4 Группы Ли

Группа $SO(2)$ дает пример бесконечномерной группы, для элементов которой заданы геометрические свойства, такие как близость ее элементов. Более того элементы группы $SO(2)$ могут рассматриваться как точки некоторого гладкого пространства, в котором можно ввести координаты (параметры группы), можно дифференцировать функции на этом пространстве и т.д. Пространство группы $SO(2)$ есть окружность S^1 - компактное гладкое пространство. Отождествление этой группы с некоторым многообразием можно получить из определения этой матричной группы. Действительно, по определению, матричная реализация этой группы задана 2×2 матрицами $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с условиями $O \cdot O^T = 1$ и $\det(O) = 1$ из которых следует, что $a = d$, $b = -c$ и $c^2 + d^2 = 1$. Последнее соотношение как раз и задает одномерную окружность.

Пространство группы $O(2)$ более сложное, оно состоит из двух несвязных друг с другом компонент, то есть двух окружностей S^1, одна из которой получается непрерывными преобразованиями из единичного элемента $I \cdot e^{\mathbf{i}\phi}$, $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\mathbf{i}\phi} = I \cos\phi + \mathbf{i} \sin\phi\,,$$

а вторая получается непрерывными преобразованиями из оператора отражения

$$T(r) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(r) \cdot e^{\mathbf{i}\phi}$. Непрерывными преобразованиями (с помощью умножения на элементы из $SO(2)$) нельзя перейти из одной компоненты в другую, так как не существует параметра ϕ такого, что $T(r) = e^{\mathbf{i}\phi}$, то есть $T(r) \notin SO(2)$.

Пространство группы $SO(2)$ одномерное, в частности, произведениям двух элементов $g(\phi)$ и $g(\psi)$ соответствует элемент $g(\chi)$, где параметр $\chi = \phi + \psi$. В общем случае, это не так. Когда пространство группы n-мерное, то есть элементы группы параметризуются набором из n-параметров $\bar{\phi} = \{\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n\}$ основное групповое свойство можно символически записать в виде

$$g(\bar{\phi}) \cdot g(\bar{\psi}) = g(\bar{\chi}(\bar{\phi}, \bar{\psi})), \tag{19}$$

где вся информация о структуре группы и групповом умножении закодирована в функциях $\bar{\chi}(\bar{\phi}, \bar{\psi})$. Если эти функции оказываются дифференцируемыми функциями наборов параметров $\bar{\phi}$ и $\bar{\psi}$, то группа называется группой Ли.

Матричные группы преобразований $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$ n-мерных вещественных и комплексных пространств с не равным нулю детерминантами можно отождествить с некоторыми областями в линейных пространствах $\mathbb{R}^{2n^2}$ и $\mathbb{R}^{n^2}$ соответственно. Координатами в этих пространствах являются матричные элементы. Единичным элементом в этих группах является единичная матрица, а обратным элементом – обратная матрица. Групповое умножение будет определятся матричным умножением и координаты произведения двух матриц выражаются через координаты сомножителей при помощи гладких дифференцируемых функций. В окрестности любой точки многообразия группы, можно ввести координаты так, что значения координат равны нулю в выбранной точке многообразия. Например, в окрестности единицы группы $GL(n, \mathbb{R})$, для матрицы $G = \|g^i_j\|$ можно ввести координаты

$$x^i_j(G) = g^i_j - \delta^i_j, \quad x^i_j(I) = 0 \tag{20}$$

Касательное пространство в единице группы $GL(n, \mathbb{R})$ естественно отождествляется с пространством всех невырожденных матриц n-порядка. Рассмотрим кривую на группе $G(t) \in GL(n, \mathbb{R})$, то есть семейство матриц $G(t)$, зависящих от вещественного параметра t. Пусть эта кривая проходит через единицу группы при значении параметра $t = 0$. Тогда касательный вектор к этой кривой при $t = 0$ – это матрица $\partial_t G(t)|_{t=0}$.[4] Наоборот, пусть X – любая невырожденная вещественная матрица. Тогда кривая $G(t) = I + tX$, при t, достаточно близких к нулю, лежит в $GL(n, \mathbb{R})$, то есть при всех значениях параметра $|t| < |t_0| \ll 1$, не нарушается условие, что $\det(G(t)) \neq 0$. При этом очевидно, что

$$G(0) = I, \quad \partial_t G(0) = X.$$

Важным свойством групп Ли отличающих их от обычных многообразий является тот факт, что кривые на группе можно задавать с помощью левых или правых умножений на элементы группы. При этом такая кривая, по определению, будет всегда принадлежать группе.

[4]Ровно в этом месте, происходит превращение обычного понятия вектора, как направленного отрезка, в матрицу.

Матричные группы преобразований $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ и $Sp(n)$ задаются уравнениями в пространстве всех матриц. Так группа $SL(n,\mathbb{R})$ задается одним уравнением

$$\det G = 1$$

Это – гиперповерхность в пространстве всех матриц, целиком лежащая в $GL(n,\mathbb{R})$. Можно доказать, что эта поверхность неособая, что означает, что ее размерность в любой точке группы всегда равна $n^2 - 1$. Касательным пространством к этой группе в единице будет пространство вещественных матриц с нулевым следом. Докажите этот факт.

Рассмотрим группу $O(n)$. Соответствующая поверхность в $\mathbb{R}^{n^2}$ задается системой уравнений

$$O^T \cdot O = I, \quad o_k^i o_k^j = \delta^{ij}$$

Среди этих уравнений есть, очевидно, совпадающие, которые получаются при перестановке индексов i и j. Количество различных уравнений $n(n+1)/2$. Нужно показать, что ранг этой системы равен $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Это означает, что количество независимых параметров, которые определяют эту группу равно $n(n-1)/2$ и совпадает с размерностью касательного пространства к единице группы. Докажем, что это касательное пространство совпадает с пространством всех кососимметричных матриц. Если $O(t) \in O(n)$, $O(0) = I$ – однопараметрическая кривая в семействе ортогональных матриц и $X = \partial_t O(t)|_{t=0}$, то $0 = \partial_t (O^T(t) \cdot O(t))|_{t=0} = X^T + X = 0$. Таким образом касательное пространство в единице группы $O(n)$ совпадает с пространством всех кососимметричных матриц. Очевидно, что размерность этого пространства $n(n-1)/2$ и многообразие группы $O(n)$ является неособой поверхностью в пространстве всех вещественных $n \times n$ матриц.

Рассмотрим теперь унитарную группу $U(n)$. Эта группа задается в пространстве всех комплексных матрица размера $n \times n$ уравнениями

$$U \cdot U^\dagger = I, \quad u_k^i (u_k^j)^* = \delta^{ij}$$

Количество вещественных уравнений, которые дают эти условия, равно $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$. Касательное пространство к единице в группе $U(n)$ совпадает с пространством всех косоэрмитовых матриц n-го порядка:

$$X^\dagger = -X, \quad 0 = \partial_t (U(t) \cdot U(t)^\dagger) = X + X^\dagger$$

Размерность пространства всех косоэрмитовых матриц равна n^2. Координаты в этом пространстве таковы: u_k^k/i, $\mathrm{Im}(u_k^k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Re}(x_j^i)$, $\mathrm{Im}(x_j^i)$, $i < j$.

Группа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1 также представляет собой неособую вещественную поверхность размерности n^2-1. Ее касательное пространство в единице совпадает с пространством всех косоэрмитовых матриц со следом ноль.

Рассмотрим группу Ли $SU(2)$, которая описывает преобразования двумерной комплексной (или четырехмерной вещественной) плоскости унитарными матрицами, сохраняющими длины векторов на этой плоскости. Эти условия приводят к тому, что 2×2 матрица $g \in SU(2)$ имеет единичный детерминант и удовлетворяет соотношению унитарности: $g^\dagger = g^{-1}$. Эти условия для матрицы $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где параметры $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ комплексны, дадут соотношения $a^* = d$, $b^* = -c$ и $aa^* + bb^* = 1$. Последнее условие есть уравнение трехмерной вещественной сферы вложенной в четырехмерное вещественное пространство. Таким образом группа $SU(2)$ топологически эквивалентна сфере S^3.

Пусть T – касательное пространство в единице к группе $GL(n, \mathbb{R})$. Это касательное пространство можно отобразить в группу при помощи экспоненциального отображения:

$$\exp : T \to GL(n, \mathbb{R}), \quad \exp(0) = I, \quad \exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots .$$

Можно доказать следующие утверждения про это отображение:

- ряд $\exp(X)$ сходится для всех матриц X;
- если матрицы X и Y коммутируют, $XY = YX$, то

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y);$$

- если матрицы X и Y не коммутируют, то экспоненциальное отображение удовлетворяет соотношению, которое называется формулой Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$e^X \cdot e^Y = e^{X+Y+[X,Y]/2+[X-Y,[X,Y]]/12+\cdots};$$

- матрица $G = \exp(X)$ обратима и

$$G^{-1} = \exp(-X);$$

- $\exp(X^T) = (\exp(X))^T$;

- в некоторой окрестности начала координат отображение $\exp(X)$ взаимно однозначно.

Второе утверждение следует из следующей выкладки

$$\exp(X)\exp(Y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y^l}{l!}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k+l=m} \frac{m!}{k!l!} X^k Y^l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^m}{m!} = \exp(X+Y)$$

В целом экспоненциальное отображение может не быть взаимно однозначным и даже не быть отображением на всю группу. Например, матрица

$$g = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

не представляется экспонентой от никакой вещественной безследовой матрицы.

4.1 Производная Ли

Пусть в области на многообразии с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$ задано векторное поле $\bar{V}$ с компонентами $v^i = v^i(x^1,\ldots,x^n)$. С каждым таким векторным полем связана автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t\, x^i(t) = v^i(x^1,\ldots,x^n), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{21}$$

Ее решения $x^i = x^i(t)$ называются интегральными кривыми векторного поля v^i. Обозначим через

$$F_t^i(x_0^1,\ldots,x_0^n) = x^i = x^i(t; x_0^1,\ldots,x_0^n)$$

интегральную кривую поля v^i с начальными условиями $x^i|_{t=0} = x_0^i$. Эта формула задает отображение области в многообразии в себя, зависящее от параметра t (сдвиг на время t вдоль интегральных кривых). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что система уравнений (21) имеет единственное решение и следовательно, в окрестности точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ является диффеоморфизмом[5] имеющим при малых t следующий вид

$$x^i(t; x_0^1, \ldots, x_0^n) = x_0^i + tv^i(x^1, \ldots, x^n) + o(t). \tag{22}$$

Диффеоморфизмы F_t образуют группу

$$F_t \cdot F_s = F_{t+s}, \quad F_{-t} = (F_t)^{-1}, \quad F_0 = \text{тождественное отображение}.$$

Если задана группа диффеоморфизмов F_t, то по ней однозначно восстанавливается векторное поле $\bar{V}$

$$v^i = \partial_t(F_t^i)|_{t=0}.$$

Возникает естественный вопрос: как по векторному полю $\bar{V}$ можно восстановить группу диффеоморфизмов. Ответом на этот вопрос дает определение экспоненты векторного поля.

Определение 18 *Оператор*

$$\exp(t\partial_{\bar{V}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\ (\partial_{\bar{V}})^n$$

называется экспонентой векторного поля $\bar{V}$, где $\partial_{\bar{V}} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – производная по направлению поля $\bar{V}$.

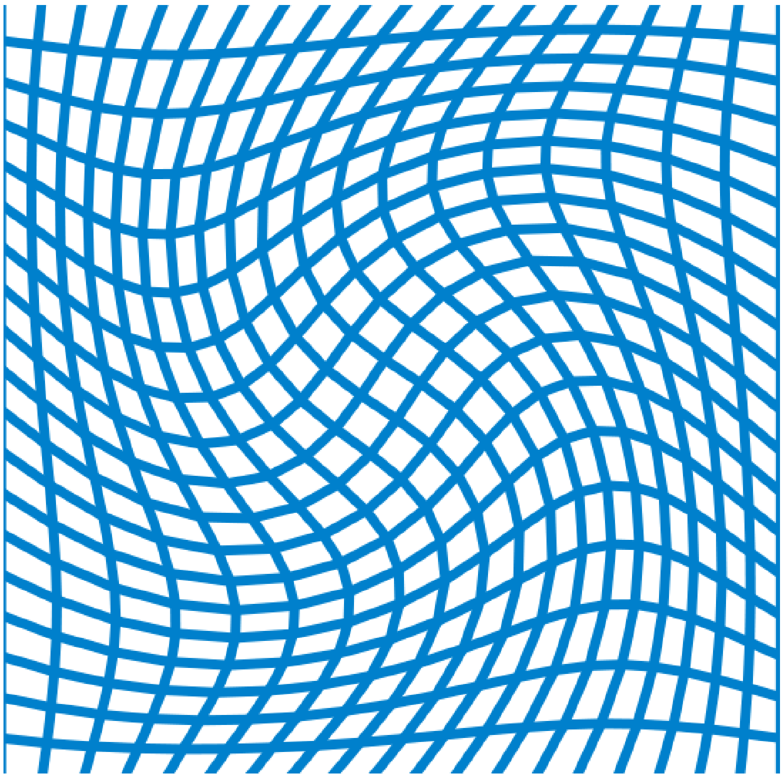
Можно доказать следующее утверждение

Утверждение 9 *Для аналитических векторных полей $\bar{V}(x)$ и аналитических функций $f(x)$ экспонента векторного поля $\bar{V}(x)$ совпадает с оператором $\exp(t\partial_{\bar{V}})$ при достаточно малых t:*

$$\exp(t\partial_{\bar{V}})f(x) = f(F_t(x))$$

Задача. Вычислить оператор $\exp\left((ax+b)\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

[5] Взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение $F\colon M \to N$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие N, обратное к которому тоже является непрерывно дифференцируемым называется диффеоморфизмом.



На этом рисунке показан образ координатной сетки при диффеоморфизме плоскости в себя.

Интегральные кривые гладкого векторного поля попарно не пересекаются и заполняют многообразие или некоторую его область. Каждая точка из рассматриваемой области многообразия принадлежит одной и только одной кривой. Это множество кривых задает естественное отображение многообразия в себя. Это отображение называется *переносом Ли*. По определению, касательные вектора к этим кривым будут образовывать векторное поле на многообразии. Наша задача, понять как будут изменяться тензора при движении вдоль кривых, или, другими словами, при переносе Ли, или вдоль векторного поля, ассоциированного с данным набором кривых или переносом Ли F_t?

В силу взаимной однозначности отображения F_t определен закон преобразования тензора от координат x_0^i к $x^i(t)$. Компоненты тензора типа (p,q) $(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ в новой системе координат с координатами $(x^1(t),\ldots,x^n(t))$ в силу общих законов преобразований тензоров связаны с компонентами тензора в исходной системе координат с координатами

$(x_0^1, \dots, x_0^n)$ по правилам

$$(F_t T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{l_1 \dots l_p}_{k_1 \dots k_q} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_0^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_q}}{\partial x_0^{j_q}} \frac{\partial x_0^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x_0^{i_p}}{\partial x^{l_p}} \tag{23}$$

Определение 19 *Производной Ли тензора T типа (p, q) вдоль векторного поля $\bar{V}$ называется тензор того же типа компоненты которого вычисляются по формуле*

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \left. \frac{d(F_t T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{dt} \right|_{t=0}$$

Таким образом, производная Ли измеряет скорость изменения тензора T при деформации многообразия, задаваемого отображением F_t.

Чтобы вычислить значение производной Ли на тензоре T достаточно знать матрицы Якоби прямого и обратного отображения F_t при малых значениях параметра t. В силу соотношения (22) матрица Якоби прямого отображения имеет вид

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j} = \delta^i_j + t \left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_{x^j = x_0^j} + o(t)$$

а матрица Якоби обратного отображения

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta^i_j - t \left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_{x^j = x_0^j} + o(t)$$

Тогда дифференцируя правую часть формулы (23) и приравнивая $t = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{V}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = v^s \frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^s} + T^{i_1 \dots i_p}_{k j_2 \dots j_q} \frac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}} + \dots + T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} k} \frac{\partial v^k}{\partial x^{j_q}} - \\ - T^{l i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial v^{i_1}}{\partial x^l} - \dots - T^{i_1 \dots i_{p-1} l}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial v^{i_p}}{\partial x^l} \end{aligned} \tag{24}$$

Производная Ли от тензоров нулевого ранга или скалярных функций очевидно равна

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{\bar{V}} f$$

Производная Ли от векторов является вектором с компонентами

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U})^i = V^i \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

и, как легко проверить, совпадает с коммутатором дифференцирований вдоль векторных полей $\bar{V}$ и $\bar{U}$

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U}) = [\partial_{\bar{V}}, \partial_{\bar{U}}]$$

Заметим, что коммутатор операторов обладает всеми свойствами производной.

В силу тождества Якоби, для производных Ли, действующих на векторных полях, выполняются соотношения

$$[\mathcal{L}_{\bar{V}}, \mathcal{L}_{\bar{U}}] = \mathcal{L}_{[\bar{V},\bar{U}]}$$

и

$$[[\mathcal{L}_{\bar{X}}, \mathcal{L}_{\bar{Y}}], \mathcal{L}_{\bar{Z}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{Y}}, \mathcal{L}_{\bar{Z}}], \mathcal{L}_{\bar{X}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{Z}}, \mathcal{L}_{\bar{X}}], \mathcal{L}_{\bar{Y}}] = 0$$

Можно показать, что аналогичные равенства будут справедливы при действии производных Ли на произвольные тензора.

Для производной Ли справедлива формула Лейбница

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(f\bar{U}) = (\mathcal{L}_{\bar{V}}(f))\bar{U} + f\mathcal{L}_{\bar{V}}(\bar{U})$$

и в более общем случае

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathbf{B})$$

Задача. Пользуясь формулой Лейбница доказать, что компонента производной Ли одинформы равна

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\tilde{\omega})_j = V^i\ \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^i} + \tilde{\omega}^i\ \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

и сравнить с общей формулой для производной Ли от тензоров типа $(0, 1)$.

4.2 Группы и алгебры Ли

Определение 20 *Алгеброй $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное (векторное) пространство над полем $\mathbb{K}$, в котором, кроме сложения элементов $\mathcal{A}$ и умножения их на числа из $\mathbb{K}$, определена операция умножения $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, то есть $m(a, b) = ab \in \mathcal{A}$ $(\forall a, b \in \mathcal{A})$, причем это умножение удовлетворяет аксиомам дистрибутивности $a(\alpha b + \beta c) = \alpha(ab) + \beta(ac)$, где $a, d, c \in \mathcal{A}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Если умножение m удовлетворяет еще и аксиоме ассоциативности: $a(bc) = (ab)c$, то алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной. Если в ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$ есть выделенный элемент e такой, что выполняются соотношения $ae = ea = a$ $(\forall a \in \mathcal{A})$, то такая алгебра называется ассоциативной алгеброй с единицей.*

Определение 21 *Линейное пространство с дополнительной операцией* $[\ ,\ ]$*, называемой скобкой, называется алгеброй Ли, если для любых трех элементов этого пространства выполняется тождество Якоби:* $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$.

Например, трехмерное эвклидово пространство является алгеброй Ли относительно операции векторного умножения.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра линейных операторов. Тогда она превращается в алгебру Ли выбором в качестве скобки коммутатора операторов: $[a,b]=ab-ba$.

Пусть подмногообразие[6] задано уравнением некоторой поверхности и векторные поля $\bar{V}$ и $\bar{U}$ касаются этой поверхности, тогда справедливо следующее

Утверждение 10 *Если векторные поля $\bar{V}$ и $\bar{U}$ касаются некоторой гладкой поверхности, то и их коммутатор касается этой поверхности.*

Справедливо и обратное утверждение, которое называется теоремой Фробениуса.

Теорема 3 (Фробениуса.) *Если m векторных полей класса $\mathbb{R}^\infty$, определенных в некоторой области U многообразия M, имеют попарные скобки Ли, являющиеся линейными комбинациями этих же m векторных полей, то интегральные кривые этих полей образуют некоторое семейство подмногообразий размерности не более m.*

Рассмотрим 3-мерное вещественное эвклидово пространство и набор векторных полей

$$l_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad l_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad l_z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{25}$$

Легко проверить, что

$$[l_x,l_y]=l_z\,, \quad [l_y,l_z]=l_x\,, \quad [l_z,l_x]=l_y\,,$$

а значит по теореме Фробениуса эти три вектора определяют некоторое многообразие. Это многообразие – двумерная сфера радиуса $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Легко проверить, что

[6]Подмногообразие многообразия M – это такое многообразие, которое является гладким подмножеством в M. m-мерное *подмногообразие* S n-мерного многообразия M – это множество точек многообразия M, обладающие следующим свойством: в некоторой открытой окрестности в M произвольной точки P из S существует такая система координат для M, в которой точки S, лежащие в этой окрестности, определяются соотношениями $x^{m+1}=x^{m+2}=\cdots=x^n=0$.

$l_x(r) = l_y(r) = l_z(r) = 0$, следовательно функция r сохраняется вдоль всех трех векторов. Эти вектора линейно зависимы в любой точке сферы $xl_x + yl_y = zl_z$, а значит определяют двумерное подмногообразие.

Говорят, что тензорное поле $\mathbf{T}$ инвариантно относительно векторного поля $\bar{V}$ если

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}\, \mathbf{T} = 0$$

Пусть дано множество $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots\}$ тензорных полей. Имеется следующая теорема.

Теорема 4 *Множество всех векторных полей $\{\bar{V}\}$ относительно которых все тензорные поля из F инвариантны, является алгеброй Ли.*

Док-во. Доказательство следует из линейности и следующего рассуждения:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}\mathbf{T}_i = \mathcal{L}_{\bar{U}}\mathbf{T}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}_{\bar{V}}, \mathcal{L}_{\bar{U}}]\mathbf{T}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{[\bar{V},\bar{U}]}\mathbf{T}_i = 0$$

то есть если $\bar{V}$ и $\bar{U}$ принадлежат нашему множеству векторных полей, то и их коммутатор принадлежит этому множеству. Векторные поля из этого множества не являются базисом векторного пространства, однако могут образовывать базис в алгебре. Как мы видели на примере операторов l_x, l_y, l_z, эти векторные поля линейно зависимы в $\mathbb{R}^3$, но для представления одного из этих полей через два других приходиться пользоваться переменными коэффициентами. Поэтому эти три поля суть *линейно-независимые элементы* алгебры Ли: никакая линейная комбинация этих полей с постоянными коэффициентами (не все из которых равны нулю) не равна нулевому элементу алгебры. Поэтому говорят, что эти векторные поля образуют трехмерный базис алгебры Ли.

Векторным полем Киллинга (или *вектором Киллинга*) называется такое векторное поле $\bar{V}$, для которого

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}\ g = 0$$

В координатной записи это уравнение имеет вид

$$(\mathcal{L}_{\bar{V}}\ g)_{ij} = V^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + g_{kj}\frac{\partial V^k}{\partial x^i} = 0$$

Для эвклидовой метрики $g_{ij} = \delta_{ij}$ набор векторов $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, l_x, l_y, l_z являются векторами Киллинга и образуют базис алгебры движений 3-мерного эвклидового пространства.

4.3 Основные матричные алгебры Ли и линейные векторные поля

С основными матричными группами Ли $SL(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ связаны основные матричные алгебры Ли.

- Специальная линейная группа $SL(n)$ матриц n-го порядка с определителем 1. Касательное пространство $\mathfrak{sl}(n)$ в единице есть множество матриц с нулевым следом.

- Группа вращений $SO(n)$. Касательное пространство $\mathfrak{so}(n)$ – множество всех кососимметричных матриц. Например, $\mathfrak{so}(3)$ образована матрицами

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  с коммутационными соотношениями

$$[\ell_1, \ell_2] = \ell_3, \quad [\ell_2, \ell_3] = \ell_1, \quad [\ell_3, \ell_1] = \ell_2,$$

  совпадающими с коммутационными соотношениями (25) дифференциальных операторов l_x, l_y, l_z вдоль векторных полей, соответствующих вращениям 3-мерного пространства вокруг координатных осей.

- Специальная унитарная группа $SU(n)$. Касательное пространство $\mathfrak{su}(n)$ совпадает с множеством всех безследовых косоэрмитовых матриц. Например, $\mathfrak{su}(2)$ образована матрицами

$$I_1 = \frac{\sigma_x}{2i} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{\sigma_y}{2i} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{\sigma_z}{2i} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

  совпадающими с матрицами Паули. Пользуясь свойствами матриц Паули

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \delta_{ab} \cdot 1 + i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, \sigma_c\,,$$

  где ε_{abc} полностью антисимметричный тензор нормированный условием $\varepsilon_{123} = 1$, легко вычислить коммутатор образующих I_a алгебры $su(2)$:

$$[I_a, I_b] = \varepsilon_{abc}\, I_c\,. \tag{27}$$

  Очевидно, что алгебры $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$ совпадает.

Пусть X некоторая комплексная матрица n-го порядка. Построим векторное поле T_X в пространстве $\mathbb{C}^n$, полагая его значение в точке $x \in \mathbb{C}^n$ равным

$$T_X(x) = Xx, \quad T_X = X^i_k x_k \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Такое векторное поле называется линейным, так как его компоненты линейным образом зависят от координаты пространства. Соответствующая интегральная кривая этого векторного поля в пространстве $\mathbb{C}^n$ с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = \exp(tX)x_0$$

Легко проверить, что коммутатор двух линейных векторных полей T_X и T_Y, снова есть линейное векторное поле, определяемое коммутатором матриц X и Y: $[T_X, T_Y] = T_{[X,Y]}$. Докажите этот факт. Следствием этого утверждения, является факт, что линейные векторные поля относительно операции коммутирования векторных полей образуют алгебру Ли изоморфную алгебре Ли всех матриц n-го порядка.

Векторные поля, можно ввести также на группе Ли. Пусть, опять X некоторая комплексная матрица n-го порядка. Рассмотрим линейное преобразование пространства $G \in \mathbb{C}^{n^2}$ вида

$$G \to GX$$

Соответствующее линейное векторное поле в этом пространстве обозначим L_X. Его значение в точке G определим как

$$L_X(G) = GX$$

Интегральные кривые этого векторного поля определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка $\partial_t G(t) = L_X(G) = GX$ и для начальных условий $G(t)|_{t=0} = G_0$ имеют единственное решение

$$G(t) = G_0 \exp(tX)$$

Таким образом, однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем L_X – это умножение справа на матрицу $\exp(tX)$. Множество таких матриц называется однопараметрической подгруппой группы G. Векторные поля L_X обладают важным свойством – левоинвариантностью (инвариантностью относительно левых сдвигов). Действительно, из определения этих векторных полей следует, что

$$BL_X(A) = L_X(BA)$$

Теорема 5 *Левоинвариантные векторные поля на группе G образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре ли $\mathfrak{g}$ группы G. Другими словами, линейное пространство совпадающее с касательным пространством в единице группы Ли G называется алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ этой группы.*

Рассмотрим группу $SU(2)$ и ее алгебру $\mathfrak{su}(2)$. Комплексные параметры a и b для произвольного элемента этой группы $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ могут быть выбраны как

$$\begin{aligned} a &= (\cos(\varphi_1/2)\cos(\varphi_2/2) - i\sin(\varphi_1/2)\sin(\varphi_2/2))\ e^{\frac{\varphi_3}{2i}}\,, \\ b &= -(\cos(\varphi_1/2)\sin(\varphi_2/2) + i\sin(\varphi_1/2)\cos(\varphi_2/2))\ e^{-\frac{\varphi_3}{2i}}\,. \end{aligned}$$

(при этом групповое соотношение $|a|^2+|b|^2 = 1$ будет выполняться автоматически). Можно легко проверить что такой элемент группы будет представим в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \exp(\varphi_1 \cdot I_1)\exp(\varphi_2 \cdot I_2)\exp(\varphi_3 \cdot I_3) \tag{28}$$

произведения одно-параметрических подгрупп, где левоинвалиантные векторные поля определяются матрицами Паули (26).

Рассмотрим группу $SO(3)$ и ее алгебру $\mathfrak{so}(3)$. Используя определение этой матричной группы можно получить, что элементами ее алгебры будут кососимметричные матрицы

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Любой элемент группы $SO(3)$ можно выразить через углы Эйлера и произведение соответствующих однопараметрических подгрупп:

$$\exp(\phi_1 I_3)\cdot\exp(\theta I_1)\cdot\exp(\phi_2 I_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_1\sin\phi_2 - \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & \sin\theta\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\theta\cos\phi_1 \\ \sin\theta\sin\phi_2 & \sin\theta\cos\phi_2 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

При этом соответствующий элемент группы $SU(2)$ будет иметь вид:

$$\exp(\phi_1 I_3)\cdot\exp(\theta I_1)\cdot\exp(\phi_2 I_1) = \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_1+\phi_2)/2}\cos(\theta/2) & ie^{i(\phi_2-\phi_1)/2}\sin(\theta/2) \\ ie^{i(\phi_1-\phi_2)/2}\sin(\theta/2) & e^{i(\phi_1+\phi_2)/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

что доказывает существование гомоморфизма группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ с ядром

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача. Почему?

4.4 Алгебра Ли для группы Ли

В любой группе G есть выделенный элемент $e \in G$ (единица группы). Выберем координаты $\bar\phi = \{\phi^1, \ldots, \phi^n\}$ и $g(\bar\phi) \in G$ в окрестности единицы группы таким образом, что $g(\phi^1, \ldots, \phi^n)|_{\bar\phi=0} = e$. В этих координатах можно записать групповые операции: произведение элементов группы с координатами $\bar\phi$ и $\bar\psi$ есть элемент группы с координатами $\bar\chi(\bar\phi, \bar\psi)$, а обратный элемент – координаты $\tilde\phi = \tilde\phi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Функции $\bar\chi$ и $\tilde\phi$ удовлетворяют свойствам

1. $\bar\chi(\bar\phi, \bar 0) = \bar\phi = \bar\chi(\bar 0, \bar\phi)$ (единица);

2. $\bar\chi(\bar\phi, \tilde\phi(\bar\phi)) = \bar 0$ (обратный элемент);

3. $\bar\chi(\bar\phi, \bar\chi(\bar\psi, \bar\nu)) = \bar\chi(\bar\chi(\bar\phi, \bar\psi), \bar\nu)$ (ассоциативность).

Примером функций χ для координат введенных правилом (20) является следующая формула

$$\chi(X, Y) = X + Y + XY$$

где элементы матриц X и Y являются координатами групповых элементов $A = I + X$ и $B = I + Y$. Свойства 1 и 2 выполняются очевидным образом. Справедливость свойства 3 следует из сравнения следующих формул

$$\chi(X, \chi(Y, Z)) = X + \chi(Y, Z) + X\chi(Y, Z) = X + Y + Z + YZ + XY + XZ + XYZ$$

$$\chi(\chi(X, Y), Z) = \chi(X, Y) + Z + \chi(X, Y)Z = X + Y + Z + YZ + XY + XZ + XYZ$$

Определим касательные вектора к группе в окрестности единицы группы следующими формулами

$$I_i = \left. \frac{\partial g(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial \phi^i} \right|_{\bar{\phi}=0} . \tag{30}$$

Другими словами вблизи единичного элемента (около точки группового многообразия с координатами $\bar{\phi} = 0$) мы будем иметь разложение

$$g(\phi^1, \dots, \phi^n) = e + \phi^i I_i + \phi_i \phi_j I_{ij} + \phi_i \phi_j \phi_k I_{ijk} + \dots ,$$

где операторы I_i, I_{ij}, I_{ijk} и т.д. не зависят от групповых параметров и являются симметричными объектами при перестановки любой пары индексов.

Нашей задачей является проверка утверждения, что групповое свойство (19) ведет к определенному соотношению на касательные вектора I_i, которое превращает набор этих касательных векторов в алгебру Ли. Функции $\bar{\chi}(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ полностью определяют группу G, в частности, из свойства 1 и гладкости функций $\bar{\chi}$ следует, что

$$\chi^i(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = \phi^i + \psi^i + f^i_{jk} \phi^j \psi^k + (\text{члены порядка 3})$$

Запишем групповое умножение (19) вблизи единичного элемента с точностью до 2-ого поорядка малости по ϕ и ψ

$$(e + \phi^i I_i + \phi_i \phi_j I_{ij} + \dots)(e + \psi^i I_i + \psi_i \psi_j I_{ij} + \dots) = (e + \chi^i I_i + \chi_i \chi_j I_{ij} + \dots) =$$

$$= e + (\phi^i + \psi^i + f^i_{jk} \phi^j \psi^k + \dots) I_i + (\phi^i + \psi^i + \dots)(\phi^j + \psi^j + \dots) I_{ij} + \dots$$

или

$$e + \phi^i I_i + \psi^i I_i + \phi_i \psi_j I_i I_j + \phi_i \phi_j I_{ij} + \psi_i \psi_j I_{ij} + \dots =$$

$$= e + (\phi^i + \psi^i + f^i_{jk} \phi^j \psi^k + \dots) I_i + (\phi^i \phi^j + 2\phi^i \psi^j + \psi^i \psi^j + \dots) I_{ij} + \dots$$

Первое нетривиальное соотношение в последнем равенстве возникнет как коэффициент при $\phi^i\psi^j$ и будет равно

$$I_i I_j = f_{ij}^k I_k + I_{ij} \tag{31}$$

Учитывая симметрию $I_{ij} = I_{ji}$ из соотношения (31) следует что

$$[I_i, I_j] = I_i I_j - I_j I_i = C_{ij}^k \; I_k \,, \tag{32}$$

где антисимметричные константы $C_{ij}^k = (f_{ij}^k - f_{ij}^k) = -C_{ji}^k$ называются *структурными* константами группы Ли.

Аналогично можно показать, что ассоциативность группового умножения, приводит к соотношению на константы f_{ij}^k

$$\sum_m f_{ik}^m f_{jm}^n = \sum_m f_{ji}^m f_{mk}^n \,, \quad \forall n, i, j, k \tag{33}$$

Это соотношение и его пять аналогов со всеми возможными перестановками трех индексов i, j, k приводят к соотношению на структурные константы

$$C_{ij}^m C_{mk}^n + C_{ki}^m C_{mj}^n + C_{jk}^m C_{mi}^n = 0 \,, \tag{34}$$

которое называется тождеством Якоби.

По построению элементы касательного пространства T могут быть разложены по базису генераторов группы (30)

$$X = x^i \; I_i \,. \tag{35}$$

Тогда в силу соотношений (32) для любых векторов касательного пространства будут выполнятся соотношения

1. $[X, Y]$ – билинейная операция в T;
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ (кососимметричность);
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (тождество Якоби).

Это означает, что касательное пространство к группе в единице является алгеброй Ли, которую и называют *алгеброй Ли группы Ли.*

Очевидно, что не любой набор чисел C_{ij}^k антисимметричный по нижней паре индексов может быть структурной константой некоторой группы Ли. Фактически задачу о классификации алгебр Ли можно было бы свести к задаче нахождения всех неэквивалентных решений тождества Якоби. Однако такой прямолинейный способ является слишком сложным и мы в последующих лекциях будем следовать другому подходу, предложенному Картаном.

Итак, с каждой группой Ли G связана алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – алгебра инфинитезимальных образующих I_a. Левые и правые инфинитезимальные сдвиги на группе G задают векторные поля на группе Ли, которые определяют локальные свойства соответствующей группы Ли. Однако, с одной и той же алгеброй Ли могут быть связаны разные группы Ли, многообразия которых отличаются глобальными (топологическими) свойствами.

Однопараметрические подгруппы в абстрактной группе Ли G определяются как множества элементов (параметризованные кривые) $F(t) \in G$ такие, что $F(0) = e$ и $F(t_1+t_2) = F(t_1)F(t_2)$, $F(-t) = F(t)^{-1}$. В матричных группах однопараметрические подгруппы всегда имеют вид $F(t) = \exp(tA)$, где элемент A принадлежит некоторой матричной алгебре Ли. В абстрактной группе Ли производная от однопараметрической подгруппы $\frac{dF(t)}{dt}$ определяет вектор касательного пространства $F(t)^{-1}\frac{dF(t)}{dt}$ не зависящий от параметра t в силу простой выкладки

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left.\frac{dF(t+\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = F(t)\left.\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

С формальной точки зрения множество преобразований

$$g(\bar{\phi}) = g(\bar{0})\exp(\phi^a I_a) = g(\bar{0})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\phi^a I_a)^k}{k!} \tag{36}$$

где $g(\bar{0})$ - единица в группе, а I_a – образующие алгебры Ли $\mathfrak{g}$, образуют группу Ли. То, что множество элементов (36) действительно образует группу следует из тождества Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$e^X \cdot e^Y = e^{X+Y+[X,Y]/2+[X-Y,[X,Y]]/12+\cdots}$$

где X, Y некоммутирующие операторы. Так как в правой части формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа под экспонентой появляются только коммутаторы (относительно которых алгебра Ли замкнута), то для произведения элементов (36), формально имеется групповое свойство

$$\exp(\phi^a I_a)\exp(\psi^a I_a) = \exp(\chi^a(\bar{\phi},\bar{\psi})I_a)$$

где функции $\chi^a(\bar{\phi},\bar{\psi}) = \phi^a + \psi^a + \frac{1}{2}C^a_{bc}\phi_a\psi_b + \cdots$ определяются из формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа и полностью определяют структуру группы Ли. Это утверждение может быть сформулировано как

Теорема 6 *Если функции χ^a, задающие умножение в группе Ли G, аналитичны (то есть разлагаются в сходящиеся степенные ряды), то алгебра Ли однозначно определяет умножение в группе G для некоторой окрестности единицы $e \in G$.*

В силу этого утверждения, образующие I_a алгебры $\mathfrak{g}$, называются генераторами группы G, имеющей алгебру $\mathfrak{g}$.

Присоединенное действие группы самой на себя

$$G \to G : g \to h \cdot g \cdot h^{-1}$$

сохраняет единицу группы, а значит задает линейное отображение касательного пространства в единице группы, тем самым присоединенное действие группы на алгебре Ли, оставляет инвариантной алгебру Ли. Действительно, этот факт можно проверить пользуясь свойствами экспоненциального отображения

$$e^{\varepsilon A}\cdot B\cdot e^{-\varepsilon A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ A^k\cdot B\cdot(-A)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ A^k\cdot B\cdot(-A)^{n-k} = \underbrace{[A,[A,\ldots,[A,B]\ldots]]}_{n\ \text{раз}}$$

которые могут быть легко доказаны по индукции. Если элемент группы Ли $g(x) = \exp(A(x))$ и соответствующий элемент алгебры Ли $A(x)$ зависит от какого-то параметра, то в силу легко проверяемого равенства

$$\partial\left(e^{\varepsilon A}\right)\cdot e^{-\varepsilon A} = \partial(A) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\underbrace{[A,[A,\ldots,[A,\partial(A)]\ldots]]}_{n-1\ \text{раз}}$$

следует, что произведение $\partial_\mu\, g(x)\cdot g(x)^{-1}$ также принадлежит алгебре.