \begin{cases} x(k/2)(-1)^{k/2}, & k \text{ четное,} \\ 0, & k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

10. Дискретный сигнал подвергли амплитудной модуляции, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = x(k) \sin(\tilde{\omega}_0 k)$ , где  $\tilde{\omega}_0$  — некоторая несущая частота. Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

11. В бесконечном дискретном сигнале каждый отсчет продублировали:

$$\{y(k)\} = \{\dots, x(-1), x(-1), x(0), x(0), x(1), x(1), x(2), x(2), \dots\}.$$

Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

12. По отсчетам бесконечного дискретного гармонического сигнала  $x(k) = A \cos(\tilde{\omega}k + \varphi_0)$ ,  $-\infty < k < +\infty$ , восстановили аналоговый сигнал в соответствии с теоремой Котельникова. Будет ли восстановленный сигнал являться гармоническим? Ответ обосновать.

13. Последовательность отсчетов дискретного сигнала бесконечной длительности сложили с этой же последовательностью, инвертированной во времени, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = x(k) + x(-k)$ . Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

14. Из последовательности отсчетов дискретного сигнала бесконечной длительности вычли эту же последовательность, инвертированную во времени, т. е. сформировали последовательность  $y(k) = x(k) - x(-k)$ . Как при этом изменился спектр дискретного сигнала? (Необходимо выразить  $\dot{Y}(\tilde{\omega})$  через  $\dot{X}(\tilde{\omega})$ .)

## 2. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

### 2.1. Цели работы

- Пропускание дискретного сигнала через дискретный фильтр и получение графика выходного сигнала.
- Анализ сигналов, проходящих через элементы памяти фильтра, при реализации фильтра в разных формах.
- Получение графиков характеристик фильтра с помощью среды визуализации фильтров FVTool.
- Разложение функции передачи фильтра на простые дроби и получение аналитической формулы для импульсной характеристики фильтра.

### 2.2. Теоретические сведения

**Алгоритм дискретной фильтрации.** Дискретный фильтр — это произвольная система обработки дискретного сигнала, обладающая свойствами линейности и стационарности. *Линейность* означает, что выходная реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности, а *стационарность* — что задержка входного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы.

Любой фильтр обладает определенной частотной характеристикой. Чтобы она была нетривиальной, т. е. чтобы коэффициент передачи фильтра на разных частотах был разным, выходной сигнал фильтра  $y(k)$  должен зависеть от *нескольких* отсчетов входного сигнала  $x(k)$ . Таким образом, дискретный фильтр должен обладать *памятью*. Чтобы обеспечить линейность и стационарность, производимые фильтром математические операции должны ограничиваться сложением и умножением на константы.

В общем случае дискретный фильтр суммирует (с весовыми коэффициентами) некоторое количество входных отсчетов (включая текущий) и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов:

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n), \quad (2.1)$$

где  $a_j$  и  $b_i$  — вещественные коэффициенты. Данная формула называется *алгоритмом дискретной фильтрации*.

**Способы описания дискретных систем.** Дискретные системы могут описываться различными способами, которые рассмотрены далее.

**Импульсная характеристика.** Выходная реакция на единичный импульс  $\delta(k)$ , определяемая при нулевых начальных условиях, называется *импульсной характеристикой* дискретной системы и обозначается  $h(k)$ .

Знание импульсной характеристики позволяет проанализировать прохождение через дискретную систему любого сигнала. Выходной сигнал представляет собой линейную комбинацию импульсных характеристик:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m).$$

Данная формула представляет собой *свертку* входного сигнала и импульсной характеристики фильтра.

**Функция передачи.** Функция  $H(z)$ , равная отношению  $z$ -преобразований выходного и входного сигналов и представляющая собой  $z$ -преобразование импульсной характеристики системы, называется *функцией передачи* или *системной функцией* дискретной системы:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}.$$

**Частотная характеристика.** Комплексный коэффициент передачи (частотная характеристика) дискретной системы связан с функцией передачи и импульсной характеристикой следующим образом:

$$\dot{K}(\tilde{\omega}) = H(e^{j\tilde{\omega}}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\tilde{\omega}k}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что частотная характеристика дискретной системы, так же как и спектры дискретизированных сигналов, является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации  $\tilde{\omega}_д = 2\pi$  рад/отсч.

**Нули и полюсы.** Разложив числитель и знаменатель функции передачи на множители, получим функцию передачи в следующем виде:

$$H(z) = k \frac{(1 - z_1z^{-1})(1 - z_2z^{-1}) \dots (1 - z_mz^{-1})}{(1 - p_1z^{-1})(1 - p_2z^{-1}) \dots (1 - p_nz^{-1})}.$$

Здесь  $k = b_0$  — коэффициент усиления,  $z_i$  — нули функции передачи,  $p_i$  — полюсы функции передачи. В точках нулей  $H(z_i) = 0$ , а в точках полюсов  $H(p_i) \rightarrow \infty$ .

В данном случае дискретная система описывается набором параметров  $\{z_i\}$ ,  $\{p_i\}$ ,  $k$ . Для вещественных систем нули функции передачи являются вещественными либо составляют комплексно-сопряженные пары. То же относится и к полюсам. Коэффициент усиления при этом всегда вещественный. В случае комплексных систем никакие ограничения на значения рассматриваемых параметров не накладываются.

Установим связь между расположением нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости и формой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы. Для этого учтем, что при изменении частоты  $\tilde{\omega}$  в (2.2) точка, изображающая аргумент функции передачи на комплексной плоскости, движется по единичной окружности:  $z = \exp(j\tilde{\omega})$  (рис. 2.1).

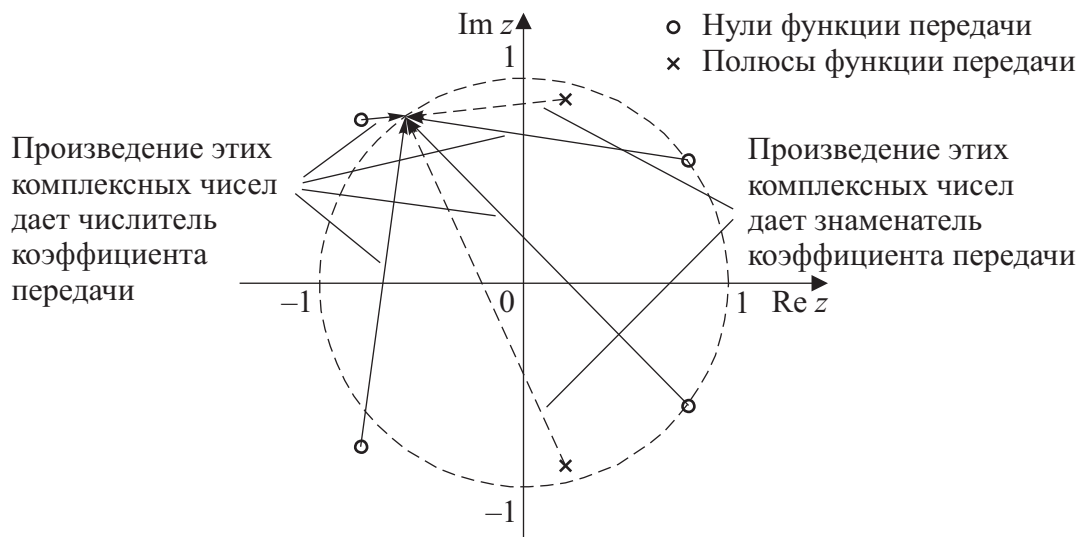


Рис. 2.1. Влияние расположения нулей и полюсов на форму АЧХ дискретной системы

Следовательно, можно сформулировать следующие правила:

- когда точка  $z = \exp(j\tilde{\omega})$  находится вблизи одного из нулей функции передачи  $z_i$ , соответствующая разность  $(z - z_i)$  окажется малой по сравнению с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь провал. Если нуль лежит на единичной окружности, АЧХ на соответствующей частоте будет иметь нулевое значение;
- когда точка  $z = \exp(j\tilde{\omega})$  находится вблизи одного из полюсов функции передачи  $p_i$ , соответствующая разность  $(z - p_i)$  окажется малой по сравне-

нию с другими, в результате чего АЧХ в данной области частот будет иметь *подъем*. Если полюс лежит *на* единичной окружности, АЧХ на соответствующей частоте будет стремиться к бесконечности;

- чем ближе к единичной окружности расположен нуль (полюс), тем более выраженным будет соответствующий провал (подъем) АЧХ.

В качестве примера рассмотрим систему, имеющую пару полюсов, равных  $0.2 \pm 0.9j$ , и четыре нуля, два из которых ( $0.8 \pm 0.6j$ ) расположены *на* единичной окружности, а еще два ( $-0.8 \pm 0.8j$ ) — вблизи нее (см. рис. 2.1). Согласно перечисленным ранее принципам, АЧХ этой системы должна иметь пик в районе частоты 0.45, нуль — в районе частоты 0.2 и провал — в районе частоты 0.75 (приведены значения частот, нормированные к частоте Найквиста). На рис. 2.2 показан график АЧХ рассмотренной системы, который полностью подтверждает сделанные предположения.

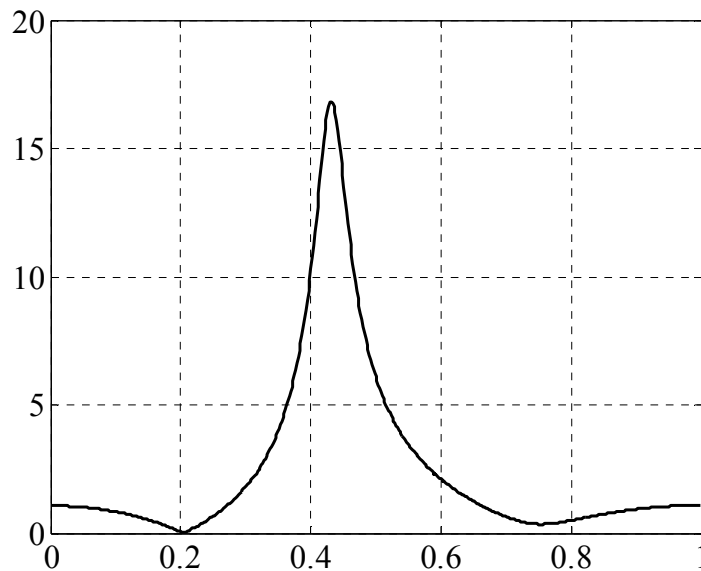


Рис. 2.2. АЧХ системы подтверждает предсказания, сделанные исходя из расположения нулей и полюсов

**Полюсы и вычеты.** Представление дробно-рациональной функции передачи в виде суммы простых дробей при отсутствии кратных корней у знаменателя может быть записано следующим образом:

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{r_n}{1 - p_n z^{-1}} + k_0 + k_1 z^{-1} + \dots + k_{m-n} z^{-(m-n)}. \quad (2.3)$$

Здесь  $p_i$  и  $r_i$  — полюсы функции передачи и соответствующие им *вычеты*. В данном случае система описывается набором параметров  $\{r_i\}$ ,  $\{p_i\}$ ,  $\{k_i\}$ .

Для вещественных систем полюсы функции передачи являются вещественными либо составляют комплексно-сопряженные пары. Вычеты, соответствующие комплексно-сопряженным полюсам, при этом также являются комплексно-сопряженными.

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет вычислить импульсную характеристику системы, для чего необходимо произвести обратное  $z$ -преобразование функции (2.3). Для этого следует воспользоваться следующими свойствами:

- $z$ -преобразование единичного импульса  $\delta(k)$  равно константе:  $\Delta(z) = 1$ ;
- $z$ -преобразование экспоненциального сигнала  $x(k) = rp^k$ ,  $k \geq 0$ , равно

$$X(z) = \frac{r}{1 - pz^{-1}};$$

- $z$ -преобразование линейно.

В результате импульсная характеристика системы с функцией передачи (2.3) принимает следующий вид:

$$h(k) = \sum_{i=1}^n r_i (p_i)^k + \sum_{i=0}^{m-n} k_i \delta(k-i). \quad (2.4)$$

Пара комплексно-сопряженных полюсов дает пару слагаемых импульсной характеристики в виде комплексно-сопряженных экспонент. Сумма таких слагаемых представляет собой вещественную синусоиду с экспоненциально меняющейся амплитудой:

$$\begin{aligned} r_i (p_i)^k + r_i^* (p_i^*)^k &= 2 \operatorname{Re} \left[ r_i (p_i)^k \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ |r_i| \cdot |p_i|^k \exp(j(\arg r_i + k \arg p_i)) \right] = \\ &= 2 |r_i| \cdot |p_i|^k \cos(k \arg p_i + \arg r_i). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $\arg r_i$  и  $\arg p_i$  — фазы комплексных чисел  $r_i$  и  $p_i$ .

**Пространство состояний.** Сущность представления дискретной системы в пространстве состояний состоит в следующем — имеются вектор параметров  $\mathbf{s}(k)$ , описывающих внутреннее состояние системы, и 2 формулы, согласно которым производятся изменение этого состояния и формирование выходного сигнала в зависимости от текущего состояния и входного сигнала:

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{B}x(k),$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + Dx(k).$$

Здесь  $\mathbf{s}(k)$  — вектор состояния;  $x(k)$  и  $y(k)$  — соответственно отсчеты входного и выходного сигналов;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $D$  — параметры, описывающие систему. Если  $x$  и  $y$  — скалярные сигналы, и размерность вектора состояния равна  $N$ , то размерность параметров будет следующей:  $\mathbf{A}$  — матрица  $N \times N$ ,  $\mathbf{B}$  — столбец  $N \times 1$ ,  $\mathbf{C}$  — строка  $1 \times N$ ,  $D$  — скаляр.

Преобразование параметров пространства состояний в функцию передачи осуществляется по формуле:

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D,$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размером  $N \times N$ .

Преобразование коэффициентов функции передачи в параметры пространства состояний не является однозначным. Различным вариантам представления одной и той же функции передачи в пространстве состояний соответствуют различные формы реализации соответствующего фильтра.

**Формы реализации дискретных фильтров.** Как отмечено выше, одному и тому же фильтру могут соответствовать различные структурные схемы. С теоретической точки зрения все они эквивалентны по соотношению «вход-выход». Однако при практической реализации необходимо обращать внимание на ряд особенностей, присущих этим схемам.

**Прямая форма реализации дискретного фильтра.** Если реализовать фильтр согласно алгоритму дискретной фильтрации (2.1), то получим структурную схему, показанную на рис. 2.3, которая называется *прямой* формой реализации дискретного фильтра.

**Каноническая форма реализации дискретного фильтра.** Если в прямой форме реализации (рис. 2.3) поменять местами рекурсивную и нерекурсивную части фильтра и объединить 2 линии задержки, на которые после данной модификации поступает один и тот же входной сигнал, то получим структурную схему *канонической* формы реализации дискретного фильтра, показанную на рис. 2.4.

По сравнению с прямой реализацией фильтра, при канонической реализации используется общая линия задержки, что уменьшает число необходимых элементов памяти (элементов задержки). Однако при этом модули отсчетов, хранящихся в линии задержки, могут существенно превосходить амплитуду входного и выходного сигналов. Это приводит к необходимости



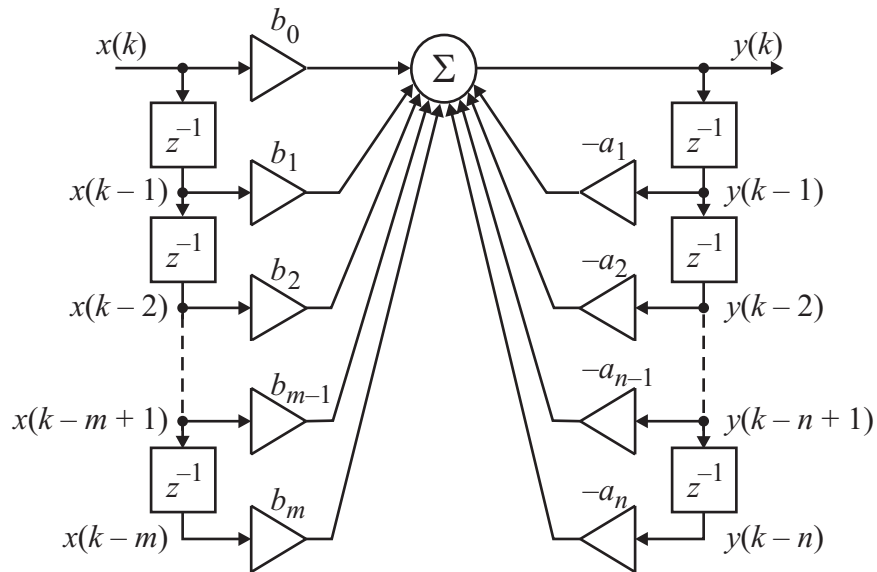


Рис. 2.3. Прямая форма реализации дискретного фильтра

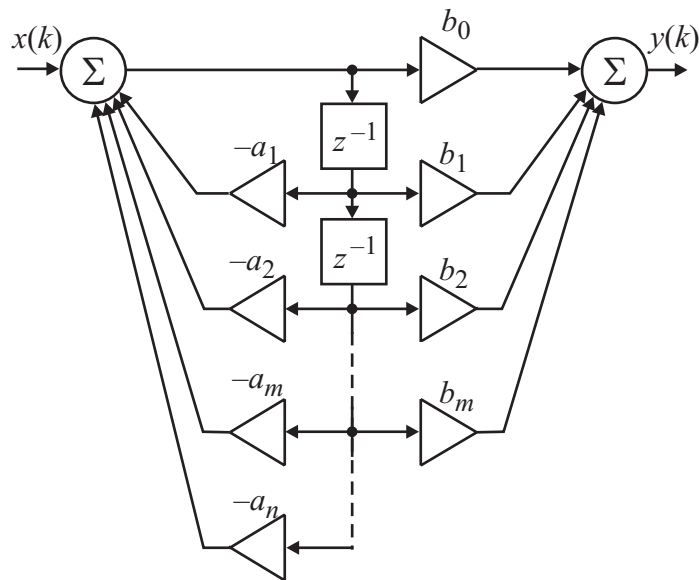


Рис. 2.4. Каноническая форма реализации дискретного фильтра

увеличивать разрядность представления чисел в линии задержки по сравнению с разрядностью входного и выходного сигналов, что усложняет реализацию устройства.

**Транспонированная форма реализации дискретного фильтра.** Если поменять в прямой форме реализации (рис. 2.3) последовательность выполнения операций умножения и задержки, используя в каждой ветви отдельную линию задержки на нужное количество тактов, то можно получить структурную схему *транспонированной* формы реализации дискретного фильтра, показанную на рис. 2.5.

Транспонированная схема позволяет эффективно распараллелить вычисления. Действительно, при реализации фильтра в форме рис. 2.3 или 2.4 можно *одновременно* выполнять все операции *умножения*, но для получения выходного результата необходимо дождаться окончания выполнения *всех* операций сложения. В транспонированной же схеме, помимо умножения, можно одновременно выполнять и все операции *сложения*, поскольку они являются независимыми (т. е. не используют в качестве суммируемых величин результаты других сложений).

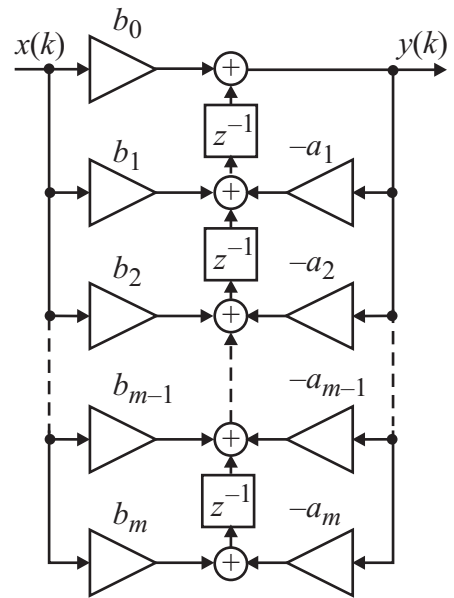


Рис. 2.5. Транспонированная форма реализации дискретного фильтра

Как видно из схемы рис. 2.5, собственно для расчета выходного сигнала необходимо выполнить *одно* умножение и *одно* сложение; все остальные операции производят подготовку промежуточных результатов для вычисления последующих выходных отсчетов.

### 2.3. Индивидуальное задание

В данной лабораторной работе используется сигнал из индивидуального задания для лабораторной работы № 1.

Этот сигнал в процессе выполнения работы пропускается через дискретный рекурсивный фильтр 4-го порядка, функция передачи которого имеет вид:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты фильтра  $b_0 \dots b_4$ ,  $a_1 \dots a_4$  являются индивидуальными для каждой бригады и выдаются преподавателем в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
					1				

## 2.4. Указания к выполнению работы

**1. Подготовка к началу работы.** Запустите MATLAB и сделайте текущей папку вашей бригады.

Создайте в редакторе MATLAB новый файл MATLAB-программы и скопируйте в него часть кода из программы, созданной при выполнении лабораторной работы № 1. Необходимо выбрать фрагмент кода, с помощью которого формируется исходный дискретный сигнал и строится его график.

Сохраните новую программу с соответствующим именем и добейтесь, чтобы она работала (программа должна формировать вектор отсчетов дискретного сигнала и строить его график).

### Замечание

В данной работе при построении графиков сигналов для оцифровки горизонтальной оси целесообразно использовать не время, а *номера отсчетов*, вызывая функции **plot** и **stem** с одним аргументом: **plot(x)** и т. п.

**2. Пропускание сигнала через дискретный фильтр.** Чтобы увидеть затухающие переходные процессы, возникающие после завершения сигнала, добавьте к нему нулевые отсчеты в конце. Число нулевых отсчетов должно быть равно числу отсчетов исходного дискретного сигнала.

### Справка

Функция **zeros(m, n)** возвращает заполненную нулями матрицу с **m** строками и **n** столбцами. Функция **length(x)** возвращает длину вектора **x**. Соединить две матрицы по горизонтали можно, записав их в квадратных скобках через пробел или запятую. Таким образом, если сигнал хранится в переменной **x** и представляет собой вектор-строку, дополнить его нулями можно так:

```
x0 = [x, zeros(1, length(x))];
```

Получите выходной сигнал фильтра, воспользовавшись для его реализации имеющейся в MATLAB готовой функцией **filter**.

### Справка

Функция **filter** реализует обработку сигнала дискретным фильтром. Функция используется следующим образом:

```
y = filter(b, a, x);
```

Здесь **b** — вектор [**b0 b1 b2 b3 b4**] коэффициентов числителя функции передачи; **a** — вектор [**1 a1 a2 a3 a4**] коэффициентов знаменателя функции передачи (см. (2.6)); **x** — входной сигнал; **y** — выходной сигнал.

### Внимание!

Обратите внимание на то, что для фильтра 4-го порядка векторы коэффициентов содержат *пять* элементов, так как в них присутствуют коэффициенты в том числе для *нулевой* степени полиномов. Кроме того, не забудьте, что отсутствующий в индивидуальном задании коэффициент  $a_0$  (он всегда равен единице, см. (2.6)) при вызове функции **filter** должен быть включен в состав вектора параметров **a**.

Постройте график выходного сигнала с помощью функции **stem**. График должен демонстрировать искаженный фильтром сигнал, а также затухающий переходный процесс, происходящий после окончания сигнала на входе фильтра.

**3. Анализ прямой формы реализации дискретного фильтра.** Структурная схема прямой формы реализации дискретного фильтра показана на рис. 2.3. При использовании прямой формы реализации дискретного фильтра в элементах памяти (элементах задержки) хранятся непосредственно отсчеты входного и выходного сигналов, поэтому все необходимые для анализа этой формы сигналы уже были получены при выполнении предыдущего пункта работы.

Определите максимальное по модулю значение сигналов, хранящихся в элементах памяти при работе фильтра (т. е. выберите наибольший из максимумов модулей входного и выходного сигналов), и занесите его в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Форма реализации фильтра	Максимальное по модулю внутреннее состояние
Прямая	
Каноническая	
Транспонированная	

### Справка

Для определения максимального значения элемента вектора служит функция **max**:

$$\mathbf{xmax} = \mathbf{max}(\mathbf{x}) ;$$

С помощью этой же функции можно выбрать максимум из двух чисел:

$$\mathbf{max\_a\_b} = \mathbf{max}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) ;$$

Для вычисления модуля числа служит функция **abs**.

**4. Анализ канонической формы реализации дискретного фильтра.** Структурная схема канонической формы реализации дискретного фильтра

показана на рис. 2.4. При использовании канонической формы реализации дискретного фильтра в элементах памяти хранятся отсчеты сигнала, прошедшего через *рекурсивную* часть фильтра, т. е. через фильтр с функцией передачи следующего вида:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}. \quad (2.7)$$

Получите сигнал, хранящийся в элементах памяти фильтра, реализованного в соответствии с канонической формой, пропустив входной сигнал через фильтр с функцией передачи (2.7), используя для этого функцию **filter**.

Постройте график полученного сигнала с помощью функции **stem**.

Определите максимальное по модулю значение полученного сигнала и занесите его в табл. 2.2.

**5. Анализ транспонированной формы реализации дискретного фильтра.** Структурная схема транспонированной формы реализации дискретного фильтра показана на рис. 2.5. Из схемы видно, что элементы памяти *не образуют линию задержки*, как это было в прямой и канонической формах. Поэтому в данном случае необходимо получить графики для *всех* сигналов, проходящих через элементы памяти фильтра.

Проще всего для этого воспользоваться тем фактом, что функция **filter** реализует обработку сигнала именно по схеме рис. 2.5, и, кроме того, она предоставляет возможность доступа к внутреннему состоянию фильтра.

#### **Справка**

Для доступа к внутреннему состоянию фильтра функция **filter** используется следующим образом:

```
[y, s_out] = filter(b, a, x, s_in);
```

Дополнительный входной параметр **s\_in** задает начальное внутреннее состояние, а в дополнительном выходном результате **s\_out** функция возвращает итоговое внутреннее состояние, достигнутое после обработки сигнала **x**.

Для получения всей истории изменения внутреннего состояния в процессе работы фильтра необходимо организовать цикл, в котором через фильтр будут пропускаться отдельные отсчеты сигнала. После обработки каждого отсчета внутреннее состояние фильтра будет сохраняться в виде очередного столбца отведенной для этого матрицы.

В приводимом ниже примере кода предполагается, что обрабатываемый сигнал хранится в векторе с именем **x**.

```
states = []; % заготовка матрицы внутренних состояний
s = []; % текущее состояние фильтра
for k = 1:length(x)
    % обработка одного отсчета с заданием и сохранением
    % внутреннего состояния фильтра
    [y(k), s] = filter(b, a, x(k), s);
    % добавление нового столбца к матрице состояний
    states = [states s];
end
```

По окончании работы цикла вся история изменения внутреннего состояния фильтра будет записана в матрицу **states**. Разные строки этой матрицы соответствуют разным элементам памяти фильтра, разные столбцы — разным моментам времени.

Постройте в общих координатных осях графики всех внутренних сигналов фильтра с помощью функции **plot**.

#### Справка

Функция **plot** при передаче ей матричного параметра строит отдельные графики для всех *столбцов* матрицы. Поэтому для получения графиков всех внутренних сигналов фильтра матрицу **states** необходимо транспонировать: **plot(states')**.

Определите максимальное по модулю значение внутреннего состояния, достигаемое при работе фильтра, и занесите его в табл. 2.2.

#### Справка

Функция **max** при передаче ей матричного аргумента находит максимум для каждого столбца матрицы отдельно. Чтобы найти значение, максимальное для всей матрицы, нужно вызвать функцию **max** 2 раза либо преобразовать матрицу в один столбец, указав двоеточие в качестве номера элемента:

```
A_max = max(max(A));
A_max = max(A(:));
```

**6. Получение графиков характеристик фильтра.** Вызовите среду визуализации характеристик фильтров (Filter Visualization Tool, FVTool), передав ей векторы коэффициентов фильтра аналогично тому, как это делается при вызове функции **filter** (приведенная ниже команда набирается в командном окне MATLAB):

## **fvtool (b, a)**

Выбор просматриваемых характеристик и управление параметрами анализа производится с помощью средств графического интерфейса окна, открывающегося после вызова данной функции.

Копирование графиков в буфер обмена производится с помощью команды меню **Edit ▶ Copy Figure** окна среды FVTool.

Получите и перенесите в документ Microsoft Word (в качестве заготовки для отчета) следующие графики:

- АЧХ (**Magnitude Response**);
- фазочастотная характеристика (ФЧХ; **Phase Response**);
- групповая задержка (**Group Delay Response**);
- импульсная характеристика (**Impulse Response**);
- расположение нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости (**Pole/Zero Plot**).

**7. Получение аналитической формулы для импульсной характеристики фильтра.** Разложите функцию передачи фильтра на простые дроби с помощью функции **residuez**.

### **Справка**

Функция **residuez** используется следующим образом:

**[r, p, k] = residuez (b, a)**

Входные параметры: **b** и **a** — векторы коэффициентов фильтра (аналогично функции **filter**).

Выходные результаты: **r** — вектор вычетов, **p** — вектор соответствующих им полюсов, **k** — вектор коэффициентов целой части функции передачи. Функции передачи используемых в лабораторной работе фильтров имеют одинаковые степени полиномов числителя и знаменателя, поэтому вектор **k** содержит лишь один элемент.

После вызова функции **residuez** необходимо вычислить модули и фазы полюсов и вычетов (с помощью функций **abs** и **angle** соответственно) и занести эти результаты в табл. 2.3. В эту же таблицу нужно занести и значение целой части функции передачи **k**.

*При подготовке отчета* по лабораторной работе необходимо получить аналитическую формулу для импульсной характеристики фильтра (см. (2.3), (2.4)). После получения импульсной характеристики в комплексной форме

необходимо выполнить суммирование комплексно-сопряженных пар (2.5), приведя импульсную характеристику к вещественному виду.

**8. Подготовка материалов для отчета.** В завершение работы необходимо скопировать в документ Microsoft Word (в качестве заготовки для отчета) созданный программный код и все полученные графики:

- входной и выходной сигналы фильтра;
- внутренний сигнал фильтра, реализованного в канонической форме;
- внутренние сигналы фильтра, реализованного в транспонированной форме;
- графики характеристик фильтра, полученные в среде FVTool.

Таблица 2.3

	Модуль	Фаза, рад
	Вычеты	
$r_1$		
$r_2$		
$r_3$		
$r_4$		
	Полюсы	
$p_1$		
$p_2$		
$p_3$		
$p_4$		
	Целая часть	
$k$		

## 2.5. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Структурные схемы всех трех форм реализации фильтра с подписанными числовыми значениями коэффициентов.
2. Созданный в процессе работы программный код, оформленный в виде законченного документа (с заголовками разделов, формулами и комментариями к коду).
3. Полученные в ходе работы графики и заполненные таблицы (размещаются в соответствующих разделах отчета).
4. Вывод аналитической формулы для импульсной характеристики фильтра.
5. Выводы по результатам работы.

## 2.6. Контрольные вопросы

1. Оценить по графику ФЧХ групповую задержку, вносимую фильтром в полосе пропускания.
2. Как примерно будет выглядеть график частотной зависимости групповой задержки, если изменить ФЧХ фильтра указанным образом?
3. Импульсная характеристика фильтра представляет собой сумму экспоненциально затухающих синусоидальных колебаний. Исходя из располо-



жения нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости, оценить период (в отсчетах) этих синусоидальных колебаний.

4. Как, исходя из расположения нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости, можно оценить частоту среза ФНЧ?

5. Как будет примерно выглядеть АЧХ фильтра, если добавить пару нулей функции передачи в указанных точках  $z$ -плоскости?

6. Что произойдет с АЧХ фильтра, если заданным образом изменить расположение полюсов функции передачи на  $z$ -плоскости?

7. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если в формуле для его функции передачи произвести замену переменной  $z \rightarrow z^2$ ?

8. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если у всех полюсов и нулей функции передачи поменять знак:  $p_i \rightarrow -p_i$ ,  $z_i \rightarrow -z_i$ ?

9. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками комплексного фильтра, если все полюсы и нули функции передачи заменить на комплексно-сопряженные:  $p_i \rightarrow p_i^*$ ,  $z_i \rightarrow z_i^*$ ?

10. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если в формуле для его функции передачи заменить  $z$  на  $-z$ ?

11. Определить функцию передачи между двумя указанными точками структурной схемы фильтра.

12. Исходя из коэффициентов функции передачи фильтра, пояснить результаты, полученные при анализе сигналов внутри схемы, соответствующей канонической реализации фильтра.

13. Почему для канонической реализации пиковое значение внутренних состояний оказывается намного больше, чем для прямой схемы?

14. Получить функцию передачи для фильтра, представленного в пространстве состояний:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [2 \quad 1]$ ,  $\mathbf{D} = 1$ .

15. Получить функцию передачи для фильтра, представленного в пространстве состояний параметрами  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , заданными преподавателем.

16. Как изменятся параметры пространства состояний, если внести в структурную схему фильтра указанные преподавателем изменения?

## 3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### 3.1. Цели работы

- Расчет дискретного преобразования Фурье (ДПФ) средствами MATLAB.
- Оценка с помощью прямого и обратного ДПФ полосы частот, в которой сосредоточена основная доля энергии сигнала.
- Наблюдение изменений результатов вычисления ДПФ, происходящих при дополнении сигнала нулевыми отсчетами.
- Оценка степени ускорения вычислений за счет алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

### 3.2. Теоретические сведения

**Дискретное преобразование Фурье** — это разновидность преобразования Фурье, специально предназначенная для анализа дискретных сигналов конечной длительности. При этом данное преобразование определено для периодически продолженного сигнала конечной длительности  $x(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ :

$$x(k + N) = x(k) \quad \text{для любого } k. \quad (3.1)$$

Поскольку сигнал (3.1) является дискретным, его спектр должен быть периодическим с периодом  $2\pi/T$ , где  $T$  — период дискретизации. Так как этот сигнал является также и периодическим, его спектр должен быть дискретным с расстоянием между гармониками, равным  $2\pi/(NT)$ . Далее, если не оговорено иное, предполагается, что период дискретизации равен 1 с.

Прямое и обратное ДПФ рассчитываются по следующим формулам:

$$\text{прямое: } \dot{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}, \quad (3.2)$$

$$\text{обратное: } x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}(n) e^{j \frac{2\pi nk}{N}}.$$

**Связь ДПФ и спектра дискретного сигнала.** Имея один и тот же конечный набор чисел, можно рассчитать либо спектральную функцию этого дискретного сигнала по (1.3), либо его ДПФ по (3.2). Разумеется, возникает

вопрос о том, как связаны друг с другом эти 2 спектральных представления, полученные на основе одних и тех же отсчетов сигнала.

Сравнение формул (1.3) и (3.2) показывает, что ДПФ представляет собой просто дискретные отсчеты спектральной функции дискретного сигнала, соответствующие частотам  $\tilde{\omega}_n = 2\pi n/N$  рад/отсчет:

$$\dot{X}(n) = \dot{X}(\tilde{\omega}) \Big|_{\tilde{\omega}=2\pi n/N}. \quad (3.3)$$

По этой причине значения ДПФ иногда называют *спектральными отсчетами*.

Формула (3.3) в сочетании с формулой связи абсолютных и нормированных частот ( $f = F_d \tilde{\omega}/(2\pi)$ ) определяет *частотную шкалу* ДПФ: спектральным отсчетам с номерами  $n = 0, \dots, N-1$  соответствует сетка частот с шагом  $F_d/N$ , простирающаяся от нуля почти до частоты дискретизации (рис. 3.1).

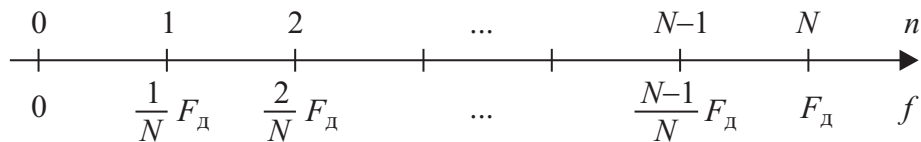


Рис. 3.1. Частотная шкала ДПФ

Из соотношения (3.3) следует еще один важный вывод: если добавить к конечному набору отсчетов некоторое количество нулей, спектральная функция дискретного сигнала (1.3), естественно, не изменится, но ДПФ (3.2) даст большее число спектральных отсчетов, соответствующих частотам, более тесно расположенным в интервале от нуля до частоты дискретизации.

**Свойства ДПФ.** В целом свойства ДПФ аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье, однако дискретный характер анализируемого сигнала привносит некоторую специфику.

**Линейность.** ДПФ, согласно определению (3.2), является линейной комбинацией отсчетов последовательности, поэтому оно подчиняется принципу суперпозиции:

$$y(k) = ax_1(k) + bx_2(k) \leftrightarrow \dot{Y}(n) = a\dot{X}_1(n) + b\dot{X}_2(n).$$

**Задержка.** При задержке сигнала на  $\Delta k$  отсчетов амплитудный спектр не меняется, а фазовый спектр приобретает дополнительное слагаемое, линейно зависящее от номера гармоники и от значения  $\Delta k$ :

$$y(k) = x(k - \Delta k) \leftrightarrow \dot{Y}(n) = \dot{X}(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}\Delta k}.$$

**Симметрия.** ДПФ вещественного сигнала обладает свойством симметрии:

$$\dot{X}(N - n) = \dot{X}(-n) = \dot{X}^*(n).$$

**Круговая свертка.** Круговой свертке периодических последовательностей соответствует произведение их спектров:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((k - n) \bmod N) \leftrightarrow \dot{Y}(n) = \dot{X}_1(n)\dot{X}_2(n).$$

**Равенство Парсеваля.** Дискретный аналог равенства Парсеваля записывается следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{X}(n)|^2.$$

**Матрица ДПФ.** ДПФ является линейным преобразованием, трансформирующим вектор временных отсчетов в вектор такой же длины, содержащий отсчеты спектральные. Такое преобразование может быть реализовано как умножение некоторой квадратной матрицы на входной вектор-столбец:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица преобразования. В случае ДПФ эта матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}_{\text{ДПФ}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Общая формула для элемента матрицы, расположенного в  $n$ -м столбце  $m$ -й строки, выглядит так:

$$\mathbf{A}_{\text{ДПФ}}(m, n) = \exp\left(-j2\pi\frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad 1 \leq m \leq N, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Вычисление ДПФ путем умножения матрицы на вектор полностью соответствует формуле (3.2). Этот метод требует большого количества вычислительных операций, поэтому на практике вместо него применяются быстрые алгоритмы.

**Алгоритм быстрого преобразования Фурье.** Для вычисления одного коэффициента ДПФ по (3.2) необходимо выполнить  $N$  комплексных умножений и сложений. Таким образом, расчет всего ДПФ, содержащего  $N$  коэффициентов, потребует  $N^2$  пар операций «умножение—сложение» (то же самое можно увидеть и из (3.4), представляющей ДПФ как умножение матрицы на вектор). Число операций возрастает пропорционально квадрату размерности ДПФ.

Однако, если  $N$  не является простым числом и может быть разложено на множители, процесс вычислений можно ускорить, разделив анализируемый набор отсчетов на части, вычислив их ДПФ и объединив результаты. Такие способы вычисления ДПФ называются быстрым преобразованием Фурье (БПФ; английский термин — Fast Fourier Transform, FFT) и повсеместно используются на практике. Например, при размерности ДПФ, равной степени двойки, широко используется алгоритм Кули—Тьюки (Cooley—Tukey), число операций в котором пропорционально  $N \log_2(N)$ .

**Растекание спектра.** Как уже говорилось, при ДПФ предполагается, что последовательность отсчетов анализируемого сигнала является периодически продолженной вперед и назад во времени. При этом, если значения начальных и конечных отсчетов сигнала сильно различаются, при периодическом повторении на стыках сегментов возникают скачки, из-за которых спектр сигнала расширяется.

Это явление, называемое растеканием спектра (spectrum leakage), можно наглядно проиллюстрировать на простейшем примере вычисления спектра дискретного гармонического сигнала:

$$x(k) = A \cos(\tilde{\omega}k + \varphi), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.5)$$

Если анализируемая последовательность содержит целое число периодов гармонического сигнала (т. е. если отношение  $N\tilde{\omega}/(2\pi)$  является целым числом), то периодически продолженный сигнал представляет собой гармонические колебания (без скачков), а подстановка (3.5) в формулу ДПФ (3.2) показывает, что вычисленное ДПФ содержит лишь 2 спектральных отсчета, отличных от нуля:

$$\dot{X}(n) = \begin{cases} \frac{AN}{2} e^{j\varphi}, & n = \frac{\tilde{\omega}}{2\pi} N, \\ \frac{AN}{2} e^{-j\varphi}, & n = \left(1 - \frac{\tilde{\omega}}{2\pi}\right) N, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, аналогично спектру непрерывного гармонического сигнала, ДПФ отличается от нуля всего для двух значений  $n$ . Однако если отношение  $N\tilde{\omega}/(2\pi)$  не является целым числом, спектр оказывается значительно более богатым. Этому можно дать простое объяснение: в данном случае периодически продолженная последовательность уже не будет являться набором отсчетов непрерывной синусоиды. Поэтому в полном соответствии со свойствами преобразования Фурье в спектре появляются дополнительные составляющие.

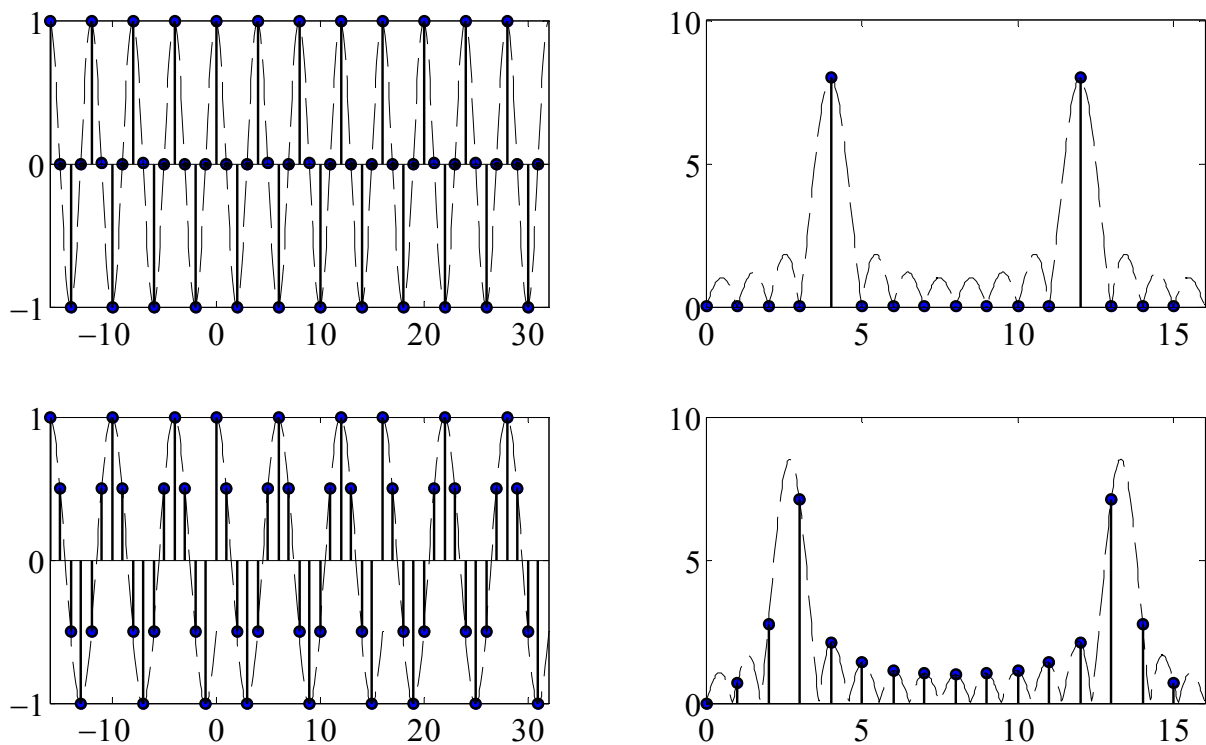


Рис. 3.2. Происхождение растекания спектра: слева — периодически продолженные сигналы, справа — амплитудные спектры одиночных сигналов (штриховые линии) и модули ДПФ (кружки)

Необходимо подчеркнуть, что причиной растекания спектра является именно периодическое продолжение анализируемого сигнала. Спектр одиночного фрагмента дискретной синусоиды является периодической непрерывной функцией частоты. Эта функция имеет лепестковую структуру неза-

висимо от того, целое или нецелое число периодов укладывается в анализируемом сегменте. Однако дискретный ряд частот (3.3), на которых вычисляется ДПФ, может быть по-разному расположен относительно лепестков спектральной функции. В случае целого числа периодов все анализируемые частоты (кроме двух) попадают как раз в нули между лепестками. При нецелом числе периодов такого не происходит.

Иллюстрация растекания спектра представлена на рис. 3.2, где построены графики периодически продолженных сигналов, а также модули их ДПФ и непрерывных амплитудных спектров одиночных фрагментов синусоиды.

Верхняя пара графиков соответствует отсутствию растекания спектра (на интервале анализа укладывается ровно 4 периода колебания). Нижние графики демонстрируют растекание спектра (в данном случае  $N\tilde{\omega}/(2\pi) = 8/3$  не является целым числом).

### 3.3. Индивидуальное задание

В данной лабораторной работе используется сигнал из индивидуального задания для лабораторной работы № 1. Дополнительные индивидуальные параметры отсутствуют.

### 3.4. Указания к выполнению работы

**1. Подготовка к началу работы.** Запустите MATLAB и сделайте текущей папку вашей бригады на сервере дисплейного класса.

Создайте в редакторе MATLAB новый файл MATLAB-программы и скопируйте в него часть кода из программы, созданной при выполнении лабораторной работы № 1 или № 2. Необходимо выбрать фрагмент кода, с помощью которого формируется исходный дискретный сигнал и строится его график.

Сохраните новую программу с соответствующим именем и добейтесь ее стабильной работы (программа должна формировать вектор отсчетов дискретного сигнала и строить его график).

Последующие пункты работы выполняются путем дополнения созданной MATLAB-программы.

**2. Расчет ДПФ.** Вычислите ДПФ для дискретного сигнала из индивидуального задания. Используя функцию **stem**, постройте графики модуля и фазы спектральных отсчетов в одном графическом окне друг под другом (с помощью функции **subplot**).

### Справка

Для вычисления ДПФ в MATLAB имеется функция **fft** (она вычисляет ДПФ с использованием быстрых алгоритмов — FFT, Fast Fourier Transform). В простейшем случае она вызывается без дополнительных параметров:  $\mathbf{y} = \mathbf{fft}(\mathbf{x})$ . Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор отсчетов сигнала;  $\mathbf{y}$  — вектор результатов вычисления ДПФ.

### Замечание

Чтобы улучшить внешний вид частотных графиков, целесообразно изменить принятые по умолчанию пропорции графического окна, растянув его в ширину.

**3. Оценка ширины спектра сигнала.** Используя обратное ДПФ, определите минимальное число низкочастотных гармонических составляющих сигнала, содержащих не менее 90 % его энергии. Примерная последовательность действий:

1. Рассчитайте энергию исходного сигнала:

$$E_0 = \sum_k |x(k)|^2. \quad (3.6)$$

2. Создайте копию вектора результатов ДПФ под новым именем.
3. Обнулите в созданной копии результатов ДПФ те элементы, которые соответствуют гармоникам с номерами, превышающими некоторое пороговое значение  $N_{\max}$ . Исходное значение  $N_{\max}$  следует принять равным 0.

### Замечание

При определении диапазона номеров обнуляемых элементов ДПФ следует принять во внимание следующее:

- нумерация элементов массивов в MATLAB начинается с *единицы*;
- первое значение в массиве результатов ДПФ соответствует *постоянной составляющей* сигнала ( $\dot{X}(0)$ );
- для получения корректного спектра *вещественного* сигнала в векторе результатов ДПФ должны сохраняться *пары* значений, соответствующие парам одинаковых по модулю положительных и отрицательных частот;
- вторая половина вектора результатов ДПФ с учетом периодичности спектров дискретных сигналов соответствует *отрицательным частотам*. В качестве примера в табл. 3.1 приведены разные способы нумерации элементов 8-точечного ДПФ. Двойной рамкой и полужирным шрифтом в таблице выделен диапазон элементов вектора, который необходимо обнулить в случае  $N_{\max} = 2$ .



Таблица 3.1

Номер элемента вектора MATLAB	1	2	3	4	5	6	7	8
Номер $n$ из теоретической формулы ДПФ	0	1	2	3	4	5	6	7
Нумерация с использованием отрицательных частот	0	1	2	3	$\pm 4$	$-3$	$-2$	$-1$

4. Вычислите обратное ДПФ и постройте график получившегося сигнала функцией **stem**.

#### Справка

Вычисление обратного ДПФ производится с помощью функции **ifft**:

$$\mathbf{x} = \text{ifft}(\mathbf{y});$$

5. Вычислите энергию получившегося сигнала по (3.6). Если она меньше, чем 90 % энергии исходного сигнала  $E_0$ , увеличьте  $N_{\max}$  на единицу и повторите шаги 3–5.

Поиск значения  $N_{\max}$  можно реализовать вручную (задавая новое значение, запуская программу и анализируя результаты) либо написать MATLAB-программу, которая будет это делать автоматически.

В результате выполнения данного пункта работы должно быть получено значение  $N_{\max}$ , при котором сигнал после обратного БПФ содержит не менее 90 % энергии исходного сигнала. Кроме того, должен быть построен график указанного сигнала вместе с исходным *в общих координатных осях*.

**4. Дополнение сигнала нулями.** Скопируйте исходный дискретный сигнал в переменную с новым именем и добавьте к концу этой копии сигнала нулевые отсчеты в количестве, равном длине сигнала (длина вектора должна, таким образом, увеличиться в 2 раза). Вычислите ДПФ для дополненного нулями сигнала, постройте (с помощью функции **stem**) графики модуля и фазы спектральных отсчетов в одном графическом окне друг под другом (с помощью функции **subplot**).

#### Замечание

Чтобы улучшить внешний вид частотных графиков, целесообразно изменить принятые по умолчанию пропорции графического окна, растянув его в ширину.

**5. Измерение скорости расчетов при вычислении ДПФ непосредственно по теоретической формуле.** Функция **fft** гибко выбирает алгоритм вычисления в зависимости от длины преобразуемого сигнала, поэтому измерить с ее помощью скорость вычислений по прямой формуле не удастся. Для реализации такого измерения придется вычислять ДПФ как произвольное

линейное преобразование — путем перемножения вектора сигнала и квадратной матрицы преобразования.

### Справка

Матрица преобразования для ДПФ рассчитывается функцией `dftmtx` ( $N$  — размер вычисляемой матрицы ДПФ):

`D = dftmtx(N);`

Для измерения скорости вычислений необходимо реализовать следующий код (предполагается, что вектор сигнала  $\mathbf{x}$  — строка). Для измерения времени выполнения фрагмента кода используется пара функций `tic` и `toc` (первая запускает таймер, вторая выводит результат), вычисления повторяются в цикле много раз, чтобы время выполнения кода было достаточно велико.

### Внимание!

Число повторений цикла (в приведенном примере — 1000) необходимо подобрать экспериментально, чтобы время расчета при  $N = 1024$  составляло *примерно 1 секунду*. Это время ощутимо варьируется от запуска к запуску, так что стремиться к большой точности здесь не следует.

```
N = 1024;           % размер ДПФ
% дополнение сигнала нулями до длины N
x1 = [x zeros(1, N-length(x))];
D = dftmtx(N);     % матрица ДПФ
y = zeros(1, N);  % массив для результатов ДПФ
tic                % старт таймера
for k = 1:1000    % цикл для измерения времени
    y = x1 * D;   % вычисление ДПФ по прямой формуле
end
toc                % отображение измеренного времени
```

Запишите подобранное число повторений цикла  $K$  и занесите измеренное время выполнения кода при  $N = 1024$  в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Параметр	$N$							
	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
Время, с								
Время однократного вычисления ДПФ, мкс								

Повторите эксперимент для остальных значений  $N$ , указанных в таблице, *не меняя* подобранное число повторений цикла  $K$ .

**Внимание!**

Все измерения должны осуществляться на одном и том же компьютере.

Последняя строка таблицы заполняется при подготовке отчета путем деления измеренных значений времени на использованное число повторений цикла  $K$ .

**Внимание!**

Время работы кода растет пропорционально  $N^2$ , поэтому для последнего значения 8192 оно будет составлять *около 1 минуты*.

**6. Измерение скорости расчетов при вычислении ДПФ с использованием быстрого алгоритма.** Функция `fft` гибко выбирает алгоритм вычисления в зависимости от длины преобразуемого сигнала, и при длине, равной степени двойки, будет использован широко известный алгоритм Кули—Тьюки, число операций в котором пропорционально  $N \log_2(N)$ .

Для измерения скорости вычислений необходимо реализовать следующий код. Его общая структура аналогична коду, приведенному выше, однако в явном виде дополнять сигнал нулями не нужно — функции `fft` можно передать дополнительный входной параметр, указывающий размерность вычисляемого ДПФ:  $y = \text{fft}(x, N)$ .

**Внимание!**

Число повторений цикла (в приведенном примере — 100 000) необходимо подобрать экспериментально, чтобы время расчета при  $N = 1024$  составляло *примерно 1 секунду*. Это число должно оказаться *примерно в 100 раз больше*, чем в предыдущем случае.

```
N = 1024;           % размер ДПФ
y = zeros(1, N);   % массив для результатов ДПФ
tic                % старт таймера
for k = 1:100000   % цикл для измерения времени
    y = fft(x, N); % вычисление БПФ
end
toc                % отображение измеренного времени
```

Запишите подобранное число повторений цикла  $K$  и занесите измеренное время выполнения кода при  $N = 1024$  в таблицу, по форме повторяющую табл. 3.2.

Повторите эксперимент для остальных значений  $N$ , указанных в таблице, *не меняя* подобранное число повторений цикла  $K$ .

### **Внимание!**

Все измерения должны осуществляться на том же компьютере, на котором производились измерения при вычислении ДПФ непосредственно по теоретической формуле.

Последняя строка таблицы заполняется при подготовке отчета путем деления измеренных значений времени на использованное число повторений цикла  $K$ .

**7. Подготовка материалов для отчета.** В завершение работы необходимо скопировать в документ Microsoft Word (в качестве заготовки для отчета) созданный программный код и все полученные графики:

- исходный дискретный сигнал;
- модуль и фазу результатов ДПФ;
- дискретный сигнал, восстановленный после обнуления части гармоник, и исходный сигнал, построенные в общих координатных осях;
- модуль и фазу результатов ДПФ при дополнении сигнала нулями.

### **3.5. Содержание отчета**

Отчет должен содержать созданный в процессе работы программный код, оформленный в виде законченного документа (с заголовками разделов, формулами и комментариями к коду). Полученные в ходе работы графики и заполненные таблицы размещаются в соответствующих разделах отчета.

Используя значение  $N_{\max}$ , необходимо рассчитать ширину спектра сигнала *в герцах*.

Кроме того, в соответствующем разделе должны быть построены графики затрат времени на *однократное* вычисление ДПФ прямым и быстрым методами. Для получения этих данных следует разделить занесенные в таблицы значения времени на использованное количество повторений цикла. Вдоль горизонтальной оси следует откладывать  $\log_2(N)$ . Вертикальная ось также должна быть представлена в логарифмическом масштабе.

Совместно с этими экспериментальными графиками следует построить аппроксимирующие зависимости:

- для прямого расчета ДПФ:  $t = k_1 N^2$ ;
- для быстрого расчета ДПФ:  $t = k_2 N \log_2(N)$ .

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  необходимо подобрать самостоятельно так, чтобы аппроксимирующая зависимость при значениях  $N = 1024$  и  $8192$  была как можно ближе к результатам измерений. Значения  $k_1$  и  $k_2$  должны быть приведены в отчете.

В конце отчета необходимо привести выводы по результатам работы.

### 3.6. Контрольные вопросы

1. Запишите матрицу ДПФ для  $N = 4$ .
2. Как вычислить энергию сигнала через его ДПФ?
3. Является ли монотонной зависимость энергии сигнала после обнуления части спектра и обратного ДПФ от числа использованных гармоник? Ответ обосновать.
4. Можно ли найти такой сигнал  $\{x(k)\}$  длиной  $N$  отсчетов, чтобы его ДПФ совпадало с самим сигналом, т. е. чтобы для всех  $n$  выполнялось равенство  $\hat{X}(n) = x(n)$ ?
5. Длину дискретного сигнала увеличили в 2 раза путем дублирования каждого отсчета ( $\{x(0), x(0), x(1), x(1), \dots, x(N-1), x(N-1)\}$ ). Как изменятся результаты ДПФ?
6. Сигнал представляет собой сумму двух синусоид с частотами 300 и 320 Гц. Частота дискретизации равна 10 кГц, длина сигнала 500 отсчетов. Как примерно будет выглядеть модуль ДПФ этого сигнала?
7. Сигнал представляет собой сумму двух синусоид с частотами 400 и 450 Гц. Частота дискретизации равна 5 кГц, длина сигнала 200 отсчетов. Как примерно будет выглядеть модуль ДПФ этого сигнала?
8. Сигнал представляет собой сумму двух синусоид с частотами 500 и 525 Гц. Частота дискретизации равна 10 кГц, к сигналу длиной 400 отсчетов добавлено столько же нулевых значений. Как примерно будет выглядеть модуль ДПФ этого сигнала?
9. Последовательность отсчетов  $\{x(k)\}$  длиной  $N$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) подвергли прямому ДПФ. К полученному результату еще раз применили прямое ДПФ. Чему будет равен результат? (Выразить его через  $\{x(k)\}$ .)
10. Последовательность отсчетов  $\{x(k)\}$  длиной  $N$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) подвергли обратному ДПФ. К полученному результату еще раз применили обратное ДПФ. Чему будет равен результат? (Выразить его через  $\{x(k)\}$ .)

11. Отсчеты последовательности  $\{x(k)\}$  являются чисто мнимыми. Какими свойствами благодаря этому будет обладать ее ДПФ?

12. Придумайте максимально эффективную (по числу арифметических операций) схему реализации ДПФ для  $N = 3$ . Сколько вещественных сложений/вычитаний и умножений она требует? (Считать, что вычитание — отдельная операция, по сложности эквивалентная сложению, так что операции умножения на  $-1$  не требуются.)

13. Как с помощью ДПФ можно получить  $N$  равномерно расположенных отсчетов спектра ( $\dot{X}(j2\pi n/N)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) последовательности конечной длины, состоящей из  $M > N$  отсчетов?

14. Запишите матрицу ДПФ для  $N = 6$ .

15. К спектральному отсчету  $\dot{X}(N/2)$  прибавили единицу. Как изменится последовательность отсчетов  $\{x(k)\}$ , которой это ДПФ соответствует?

16. Экспериментальные и аппроксимирующие зависимости временных затрат на однократное вычисление ДПФ прямым и быстрым методами расходятся при низких значениях  $N$ . Как это можно объяснить?

## 4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

### 4.1. Цели работы

Синтез дискретного ФНЧ, удовлетворяющего заданным требованиям, путем использования нескольких алгоритмов:

- билинейного преобразования и четырех стандартных аналоговых прототипов;
- синтеза с использованием оконных функций;
- минимаксного синтеза;
- минимизации среднеквадратической ошибки.

### 4.2. Теоретические сведения

Под проектированием (или *синтезом*) цифрового фильтра понимается выбор таких наборов коэффициентов  $\{a_i\}$  и  $\{b_i\}$ , при которых характеристики получающегося фильтра удовлетворяют заданным требованиям.

При синтезе ФНЧ набор задаваемых параметров может выглядеть следующим образом (рис. 4.1):

- $F_d$  — частота дискретизации;
- $F_{\text{pass}}$  — граница полосы пропускания;
- $F_{\text{stop}}$  — граница полосы задерживания;
- $A_{\text{pass}}$  — допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания;
- $A_{\text{stop}}$  — требуемое подавление сигнала в полосе задерживания.

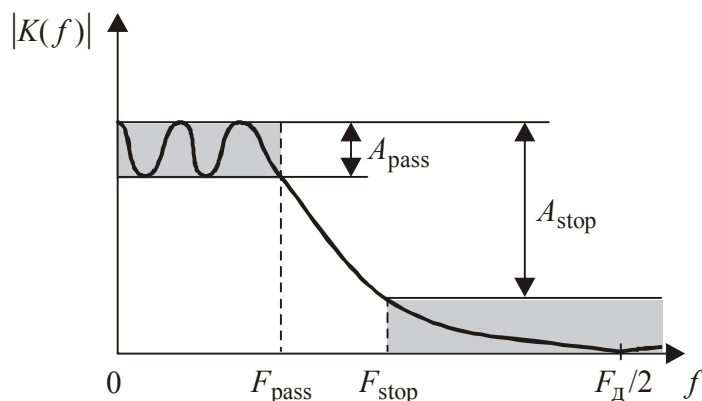


Рис. 4.1. Параметры, требуемые для синтеза ФНЧ

Серые области на рисунке демонстрируют допуски, в которые должна укладываться АЧХ фильтра в полосах пропускания и задерживания. В пере-

ходной зоне (диапазон частот  $F_{\text{pass}} \dots F_{\text{stop}}$ ) никаких требований к АЧХ рассчитываемого фильтра не предъявляется.

Номинальное значение коэффициента передачи фильтра в полосе пропускания, как правило, равно единице (0 дБ). В зависимости от способа расчета фильтра отклонения коэффициента передачи в полосе пропускания от единицы могут быть как односторонними, так и двусторонними.

**Методы синтеза** цифровых фильтров можно классифицировать по различным признакам:

- по типу получаемого фильтра:
  - методы синтеза *рекурсивных* фильтров;
  - методы синтеза *нерекурсивных* фильтров;
- по наличию аналогового прототипа:
  - методы синтеза *с использованием* аналогового прототипа (метод билинейного  $z$ -преобразования);
  - *прямые* (без использования аналогового прототипа) методы синтеза:
    - *оптимальные*, в которых численными итерационными методами ищется минимум заданной функции качества (минимаксный синтез и минимизация квадратической ошибки);
    - *субоптимальные*, не дающие оптимального решения, но позволяющие значительно упростить вычисления по сравнению с оптимальными методами (синтез с использованием окон).

**Метод билинейного  $z$ -преобразования** позволяет синтезировать рекурсивный дискретный фильтр по частотной характеристике аналогового прототипа. При синтезе дискретного фильтра по аналоговому прототипу необходимо реализовать переход из  $p$ -области в  $z$ -область, т. е. преобразовать функцию передачи аналогового фильтра  $H(p)$  в функцию передачи дискретного фильтра  $H(z)$ . Получающийся дискретный фильтр не может быть полностью идентичен аналоговому по своим характеристикам — хотя бы потому, что частотные характеристики дискретного фильтра являются периодическими. Можно говорить только об определенном *соответствии* характеристик аналогового и дискретного фильтров.

Функция передачи аналоговой цепи с сосредоточенными параметрами представляет собой дробно-рациональную функцию переменной  $p$ . Чтобы получить функцию передачи дискретного фильтра, необходимо перейти из  $p$ -области в  $z$ -область, причем дробно-рациональный характер функции должен



сохраниться. Поэтому замена для переменной  $p$  должна представлять собой также дробно-рациональную функцию переменной  $z$ . Чтобы частотные характеристики аналогового и дискретного фильтров были связаны простой зависимостью, искомая замена переменной должна отображать мнимую ось в  $p$ -области на единичную окружность в  $z$ -области. В этом случае частотные характеристики аналогового и дискретного фильтров будут связаны лишь трансформацией частотной оси, и никаких искажений «по вертикали» не будет.

Простейшей из функций, удовлетворяющих перечисленным требованиям, является *билинейное преобразование* (bilinear transformation):

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 2F_{\text{д}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Частотные характеристики аналогового  $\dot{K}_{\text{а}}(\omega)$  и дискретного  $\dot{K}_{\text{д}}(\omega)$  фильтров, как уже было сказано, связаны друг с другом лишь трансформацией частотной оси (для наглядного сопоставления формул частотная характеристика дискретного фильтра представлена как функция абсолютной частоты  $\omega = \tilde{\omega}T$ ):

$$\dot{K}_{\text{д}}(\omega) = \dot{K}_{\text{а}}\left(\frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right),$$

$$\dot{K}_{\text{а}}(\omega) = \dot{K}_{\text{д}}\left(\frac{2}{T} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right).$$

На низких частотах, когда  $\omega T \ll 1$ , тангенс примерно равен своему аргументу, откуда следует

$$\frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \approx \omega.$$

Поэтому в области низких частот частотные характеристики аналогового и дискретного фильтров почти совпадают. Далее, по мере ускорения роста функции тангенса, частотная характеристика дискретного фильтра все сильнее сжимается по горизонтали (по сравнению с аналоговым прототипом) и на частоте Найквиста, равной  $\pi/T$ , достигает значения, которое частотная характеристика аналогового фильтра имела бы на бесконечной частоте (рис. 4.2).

При билинейном  $z$ -преобразовании левая половина  $p$ -плоскости отображается внутрь единичной окружности на  $z$ -плоскости, поэтому синтез по ус-

тойчивому аналоговому прототипу даст гарантированно устойчивый дискретный фильтр.

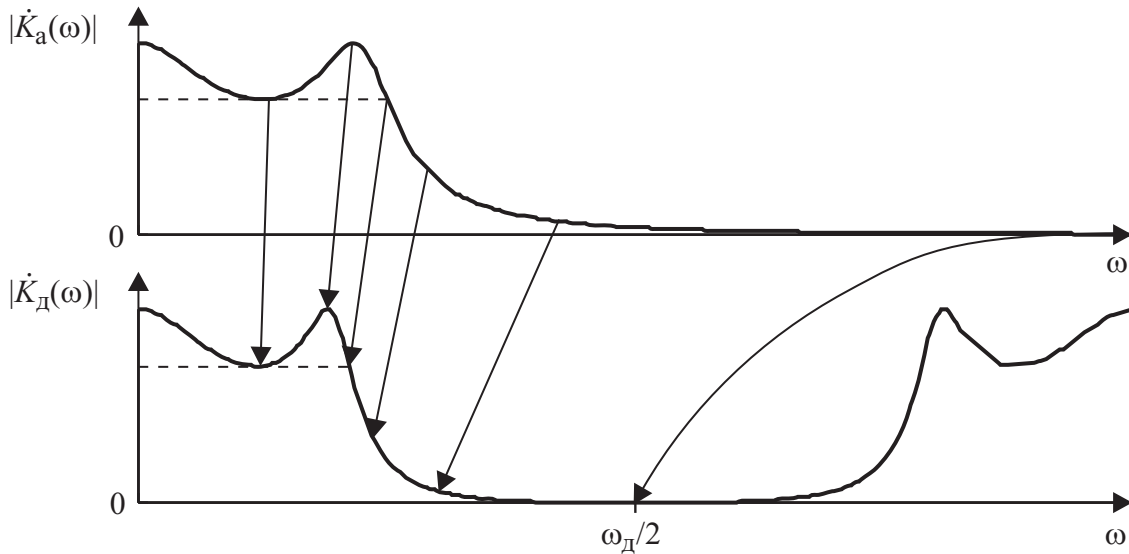


Рис. 4.2. Трансформация частотной оси при билинейном  $z$ -преобразовании

Для получения дискретного фильтра с заданными частотами среза необходимо скорректировать частоты среза аналогового прототипа, чтобы компенсировать искажения частотной оси. Так, для синтеза дискретного ФНЧ с частотой среза  $\omega_{0д}$  аналоговый фильтр-прототип должен иметь частоту среза  $\omega_{0а}$ , связанную с  $\omega_{0д}$  следующим образом:

$$\omega_{0а} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_{0д} T}{2} \right).$$

**Оптимальные методы.** Чаще всего отправной точкой при расчете фильтра служит его желаемая частотная характеристика — либо АЧХ (когда фазовые характеристики не важны), либо комплексный коэффициент передачи. В качестве минимизируемой меры отклонения характеристики фильтра от заданной в общем случае используется  $p$ -норма ошибки  $e(\omega)$  (ошибка представляет собой разность желаемой и получаемой характеристик):

$$L_p = \sqrt[p]{\int_0^{\omega_d} |e(\omega)|^p d\omega}. \quad (4.1)$$

Чаще всего используются 2 значения  $p$ :  $p = 2$  (квадратическая ошибка) и  $p = \infty$  (максимальное абсолютное значение ошибки). Поскольку корень  $p$ -й степени, входящий в (4.1), при любом  $p$  является монотонно возрастающей функцией, при расчете минимизируемой величины его можно не вычислять.

Если при синтезе фильтра интерес представляет только его АЧХ, минимизируемая функция при использовании  $p$ -нормы ошибки рассчитывается следующим образом:

$$L_p = \int_0^{\omega_d} w(\omega) |D(\omega) - \dot{K}(\omega)|^p d\omega, \quad (4.2)$$

где  $D(\omega)$  — желаемая АЧХ;  $|\dot{K}(\omega)|$  — АЧХ фильтра;  $w(\omega)$  — неотрицательная вещественная весовая функция. Использование весовой функции позволяет придать разную значимость различным участкам частотной оси. В частности, это дает возможность задать переходные зоны, поведение АЧХ в которых не имеет значения. В этих зонах значение весовой функции должно быть нулевым. Как правило, функция  $w(\omega)$  является кусочно-постоянной.

Если необходимо аппроксимировать заданную частотную зависимость *комплексного* коэффициента передачи, норма ошибки аппроксимации рассчитывается так:

$$L_p = \int_0^{\omega_d} w(\omega) |\dot{D}(\omega) - \dot{K}(\omega)|^p d\omega. \quad (4.3)$$

Здесь  $\dot{D}(\omega)$  — желаемая комплексная частотная характеристика;  $\dot{K}(\omega)$  — частотная характеристика реального фильтра.

Для рекурсивных фильтров минимизация критерия (4.2) или (4.3) требует применения методов численной оптимизации. В случае же нерекурсивных фильтров, коэффициенты которых связаны с частотной характеристикой линейно, возможны более простые подходы. В частности, синтез оптимальных нерекурсивных фильтров по критерию (4.3) при  $p = 2$  приводит к минимизации квадратической ошибки, а при  $p = \infty$  — к минимаксной оптимизации.

**Минимизация квадратической ошибки** сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов нерекурсивного фильтра. Получающаяся при этом АЧХ фильтра имеет неравномерные пульсации (рис. 4.3, *a*), уровень которых возрастает вблизи частот, где желаемая частотная характеристика изменяется скачкообразно. Это связано с явлением Гиббса. Введение переходных полос, для которых  $w(\omega) = 0$ , позволяет уменьшить уровень пульсаций на краях полос пропускания и задерживания, но эти пульсации все равно остаются неравномерными.

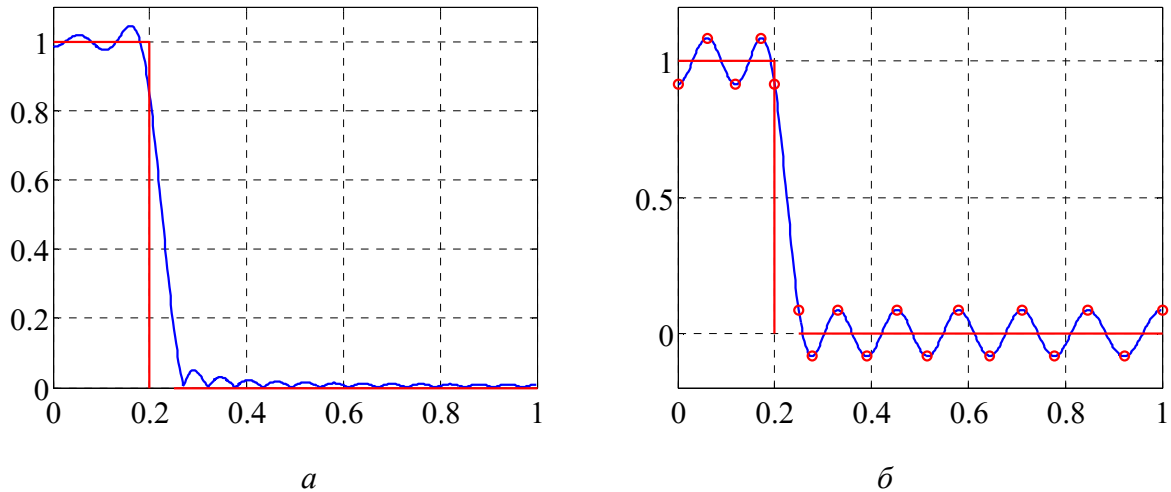


Рис. 4.3. Пульсации АЧХ при минимизации квадратической ошибки (а) и ЧХ при минимаксной оптимизации (б)

**Минимаксная оптимизация.** При  $p = \infty$  норма ошибки (4.3) равна максимальному абсолютному отклонению характеристики от заданной. Минимизация этой нормы, т. е. решение *минимаксной* (minimax) оптимизационной задачи

$$\max_{\omega} \left( w(\omega) \left| \dot{D}(\omega) - \dot{K}(\omega) \right| \right) \rightarrow \min_{\{b_i\}, \{a_i\}},$$

приводит к тому, что упомянутое максимальное абсолютное отклонение достигается на *нескольких* частотах. Таким образом, данный подход приводит к фильтрам с равномерными пульсациями АЧХ (рис. 4.3, б), что математически выражается следующим образом:

$$w_{\text{pass}} d_{\text{pass}} = w_{\text{stop}} d_{\text{stop}},$$

где  $w_{\text{pass}}$  и  $w_{\text{stop}}$  — значения кусочно-постоянной весовой функции  $w(\omega)$  в полосе пропускания и полосе задерживания соответственно;  $d_{\text{pass}}$  — максимальное отклонение АЧХ от заданной в полосе пропускания;  $d_{\text{stop}}$  — максимальное значение АЧХ в полосе задерживания.

Для нерекурсивных фильтров минимаксная задача может быть решена с помощью элегантного итерационного метода, основанного на чебышевской аппроксимации с использованием алгоритма многократной замены Ремеза. Соответствующий алгоритм расчета применительно к синтезу дискретных фильтров разработан Парксом и Макклелланом и базируется на двух основных положениях:

- максимальное абсолютное отклонение частотной характеристики от заданной наблюдается в экстремумах АЧХ, а также на граничных частотах полос пропускания и задерживания, причем знаки отклонения *чередуются*;
- значение частотной характеристики на фиксированной частоте *линейно* зависит от коэффициентов фильтра.

Таким образом, если известны значения частот (их называют экстремальными), на которых наблюдается максимальное отклонение частотной характеристики от заданной, то для нахождения коэффициентов фильтра достаточно решить систему линейных уравнений.

Сущность алгоритма Паркса—Макклеллана заключается в итерационном поиске экстремальных частот. После задания начального приближения циклически выполняются следующие действия:

- составляется и решается система линейных уравнений для нахождения коэффициентов фильтра, дающих частотную характеристику, отклонения которой от заданной имеют на экстремальных частотах одинаковый модуль и чередующиеся знаки;
- рассчитывается частотная характеристика получившегося фильтра и определяются положения ее локальных экстремумов. В результате формируется новый набор экстремальных частот.

Перечисленные шаги выполняются до тех пор, пока изменение экстремальных частот не станет меньше заданного порога.

**Синтез с использованием окон** является субоптимальным методом и предназначен для синтеза нерекурсивных фильтров. Идея его очень проста. Прежде всего задается желаемый комплексный коэффициент передачи в виде непрерывной функции, определенной в диапазоне частот от нуля до частоты Найквиста (если синтезируется вещественный фильтр) или до частоты дискретизации (если проектируется комплексный фильтр). Обратное преобразование Фурье этой характеристики, вычисленное с учетом ее периодического характера, даст бесконечную в обе стороны последовательность отсчетов импульсной характеристики. Для получения реализуемого нерекурсивного фильтра заданного порядка эта последовательность усекается — из нее выбирается центральный фрагмент нужной длины.

Простое усечение последовательности отсчетов импульсной характеристики соответствует использованию прямоугольного окна. Из-за усечения первоначально заданная частотная характеристика искажается — она свора-

чивается со спектром окна. В результате появляются переходные полосы между областями пропускания и задерживания, наблюдаются колебания коэффициента передачи в полосах пропускания, а в полосах задерживания АЧХ, как правило, приобретает лепестковый характер.

Для ослабления перечисленных эффектов и прежде всего для уменьшения уровня лепестков в полосах задерживания усеченная импульсная характеристика умножается на весовую функцию (окно), плавно спадающую к краям.

Часто используемой на практике весовой функцией является окно Кайзера, форма которого зависит от дополнительного параметра  $\beta$ . Существует эмпирическая формула, связывающая параметр  $\beta$  с уровнем подавления боковых лепестков  $\alpha$  (в дБ) при синтезе ФНЧ:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha < 21, \\ 0,5842(\alpha - 21)^{0,4} + 0,07886(\alpha - 21), & 21 \leq \alpha \leq 50, \\ 0,1102(\alpha - 8,7), & \alpha > 50. \end{cases}$$

Аналогично методу минимизации квадратической ошибки для оконного метода характерны неравномерные пульсации АЧХ, уровень которых возрастает вблизи переходной зоны (см. рис. 4.3, а). Однако в данном методе уровни пульсаций на краях полос пропускания и задерживания всегда примерно совпадают друг с другом.

### 4.3. Индивидуальное задание

Требования к синтезируемому фильтру являются индивидуальными для каждой бригады и выдаются преподавателем в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

Частота дискретизации $F_d$ , кГц	Граница полосы пропускания $F_{pass}$ , кГц	Граница полосы задерживания $F_{stop}$ , кГц	Допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания $A_{pass}$ , дБ	Требуемое подавление сигнала в полосе задерживания $A_{stop}$ , дБ

### 4.4. Указания к выполнению работы

Синтез фильтров выполняется с помощью графической среды **Filter Design and Analysis Tool**, входящей в состав пакета расширения *Signal Processing Toolbox* системы MATLAB.

**1. Подготовка к началу работы.** Запустите MATLAB и сделайте текущей папку вашей бригады.

Для запуска среды **Filter Design and Analysis Tool** наберите в главном окне MATLAB следующую команду:

**fdatool**

Появится окно среды **Filter Design and Analysis Tool**.

Переключатель **Response Type** (тип синтезируемой АЧХ) в процессе выполнения работы должен оставаться в положении по умолчанию — **Low-pass** (ФНЧ).

**2. Метод билинейного преобразования.** Установите переключатель **Design Type** (метод синтеза) в положение **IR** (рекурсивные фильтры).

В выпадающем списке, расположенном справа от пункта **IR**, выберите фильтр Баттерворта (**Butterworth**) и выполните следующие действия:

1. Установите переключатель **Filter Order** в положение автоматического определения порядка фильтра (**Minimum Order**).

2. В разделе **Frequency Specifications** задайте частоту дискретизации (**Fs**) и граничные частоты полосы пропускания (**Fpass**) и задерживания (**Fstop**). В выпадающем списке **Units** должны быть выбраны абсолютные единицы измерения частоты, удобные для ввода чисел (в Гц или кГц).

3. В разделе **Magnitude Specifications** задайте величину неравномерности АЧХ в полосе пропускания (**Apass**) и подавление сигнала в полосе задерживания (**Astop**). В выпадающем списке **Units** должен быть выбран вариант **dB** (децибелы).


4. Произведите синтез фильтра, щелкнув на кнопке **Design Filter**. Занесите порядок получившегося фильтра в табл. 4.2 (он отображается в строке **Order** раздела **Current Filter Information** в левом верхнем углу окна среды **FDA Tool**).

Таблица 4.2

Тип фильтра	Порядок фильтра	$F_{\text{pass}}$ , кГц	$F_{\text{stop}}$ , кГц	$\tau_{\text{min}}$ , отсчеты	$\tau_{\text{max}}$ , отсчеты
Баттерворта					
Чебышева 1-го рода					
Чебышева 2-го рода					
Эллиптический					

5. Сохраните в отчете графики АЧХ, ФЧХ, групповой задержки, импульсной характеристики и расположения нулей и полюсов.

### Справка

Для переноса необходимых графиков в документ Word следует щелкнуть в панели инструментов среды FDATool на кнопке **Full View Analysis**  или выбрать команду меню **View > Filter Visualization Tool**. Откроется окно визуализатора характеристик фильтров, в котором можно копировать графики в буфер обмена с помощью команды меню **Edit > Copy Figure**.

6. По графику АЧХ определите *реальные* границы переходной зоны получившегося фильтра, т. е. определите частоты  $F_{\text{pass}}$  и  $F_{\text{stop}}$  (с точностью до 1 Гц), на которых коэффициент передачи в последний раз достигает значения  $-A_{\text{pass}}$  (в дБ) и в первый раз достигает значения  $-A_{\text{stop}}$  (в дБ). Измерения производятся визуально, с использованием средств масштабирования графика. Занесите результаты в табл. 4.2.

7. По графику групповой задержки (**Group Delay Response**) определите минимальную ( $\tau_{\text{min}}$ ) и максимальную ( $\tau_{\text{max}}$ ) величину задержки (в отсчетах), вносимой фильтром *в полосе пропускания* (т. е. в диапазоне частот  $0 \dots F_{\text{pass}}$ ). Измерения производятся визуально, с использованием средств масштабирования графика. Занесите результаты в табл. 4.2.

Повторите пункты 1–6 для оставшихся стандартных способов аппроксимации прямоугольных АЧХ:

- фильтр Чебышева 1-го рода (**Chebyshev Type I**);
- фильтр Чебышева 2-го рода (**Chebyshev Type II**);
- эллиптический фильтр (фильтр Золотарева—Кауэра) (**Elliptic**).

**3. Синтез с использованием окон.** Установите переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выберите метод синтеза с использованием окон (**Window**).

Задайте автоматический расчет порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Minimum order**) и убедитесь, что в разделах **Frequency Specifications** и **Magnitude Specifications** указаны требуемые значения. В разделе **Options** будет автоматически выбрано окно Кайзера (**Kaiser**), так как только для него поддерживается автоматический выбор порядка фильтра.

Синтезируйте фильтр, занесите порядок получившегося фильтра в табл. 4.3 (он отображается в строке **Order** раздела **Current Filter Informa-**



**tion** в левом верхнем углу окна среды FDATool), сохраните для отчета графики его АЧХ, импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости.

Измерьте по графику АЧХ минимальный и максимальный коэффициенты передачи фильтра в полосе пропускания ( $K_{p \min}$  и  $K_{p \max}$ ), а также максимальный коэффициент передачи в полосе задерживания ( $K_{s \max}$ ). Измерения производятся визуально, с использованием средств масштабирования графика. Занесите результаты в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Метод синтеза	Порядок фильтра	$K_{p \min}$ , дБ	$K_{p \max}$ , дБ	$K_{s \max}$ , дБ	$W_{stop}$
Оконный					—
Минимаксный					
Среднеквадратический					

**4. Синтез по минимаксному критерию (метод Ремеза).** Установите переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выберите минимаксный метод синтеза (**Equiripple**).

Задайте автоматический расчет порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Minimum order**) и убедитесь, что в разделах **Frequency Specifications** и **Magnitude Specifications** указаны требуемые значения.

Синтезируйте фильтр, занесите порядок получившегося фильтра в табл. 4.3 (он отображается в строке **Order** раздела **Current Filter Information** в левом верхнем углу окна среды FDATool), сохраните для отчета графики его АЧХ, импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости.

Измерьте по графику АЧХ минимальный и максимальный коэффициенты передачи фильтра в полосе пропускания ( $K_{p \min}$  и  $K_{p \max}$ ), а также максимальный коэффициент передачи в полосе задерживания ( $K_{s \max}$ ). Измерения производятся визуально, с использованием средств масштабирования графика. Занесите результаты в табл. 4.3.

Задайте ручной выбор порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и установите порядок фильтра, получившийся при автоматическом его выборе.

Постепенно увеличивая значение весового коэффициента для полосы задерживания (поле **Wstop** в разделе **Magnitude Specifications**) и синтезируя фильтр заново, добейтесь того, чтобы уровень боковых лепестков АЧХ удов-

летворял требованиям к подавлению сигнала в полосе задерживания (т. е. не превышал  $-A_{\text{stop}}$  (в дБ)). Занесите найденное значение **Wstop** в табл. 4.3.

**5. Синтез путем минимизации среднеквадратической ошибки.** Установите переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выберите метод синтеза по минимуму среднеквадратической ошибки (**Least-squares**).

Задайте ручное указание порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и введите значение порядка фильтра, полученное ранее в п. 4 при автоматическом выборе порядка для минимаксного метода.

Убедитесь, что в разделах **Frequency Specifications** и **Magnitude Specifications** указаны требуемые значения. Синтезируйте фильтр.

Постепенно увеличивая значение весового коэффициента для полосы задерживания (поле **Wstop** в разделе **Magnitude Specifications**) и синтезируя фильтр заново, добейтесь того, чтобы уровень боковых лепестков АЧХ удовлетворял требованиям к подавлению сигнала в полосе задерживания (т. е. не превышал  $-A_{\text{stop}}$  (в дБ)). Занесите найденное значение **Wstop** в табл. 4.3.

Сохраните в отчете графики АЧХ фильтра, его импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости.

Измерьте по графику АЧХ минимальный и максимальный коэффициенты передачи фильтра в полосе пропускания ( $K_{p \text{ min}}$  и  $K_{p \text{ max}}$ ), а также максимальный коэффициент передачи в полосе задерживания ( $K_{s \text{ max}}$ ). Измерения производятся визуально, с использованием средств масштабирования графика. Занесите результаты в табл. 4.3.

**6. Сохранение результатов синтеза.** В завершение работы сохраните сеанс среды FDATool командой меню **File** ➤ **Save session** или **Save session as**. В сохраненном файле содержатся последние значения всех введенных во время работы параметров, что позволит при необходимости легко восстановить все полученные графики.

#### 4.5. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- исходные данные в виде табл. 4.1;
- формулу (получить самостоятельно) и построенный по ней график импульсной характеристики *идеального дискретного ФНЧ* с частотой среза, равной границе полосы пропускания  $F_{\text{pass}}$ ;

- результаты измерений в виде заполненных табл. 4.2 и 4.3;
- перечисленные выше графики АЧХ, ФЧХ, групповой задержки, импульсных характеристик, расположения нулей/полюсов для синтезированных фильтров;
- выводы по результатам работы.

#### 4.6. Контрольные вопросы

1. При сохранении всех требований к АЧХ синтезируемого ФНЧ (границы полос пропускания и задерживания, допустимые уровни пульсаций в полосах пропускания и задерживания) частоту дискретизации, на которой работает система, повысили в 2 раза. Что произойдет с требуемым порядком фильтра?

2. Как по графику АЧХ можно различить фильтры, синтезированные путем минимизации квадратической ошибки и минимаксным методом?

3. Чем отличаются параметры фильтров с симметричными (четная симметрия) импульсными характеристиками, у одного из которых в середине характеристики имеется один максимальный по величине отсчет, а у другого — два одинаковых отсчета максимального уровня?

4. Какие из синтезированных фильтров обеспечивают бесконечное затухание сигнала на частоте Найквиста и почему?

5. По графикам АЧХ определить, какими методами могли быть синтезированы данные фильтры.

6. Почему не для всех применений можно использовать рекурсивные фильтры?

7. Можно ли в нерекурсивном фильтре получить нулевой коэффициент передачи на частоте Найквиста?

8. Почему именно минимаксный метод дал минимальный порядок фильтра при синтезе нерекурсивных фильтров?

9. При каких условиях фильтр Чебышева 2-го рода будет иметь нулевой коэффициент передачи на частоте Найквиста?

10. При каких условиях эллиптический фильтр будет иметь нулевой коэффициент передачи на частоте Найквиста?

11. Получить формулу для бесконечной ИХ идеального дискретного фильтра верхних частот (ФЧХ считать равной нулю на всех частотах).

12. Получить функцию передачи, структурную схему и ИХ дискретного фильтра, полученного билинейным преобразованием дифференцирующей RC-цепочки.

13. При синтезе нерекурсивного ФНЧ по минимаксному критерию используется весовая функция, равная единице в полосах пропускания и задерживания и нулю в переходной зоне между ними. Как повлияет изменение ширины этой переходной зоны на величину пульсаций АЧХ получаемого фильтра?

14. Получить формулу для бесконечной ИХ комплексного фильтра с идеальной односторонней полосой пропускания с шириной, равной половине частоты Найквиста (коэффициент передачи равен единице на частотах от 0 до  $\pi/2$  и нулю на отрицательных частотах от  $-\pi$  до 0 и на положительных частотах от  $\pi/2$  до  $+\pi$ ).

15. Какие типы симметрии (I, II, III, IV) могут иметь нерекурсивные фильтры, синтезируемые в данной лабораторной работе?

16. Какими методами могли быть синтезированы эти 2 нерекурсивных фильтра:

а) ФНЧ имеет пульсации, уровень которых как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания возрастает при приближении к частоте среза;

б) ФНЧ имеет пульсации, величина которых в пределах полосы пропускания и в пределах полосы задерживания постоянна (хотя их величина в этих двух полосах необязательно совпадает)?

17. Исходя из значений  $A_{\text{pass}}$  и  $A_{\text{stop}}$ , вычислить теоретическое значение весового коэффициента  $w_{\text{stop}}$  для использования в минимаксном алгоритме синтеза (считать, что  $w_{\text{pass}} = 1$ ). Сопоставить его с экспериментально подобранным значением.

18. Какое из требований —  $A_{\text{pass}}$  или  $A_{\text{stop}}$  — является более жестким? Проиллюстрируйте ответ результатами синтеза фильтра оконным методом.

## 5. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ И ОКРУГЛЕНИЯ

### 5.1. Цели работы

- Исследование свойств шума квантования.
- Исследование влияния округления коэффициентов фильтра на его параметры.
- Исследование собственного шума цифрового фильтра.

### 5.2. Теоретические сведения

**Форматы представления чисел.** Система цифровой обработки сигналов представляет собой некое *вычислительное устройство*, числа в котором хранятся с использованием двоичной системы счисления. Для хранения каждого числа выделяется ограниченный объем памяти, а соответствие между содержимым этой памяти и числом называется *форматом представления чисел*. Стандартными являются 2 варианта: форматы с *фиксированной запятой* (fixed point) и с *плавающей запятой* (floating point).

Независимо от используемого формата количество представимых чисел является конечным: с помощью  $K$  бит можно представить  $2^K$  различных чисел.

Название «формат с фиксированной запятой» означает, что в двоичном представлении дробного числа для хранения его целой и дробной частей отведено фиксированное число разрядов. Иными словами, запятая, разделяющая целую и дробную части в двоичном представлении числа, находится на *фиксированном* месте. Часто формат с фиксированной запятой обозначают парой целых чисел:  $M.N$ , где  $M$  — число разрядов целой части числа (включая знак), а  $N$  — число разрядов дробной части.

Для расчета представляемого числа отдельные биты суммируются с весовыми коэффициентами, равными степеням двойки (для разрядов дробной части показатели степени являются отрицательными). Отрицательные числа хранятся с использованием дополнительного кода; это означает, что вес самого старшего (левого) разряда является отрицательным.

В качестве примера в табл. 5.1 показано, как выглядят двоичные представления некоторых чисел в формате 4.2.

Таблица 5.1

Вес двоичного разряда						Представляемое число (формат 4.2)
$-2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	
0	0	0	0	.	0	0
0	0	0	0	.	0	1
0	0	1	1	.	1	0
0	1	1	1	.	1	1
1	0	0	0	.	0	0
1	0	0	0	.	0	1
1	1	1	1	.	1	0
1	1	1	1	.	1	1

Таблица 5.1 наглядно показывает основные черты форматов с фиксированной запятой:

- самые маленькие (по модулю) представимые числа равны  $\pm 2^{-N}$ ;
- шаг между соседними представимыми числами является фиксированным, он равен  $2^{-N}$ ;
- неотрицательным числам соответствует нулевое значение старшего бита, отрицательным — единичное;
- диапазон представимых чисел несимметричен: самое большое по модулю отрицательное число равно  $-2^{M-1}$ , а максимальное положительное — на единицу младшего разряда меньше, чем  $2^{M-1}$ , оно равно  $2^{M-1} - 2^{-N}$ .

Достоинствами формата с фиксированной запятой являются равномерность шага представимых чисел и простота реализации арифметических операций; главный недостаток — ограниченный *динамический диапазон*. Динамическим диапазоном называют отношение между самым большим и самым малым по модулю (но отличным от нуля) числами, которые можно представить с помощью данного формата. Для формата с фиксированной запятой это отношение равно  $2^{M+N-1}$ .

В формате с *плавающей* запятой используется экспоненциальное представление чисел:  $x = s \cdot f \cdot 2^e$ , где  $s = \pm 1$  — знак числа;  $f$  — мантисса (хранится в формате с фиксированной запятой);  $e$  — порядок (целое число). Благодаря экспоненциальному представлению этот формат обладает существенно большим динамическим диапазоном, чем формат с фиксированной запятой при том же общем числе бит для хранения числа. Однако платой за это является неравномерность ряда чисел и повышенная сложность реализации арифметических операций.

Наиболее серьезные проблемы, связанные с конечной точностью представления чисел, возникают при использовании форматов с фиксированной запятой, поэтому в данной лабораторной работе рассматриваются только они.

**Шум квантования.** *Квантованием* называется процесс преобразования истинных значений отсчетов сигнала в двоичные числа, имеющие конечное число разрядов. При представлении отсчетов дискретного сигнала в виде чисел с ограниченной разрядностью происходит их округление. Разность  $e(t)$  между исходным и округленным значениями называется *шумом квантования*:

$$e(t) = s(t) - s_k(t),$$

где  $s(t)$  — исходный сигнал;  $s_k(t)$  — квантованный сигнал.

При *равномерном* квантовании значения шума квантования лежат в следующих пределах:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e(t) \leq \frac{\Delta}{2},$$

где  $\Delta$  — расстояние между соседними *уровнями квантования*, т. е. разность между ближайшими возможными значениями квантованного сигнала.

В большинстве случаев можно считать  $e(t)$  случайным процессом, имеющим *равномерное* распределение вероятности в указанных пределах. Такой случайный процесс имеет нулевое среднее значение и дисперсию, равную  $\Delta^2/12$ .

После дискретизации шум квантования представляет собой последовательность чисел  $e(kT)$ , образующую *дискретный случайный процесс*. Во многих случаях отсчеты этой последовательности можно считать некоррелированными друг с другом и статистически независимыми от квантуемого сигнала. Таким образом, шум квантования моделируется в виде аддитивного белого шума с равномерным распределением.

Указанные предположения о свойствах шума квантования близки к реальности, если шаг уровней квантования  $\Delta$  достаточно мал — настолько, что квантованные значения соседних отсчетов сигнала в большинстве случаев различаются на *несколько* уровней квантования. Если же сигнал надолго «зависает» между двумя уровнями, отсчеты шума квантования перестают быть некоррелированными, теряется при этом и их статистическая независимость от сигнала.

Равномерное квантование гарантирует, что *размах* шума квантования не будет превосходить величины шага квантования  $\Delta$  (за исключением тех случаев, когда значение входного сигнала выходит за допустимые пределы). Однако если потребовать минимизации *среднеквадратического* значения шума квантования, оптимальный набор уровней квантования будет зависеть от статистических свойств сигнала, а именно от плотности вероятности его мгновенных значений. В этом случае интуитивно ясно, что уровни квантования должны располагаться плотнее друг к другу в областях тех значений, которые сигнал принимает с большей вероятностью.

**Эффекты квантования в цифровых фильтрах.** Шум квантования — не единственная проблема, связанная с конечной разрядностью используемых чисел. Так, неизбежное округление разнообразных коэффициентов, используемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов, приводит к тому, что параметры фильтров и других устройств отличаются от желаемых, причем возможны ситуации, когда эти отличия весьма существенны. Кроме того, из-за округления промежуточных результатов может происходить накопление вычислительных погрешностей, также искажающих конечный результат.

**Квантование коэффициентов цифровых фильтров.** При практической реализации фильтров неизбежно возникает необходимость *округления* их *коэффициентов*, так как они должны храниться с использованием заданного формата представления чисел. Из-за этого характеристики фильтра претерпевают искажения, величина которых зависит не только от погрешности представления коэффициентов, но и от исходных параметров фильтра и формы его построения.

В *нерекурсивных* фильтрах коэффициенты равны отсчетам импульсной характеристики и *линейно* связаны с комплексным коэффициентом передачи, поэтому малые искажения коэффициентов приводят к малым искажениям частотных характеристик, так что проблемы, связанные с округлением коэффициентов, проявляются редко. Однако, если фильтр должен иметь очень крутой спад АЧХ между полосами пропускания и задерживания, округление коэффициентов все же может привести к заметным искажениям частотных характеристик. Поэтому после округления коэффициентов следует обязательно проконтролировать параметры фильтра, чтобы проверить, удовлетворяет ли он предъявляемым требованиям.

Значительно серьезнее округление коэффициентов сказывается на характеристиках *рекурсивных* фильтров, поскольку коэффициенты знаменателя



функции передачи связаны с импульсной и частотными характеристиками *нелинейно*. Как правило, наибольшие искажения происходят в тех случаях, когда АЧХ фильтра имеет крутые скаты в переходных зонах между полосами пропускания и задерживания.

**Масштабирование коэффициентов цифровых фильтров.** При разработке систем, работающих в реальном масштабе времени, для ускорения вычислений часто используется формат с фиксированной запятой. В этом случае может оказаться, что значения некоторых коэффициентов фильтров выходят за пределы диапазона, представимого в выбранном формате. Для решения данной проблемы прибегают к *масштабированию* фильтров. Наиболее часто коэффициенты приводят к диапазону  $[-1, 1]$ .

При масштабировании цифрового фильтра все его коэффициенты *делятся* на одну и ту же константу, и на нее же *умножается* рассчитанный выходной сигнал. В качестве масштабирующего множителя удобно выбирать степень двойки, поскольку умножение на положительную степень двойки в формате с фиксированной запятой сводится к поразрядному сдвигу двоичного представления числа влево.

На рис. 5.1 в качестве примера показаны исходный фильтр (а) и результат его масштабирования с коэффициентом 4 (б).

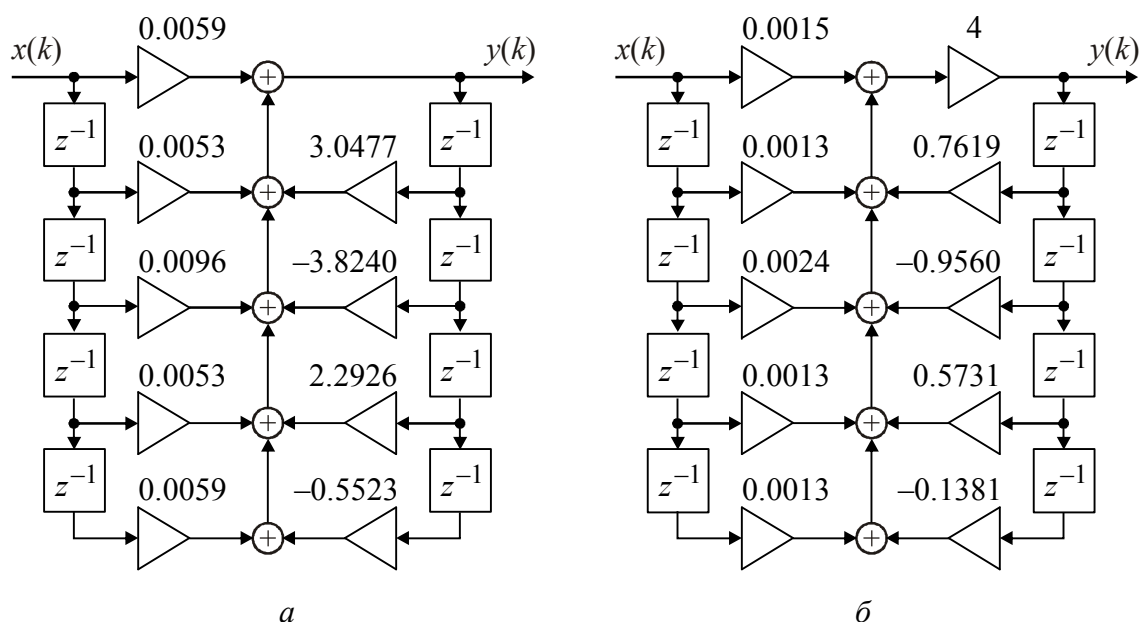


Рис. 5.1. Схема фильтра до (а) и после (б) масштабирования коэффициентов

Чем больше порядок фильтра, тем больше могут быть абсолютные значения коэффициентов в его рекурсивной части без нарушения устойчивости фильтра. Поэтому, если фильтр высокого порядка реализуется «целиком» (без

разделения его на каскадно включенные секции), может оказаться, что самые маленькие (по модулю) коэффициенты из-за округления после масштабирования потеряют несколько значащих цифр. Это может привести к сильному искажению характеристик фильтра. Реализация фильтра в виде каскадно включенных секций 2-го порядка значительно ослабляет эти искажения, так как в каждой отдельно взятой секции абсолютные значения коэффициентов рекурсивной части при выполнении условия устойчивости не могут превышать 2. Таким образом, в результате масштабирования и округления коэффициенты секций 2-го порядка потеряют не более одной значащей цифры.

На рис. 5.2 показан результат преобразования фильтра 4-го порядка, приведенного на рис. 5.1, в каскад из двух секций 2-го порядка. Видно, что значения всех коэффициентов по модулю не превышают 2.

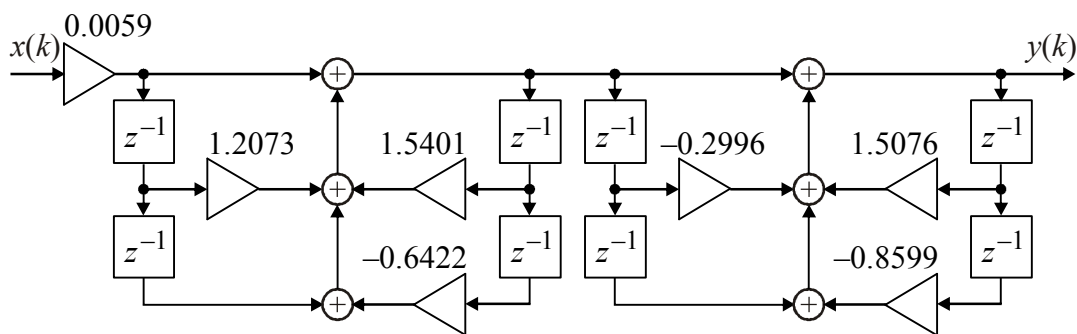


Рис. 5.2. Реализация фильтра в виде каскада секций 2-го порядка

**Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений.** В процессе вычисления выходного сигнала фильтра производится множество операций умножения и сложения. При этом промежуточные результаты вычислений могут значительно превосходить окончательное значение и вызвать переполнение разрядной сетки вычислительного устройства.

Уменьшить вероятность переполнений можно, используя для хранения чисел формат с плавающей запятой, обладающий большим динамическим диапазоном, однако в этом случае возрастает сложность реализации арифметических операций. В любом случае разработанная система обработки сигналов должна тщательно тестироваться для обнаружения потенциальных проблем, связанных с конечной точностью вычислений.

**Округление промежуточных результатов вычислений.** При реализации различных алгоритмов обработки сигналов в процессе вычислений формируется множество промежуточных результатов. Формат хранения этих результатов зачастую вынуждает округлять их, что приводит к появлению до-

полнительных погрешностей. Операции, при которых появляются эти погрешности, зависят от способа представления чисел, используемого в вычислительном устройстве.

При использовании арифметики с фиксированной запятой операции сложения и вычитания не приводят к необходимости округления результатов — они могут вызвать лишь переполнение. Действительно, ведь количество знаков после запятой у результата сложения двух чисел, представленных в формате с фиксированной запятой, такое же, как было у слагаемых. А вот для представления *целой части* суммы может понадобиться больше разрядов, и, если их количество окажется недостаточным, возникнет *переполнение*.

В отличие от сложения, умножение чисел с фиксированной запятой приводит к увеличению числа значащих цифр результата (по сравнению с сомножителями) и, следовательно, к необходимости округления. В качестве примера перемножим 2 числа, представленных в формате 4.2 (в верхней строке вычисления представлены в двоичной системе счисления, в нижней — в десятичной):

$$\begin{aligned}0011.10 \times 0111.11 &= 011011.001, \\3.5 \times 7.75 &= 27.125.\end{aligned}$$

Точный результат содержит 3 двоичных разряда после запятой, поэтому он не может быть представлен в исходном формате 4.2 без округления. Число значащих цифр целой части тоже увеличилось и стало равно 5, при использовании исходного формата 4.2 это приведет к переполнению. В данном случае для отсутствия ошибок округления и переполнений результат необходимо хранить в формате 6.4.

***Аналитическая модель собственного шума в фильтрах с фиксированной запятой.*** Для статистического анализа ошибок округления, возникающих при выполнении вычислений с фиксированной запятой, в структурную схему фильтра вводятся эквивалентные источники шума, размещаемые в тех точках, где производится округление. Такими точками, как правило, являются выходы умножителей (ведь при сложении чисел с фиксированной запятой погрешностей не возникает). Предполагается, что эти источники обладают следующими свойствами:

- распределение вероятности генерируемых ими шумов является равномерным, ширина диапазона равномерного распределения равна единице младшего разряда используемого формата представления чисел;

- шумовые отсчеты, генерируемые источниками, являются некоррелированными, т. е. генерируется белый шум;
- шумы, генерируемые разными источниками, являются статистически независимыми;
- собственные шумы фильтра и обрабатываемый полезный сигнал также являются статистически независимыми.

Условия, при которых эти предположения близки к реальности, такие же, как и для выполнения аналогичных предположений о шумах квантования сигнала — сетка уровней равномерного квантования должна быть настолько частой, чтобы значение сигнала между соседними отсчетами изменялось на *несколько* уровней.

Способ организации вычислений в фильтре определяется его структурной схемой, поэтому для фильтров, реализованных в разных формах, статистические свойства собственных шумов тоже будут разными. В качестве примера на рис. 5.3 показана структурная схема прямой формы реализации фильтра 2-го порядка, включающая источники собственных шумов.

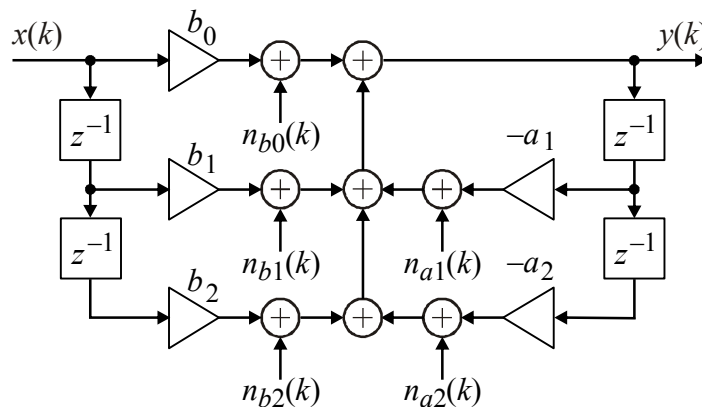


Рис. 5.3. Фильтр 2-го порядка с эквивалентными источниками собственных шумов

Из рис. 5.3 видно, что в данном случае все 5 собственных шумов являются слагаемыми общей суммы, формирующей выходной сигнал фильтра. Таким образом, шум от любого источника проходит на выход только через рекурсивную часть фильтра, так что функция передачи для любого источника шума оказывается равна

$$H_n(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Соответствующий коэффициент передачи по мощности равен  $|H_n(e^{-j\tilde{\omega}})|^2$ , вследствие независимости источников шумов их мощности суммируются. В итоге получаем спектральную плотность мощности (СПМ) собственного шума на выходе фильтра, равную

$$W_n(\tilde{\omega}) = \frac{5\sigma_n^2}{F_d} \frac{1}{|1 + a_1 e^{-j\tilde{\omega}} + a_2 e^{-j2\tilde{\omega}}|^2}, \quad (5.1)$$

где  $\sigma_n^2$  — дисперсия каждого источника шума (входящее в формулу отношение  $\sigma_n^2/F_d$  дает двустороннюю СПМ этого источника).

### 5.3. Индивидуальное задание

Параметры квантуемого гармонического сигнала являются индивидуальными для каждой бригады и выдаются преподавателем в виде табл. 5.2. Кроме того, в данной лабораторной работе используется фильтр из индивидуального задания для лабораторной работы № 2. Параметры, которые были использованы при синтезе этого фильтра, также приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Параметры гармонического сигнала			Параметры фильтра			
Амплитуда	Частота	Начальная фаза	Тип	Частота среза	Пульсации в полосе пропускания	Подавление в полосе задерживания
$A$	$\tilde{\omega}_0$ , рад/отсчет	$\varphi_0$ , рад			$A_{\text{pass}}$ , дБ	$A_{\text{stop}}$ , дБ

### 5.4. Указания к выполнению работы

**1. Подготовка к началу работы.** Запустите MATLAB и сделайте текущей папку вашей бригады.

**2. Исследование свойств шума квантования.** Эта часть работы выполняется путем создания MATLAB-программы. Создайте в редакторе MATLAB новый файл MATLAB-программы и сохраните его с соответствующим именем.

Создайте вектор из  $10^5$  отсчетов вещественного гармонического сигнала с заданными амплитудой, частотой и начальной фазой:

$$x(k) = A \cos(\tilde{\omega}_0 k + \varphi_0), \quad k = 0, 1, \dots, 10^5 - 1.$$

Произведите квантование сигнала, округлив его значения с шагом в  $1/256$ . Для этого можно умножить сигнал на 256, округлить результат функцией **round**, а затем разделить его на 256:

```
x_q = round(x*256)/256;
```

Вычислите шум квантования как разность между квантованным (**x\_q**) и исходным (**x**) сигналами.

Исследуйте свойства шума квантования, получив для этого графики следующих его характеристик:

- самого шума квантования длительностью 200 отсчетов;
- гистограммы;
- корреляционной функции для диапазона сдвигов  $\pm 100$  отсчетов;
- оценки СПМ.

Сохраните в отчете 4 полученных графика.

#### Справка

- Для построения графика шума квантования длительностью 200 отсчетов используется функция **plot(x(1:200))**, где **x** — шум квантования.
- Для расчета и отображения гистограммы служит функция **hist**. Формат вызова: **hist(x, nbin)**, где **x** — анализируемый сигнал; **nbin** — число интервалов гистограммы. Для целей данной работы это число следует выбрать равным 100.
- Для расчета авто- и взаимных корреляционных функций служит функция **xcorr**. Формат вызова для оценки автокорреляционной функции (АКФ) случайного процесса: **[Rx, dk] = xcorr(x, kmax, 'unbiased')**, где **x** — анализируемый сигнал; **kmax** — максимальный сдвиг в отсчетах; **Rx** — вектор значений рассчитанной АКФ; **dk** — вектор задержек (**-kmax:kmax**). Полученная АКФ является ненормированной, уровень ее пика (при нулевом сдвиге) равен *средней мощности* сигнала.
- Для расчета оценки и построения графика СПМ шума квантования в данной работе используется функция **pwelch**. Формат вызова для использования в данной лабораторной работе: **pwelch(x, Lb)**, где **x** — анализируемый сигнал; **Lb** — размер блоков, на которые делится сигнал при анализе. Чем больше размер блока, тем лучше частотное разрешение, но тем больше дисперсия оценки СПМ (из-за уменьшения числа блоков). Рекомендуемая длина блока для целей данной лабораторной работы — **256**.

Повторите квантование сигнала, расчет шума квантования и получение графиков для следующих ситуаций:

- используется тот же синусоидальный сигнал, но шаг квантования равен  $1/16$ ;
- используется тот же синусоидальный сигнал, но шаг квантования равен  $1$ ;
- дискретный белый гауссов шум (БГШ) с нулевым средним значением и числом отсчетов  $10^5$ , шаг квантования —  $1/256$ . Сгенерированный случайный сигнал необходимо отмасштабировать так, чтобы его максимальное (по модулю) значение было равно единице:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}/\max(\mathbf{abs}(\mathbf{x}))$ ;

### Справка

Сгенерировать дискретный БГШ можно с помощью функции **randn**, которая генерирует некоррелированные псевдослучайные числа с гауссовым распределением, нулевым средним и единичной дисперсией. Формат вызова функции для целей данной работы: **sn = randn(1, N)**, где **1** — число строк генерируемой матрицы; **N** — число ее столбцов (в результате использования такой комбинации параметров получается вектор-строка длиной **N** отсчетов); **sn** — вектор отсчетов шума.

- речевой сигнал из файла **mtlb.mat** (он входит в набор имеющихся в MATLAB тестовых сигналов), шаг квантования —  $1/256$ . Для его загрузки используйте команду **load mtlb**, после ее выполнения в памяти появятся переменные **mtlb** (вектор отсчетов сигнала) и **Fs** (частота дискретизации; в данной лабораторной работе это значение не используется). Загруженный сигнал необходимо отмасштабировать так, чтобы его максимальное (по модулю) значение было равно единице:  $\mathbf{x} = \mathbf{mtlb}/\max(\mathbf{abs}(\mathbf{mtlb}))$ .

**3. Исследование влияния округления коэффициентов фильтра на его параметры.** Эта часть работы выполняется в среде **Filter Design and Analysis Tool**.

Запустите среду командой **fdatool** и выполните синтез рекурсивного (ИР) ФНЧ с заданными параметрами:


- Тип АЧХ (раздел **Response Type**): ФНЧ (**Lowpass**).
- Тип фильтра (раздел **Design Method**): рекурсивный (ИР), конкретный тип выбрать из выпадающего списка в соответствии с заданием.


- Порядок фильтра (раздел **Filter Order**): задать вручную, выбрав вариант **Specify order** и введя в поле значение **4**.
- Частота среза (раздел **Frequency Specifications**): задать нормированные частоты (вариант **Normalized (0 to 1)** в списке **Units**) и ввести значение из задания в поле, которое в зависимости от типа фильтра будет называться **wc**, **wpass** или **wstop**.
- Неравномерность АЧХ (раздел **Magnitude Specifications**): задать измерение в децибелах (вариант **dB** в списке **Units**) и ввести параметры из задания (при их наличии) в поля **Apass** и/или **Astop**.

Закончив задание параметров, щелкните на кнопке **Design Filter**.

По умолчанию фильтр представлен в виде каскада секций 2-го порядка. Преобразуйте его к одной секции, щелкнув правой кнопкой мыши в поле **Current Filter Information** и выбрав в контекстном меню команду **Convert to Single Section**.

#### Замечание

После перехода к одной секции можно убедиться в том, что коэффициенты синтезированного фильтра совпадают с теми, что были приведены в задании к лабораторной работе № 2. Просмотреть коэффициенты можно, щелкнув на кнопке  **Filter Coefficients** в панели инструментов. После этого вернитесь к просмотру АЧХ фильтра.


Щелкните на кнопке  **Set quantization parameters** из набора кнопок, расположенных в нижней части левой стороны окна. Появится панель задания параметров квантования.

В списке **Filter arithmetic** (тип арифметики фильтра) выберите вариант **Fixed-point** (с фиксированной точкой).

По умолчанию будет выбрана вкладка **Coefficients**, на которой задаются параметры квантования коэффициентов фильтра. Чтобы эффекты округления коэффициентов были более явными, в данной лабораторной работе используется 8-битовое квантование. Введите в поле **Coefficient word length** значение 8 и щелкните на кнопке **Apply** (для остальных элементов данной вкладки оставьте значения по умолчанию).

В поле графиков будут показаны две АЧХ, соответствующие исходному (**Reference**) и квантованному (**Quantized**) фильтрам. Скорее всего, их различия будут весьма сильными, квантованный фильтр может даже оказаться неустойчивым. Перейдите в визуализатор фильтров FVTool, щелкнув на кнопке



панели инструментов  **Full View Analysis**, и сохраните в отчете графики АЧХ (**Magnitude Response**) и расположения нулей и полюсов на комплексной плоскости (**Pole/Zero Plot**).

Теперь преобразуем исходный (неквантованный) фильтр к каскаду секций 2-го порядка. Для этого в списке **Filter arithmetic** выберите вариант **Double-precision floating-point** (с плавающей точкой двойной точности), затем щелкните правой кнопкой мыши в поле **Current Filter Information** и выберите в контекстном меню команду **Convert to Second-Order Sections**.

Снова вернитесь к квантованному варианту с фиксированной точкой, выбрав в списке **Filter arithmetic** вариант **Fixed-point**.

Заметные различия между АЧХ исходного и квантованного фильтров должны исчезнуть. Перейдите в FVTool и сохраните в отчете график АЧХ, *увеличив его* таким образом, чтобы на нем крупным планом отображалась полоса пропускания и были видны небольшие различия между двумя АЧХ в этой области.


**4. Исследование собственного шума цифрового фильтра.** Эта часть работы также выполняется в среде **Filter Design and Analysis Tool**. Для упрощения сопоставления результатов моделирования с результатами теоретических расчетов рассматривается фильтр, представленный в виде *одной секции*, реализованной в *прямой* форме. Поскольку в предыдущем разделе работы было показано, что 8-разрядное квантование коэффициентов не обеспечивает достаточной точности при реализации фильтра в виде одной секции, в данном разделе число двоичных разрядов увеличивается до 16.


Для преобразования исходного (неквантованного) фильтра к одной секции выберите в списке **Filter arithmetic** вариант **Double-precision floating-point**, затем щелкните правой кнопкой мыши в поле **Current Filter Information** и выберите в контекстном меню команду **Convert to Single Section**. Затем выберите в этом же контекстном меню команду **Convert Structure**. В появившемся одноименном окне выберите первый вариант из списка: **Direct-Form I** (прямая форма реализации).

Снова вернитесь к квантованному варианту с фиксированной точкой, выбрав в списке **Filter arithmetic** вариант **Fixed-point**.

На вкладке **Coefficients** задайте 16-битовое представление в поле **Coefficient word length**, для остальных параметров сохраните значения по умолчанию. Щелкните на кнопке **Apply**.

Перейдите на вкладку **Filter Internals** (параметры промежуточных вычислений) и принудительно задайте усечение результатов умножения до 16 старших бит. Для этого в списке **Product mode** (режим вычисления произведений) выберите вариант **Keep MSB** (сохранять старшие биты). После этого станет доступно для ввода поле **Product word length** (число разрядов для результатов умножения). Введите в это поле число 16. Щелкните на кнопке **Apply**.

Щелкните на кнопке  (**Round-off Noise Power Spectrum**) для вывода графика оценки СПМ собственного шума цифрового фильтра. Перейдите в FVTool и сохраните в отчете этот график, увеличив в нем масштаб по вертикали так, чтобы был виден только график, относящийся к квантованному фильтру (он изображен сплошной линией и обозначен в легенде как **Lowpass...: Quantized**).

**5. Сохранение информации о фильтре.** Сохраните сеанс среды FDA-Tool командой меню **File** ➤ **Save session** или **Save session as**. Кроме того, необходимо записать значения коэффициентов числителя и знаменателя функции передачи рассматриваемого фильтра — они будут необходимы для теоретического расчета СПМ собственного шума цифрового фильтра. Для этого щелкните на кнопке  (**Filter Coefficients**) и запишите значения коэффициентов квантованного числителя (**Quantized Numerator**) и квантованного знаменателя (**Quantized Denominator**) с не менее чем четырьмя значащими цифрами.

#### **Примечание**

Для расчета теоретической СПМ собственного шума в MATLAB можно вместо ручной записи коэффициентов экспортировать их из среды FDATool в виде переменных, содержащих векторы коэффициентов числителя и знаменателя. Для этого воспользуйтесь командой **File** ➤ **Export**.

### **5.5. Содержание отчета**

Отчет должен содержать:

- созданный в процессе работы программный код, оформленный в виде законченного документа и сопровождаемый полученными в ходе работы графиками;
- полученные графики характеристик фильтра;

- теоретический график СПМ собственного шума цифрового фильтра, реализованного в прямой форме. Расчет производится по (5.1), скорректированной с учетом того, что порядок анализируемого фильтра равен 4;
- выводы по результатам работы.

### 5.6. Контрольные вопросы

1. Какие из этих десятичных чисел могут быть точно представлены в вычислительных устройствах: 0.1, 0.2, 0.25, 0.36, 0.375, 0.5?
2. Можно ли построить цифровой фильтр, вычисления в котором будут выполняться абсолютно точно? Зависит ли это от типа фильтра (рекурсивный или нерекурсивный)?
3. Для какого из исследованных сигналов теоретические предположения о свойствах шума квантования выполняются лучше всего?
4. Квантованию с большим числом уровней (например, 256) подвергаются 2 гармонических сигнала с частотами  $\tilde{\omega}_1 = \pi/6 \approx 0.5236$  рад/отсчет и  $\tilde{\omega}_2 = 0.5$  рад/отсчет. В чем будут состоять различия в распределении вероятности, корреляционных функциях и спектрах шума квантования в этих двух случаях?
5. Объясните на качественном уровне, как примерно должны располагаться уровни неравномерного квантования для гармонического сигнала, если необходимо минимизировать среднюю мощность (дисперсию) шума квантования.
6. Изобразите структурную схему исследуемого в лабораторной работе фильтра (прямая форма реализации без разбиения на секции), произведя при этом масштабирование его коэффициентов, чтобы все они лежали в диапазоне  $-1 \dots +1$ . Считая, что коэффициенты представляются в формате 1.7, найдите коэффициент, относительная погрешность представления для которого оказывается максимальной, и определите эту относительную погрешность.
7. Изобразите структурную схему исследуемого в лабораторной работе фильтра (прямая форма реализации без разбиения на секции) и определите, какое количество разрядов целой части (включая знаковый разряд) необходимо обеспечить на выходе каждой операции умножения для того, чтобы при работе фильтра не возникало переполнений. Считать, что значения входного и выходного сигналов лежат в диапазоне  $-1 \dots +1$ .

8. Рекурсивный цифровой фильтр представлен в виде каскада секций 2-го порядка. Зависит ли собственный шум округления на выходе фильтра от порядка включения секций?

9. Сопоставить измеренные и теоретические значения дисперсии шума квантования для указанного преподавателем сигнала.

10. Объяснить вид гистограммы шума квантования (ее форму и место расположения пиков на горизонтальной оси) для случая гармонического сигнала при указанном преподавателем шаге квантования.

11. Объяснить вид АКФ шума квантования (положение боковых пиков АКФ на горизонтальной оси) для случая гармонического сигнала при указанном преподавателем шаге квантования.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Айфичер Э. С., Джервис Б. У. Цифровая обработка сигналов: практический подход / пер. с англ. М.: Вильямс, 2004.

Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. М.: Бином-Пресс, 2007.

Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. М.: Техносфера, 2012.

Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2008.

Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А. И. Солонина, Д. М. Клионский, Т. В. Меркучева, С. Н. Перов. СПб.: БХВ-Петербург, 2013.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ .....	3
2. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	18
3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.....	33
4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ.....	46
5. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ И ОКРУГЛЕНИЯ.....	60
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	76

Петров Александр Валерьевич,  
Сергиенко Александр Борисович

**Цифровая обработка сигналов**  
Лабораторный практикум

Редактор Н. В. Кузнецова

---

Подписано в печать 27.11.18. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 5,0.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 82 экз. Заказ \_\_\_\_\_

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5