

§ 3. Ранг матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Минор M_k матрицы A называется ее **базисным минором**, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы A более высокого порядка $k+1, k+2, \dots, t$ равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Рангом матрицы** A называется порядок ее базисного минора.

Обозначают: $r(A)$ или $\text{rang}(A)$.

Методы нахождения ранга матрицы

1) Метод окаймляющих миноров.

Пусть M_s – минор порядка s . ***Окаймляющим минором*** для минора M_s называется любой минор порядка $s+1$, содержащий минор M_s .

ТЕОРЕМА 1. *Если в матрице A есть минор k -го порядка отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен k .*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (***метод окаймляющих миноров***):

- 1) находим в матрице минор M_k порядка k , отличный от нуля (где $k \geq 1$);
- 2) ищем его окаймляющий минор M_{k+1} отличный от нуля. Если такого минора не существует, то ранг матрицы равен k . Если окаймляющий минор $M_{k+1} \neq 0$, то рассматриваем окаймляющие миноры для M_{k+1} и т.д.

2) Метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующего вида:

- 1) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
- 2) прибавление к i -й строке (столбцу) k -й строки (столбца), умноженной на число $\alpha \neq 0$;
- 3) перестановка i -й и k -й строки (столбца);
- 4) вычеркивание одной из двух пропорциональных или равных строк (столбцов);
- 5) вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Матрица **В** называется **эквивалентной** матрице **А**, если она может быть получена из **А** элементарными преобразованиями.

Обозначают: $A \sim B$.

ТЕОРЕМА 2. *Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.*

ТЕОРЕМА 3. *Любая матрица A эквивалентна некоторой треугольной или трапецевидной матрице, не содержащей нулевых и пропорциональных строк. Причем эта треугольная или трапецевидная матрица может быть получена из A элементарными преобразованиями только строк.*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (**метод элементарных преобразований**):

- 1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы A эквивалентную треугольную или трапецевидную матрицу B ;
- 2) находим в матрице B базисный минор и определяем ранг матрицы B и матрицы A .

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестные только в первой степени и не содержит произведений неизвестных, т.е. если оно имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, где a_i, b – числа.

a_i называются *коэффициентами уравнения*, b называется *свободным членом*.

Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через \mathbf{A} и \mathbf{A}^* следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Матрицу \mathbf{A} называют *основной матрицей* системы (1),
матрицу \mathbf{A}^* – *расширенной матрицей* системы (1).

Пусть \mathbf{X} – матрица-столбец неизвестных, \mathbf{B} – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$. Его называют *матричной формой* системы (1).

Упорядоченный набор чисел c_1, c_2, \dots, c_n называется **решением системы** (1), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**. Система, имеющая множество решений, называется **неопределенной**.

ТЕОРЕМА 1 (Кронекера – Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*).$$

ТЕОРЕМА 2 (критерий единственности решения). Система линейных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n.$$

2. Методы решения систем линейных уравнений

Матричный метод.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Обратной** к матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} , такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- 1) Если матрица A имеет обратную, то A и A^{-1} – квадратные одного порядка.
- 2) Если обратная матрица существует, то она единственная.
- 3) Если матрица A имеет обратную, то определитель матрицы A отличен от нуля.

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется **невыврожденной**.

ТЕОРЕМА 3. Пусть \mathbf{A} – квадратная матрица. Матрица \mathbf{A} имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель $|\mathbf{A}|$ отличен от нуля. Причем обратная матрица \mathbf{A}^{-1} может быть найдена по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$$

где \mathbf{S} – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы \mathbf{A} , т.е.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица \mathbf{S}^T называется **союзной** (или присоединенной, или взаимной) для матрицы \mathbf{A} .

Нахождение решения по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ называют **матричным методом решения** системы.

Метод Крамера

ТЕОРЕМА 4 (Крамера).

Если в системе линейных уравнений число уравнений m и число неизвестных n совпадает и $|\mathbf{A}| \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

где $D = |\mathbf{A}|$, а D_i — определитель, получаемый из определителя D заменой его i -го столбца на столбец свободных членов.

Формулы (4) называются **формулами Крамера**.