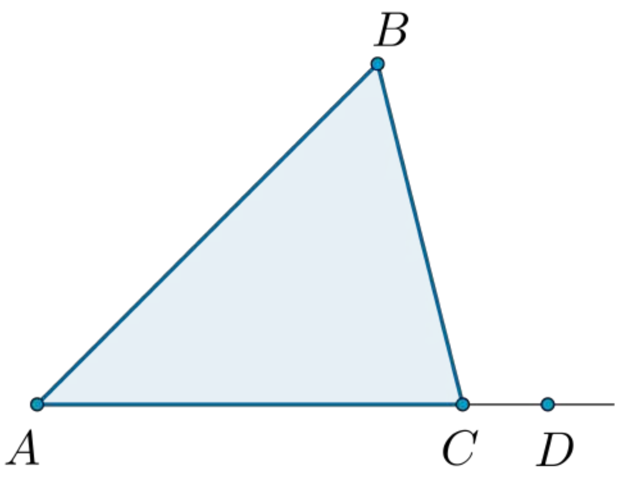
Часть 1. Базовые факты о треугольниках и углах. Параллельность прямых.

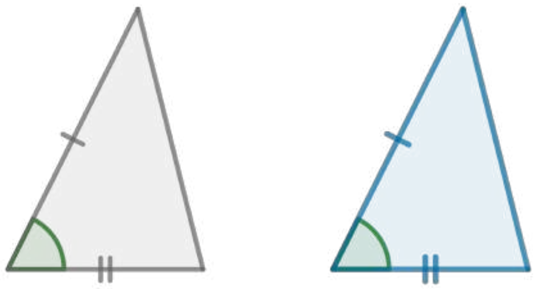
1. Сумма углов треугольника равна 180°: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним:
$\angle BCD = \angle A + \angle B$.

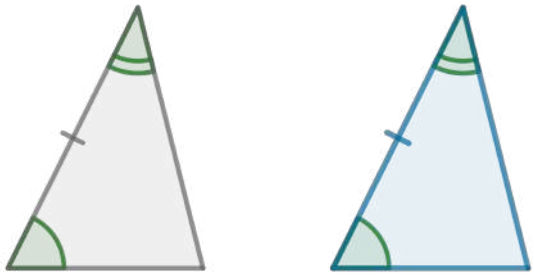


Признаки равенства треугольников.

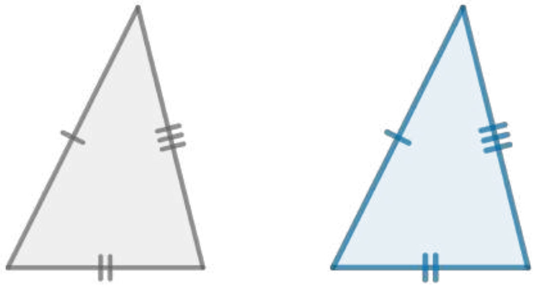
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



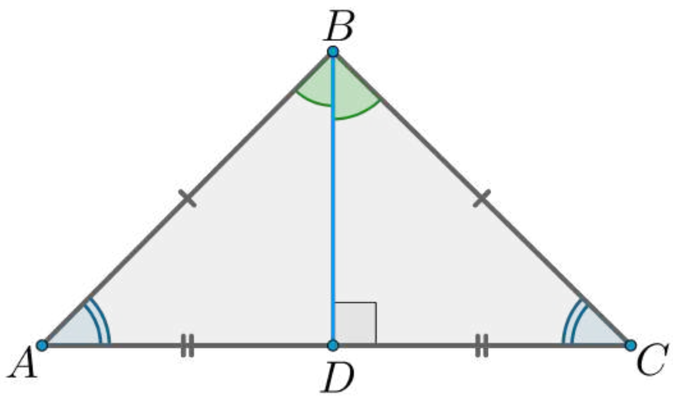
2. Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



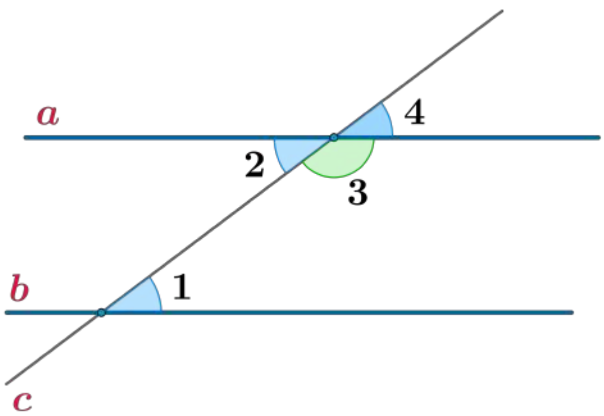
Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья – основанием.



1. Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.

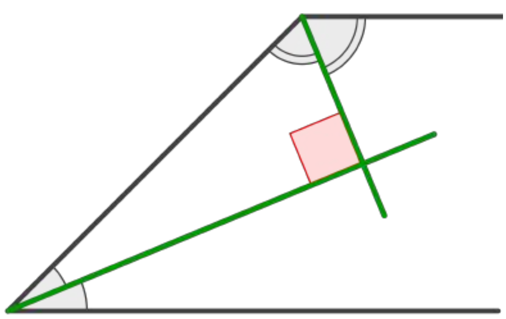
2. Углы при основании равны: $\angle A = \angle C$.

Свойства и признаки параллельности прямых.



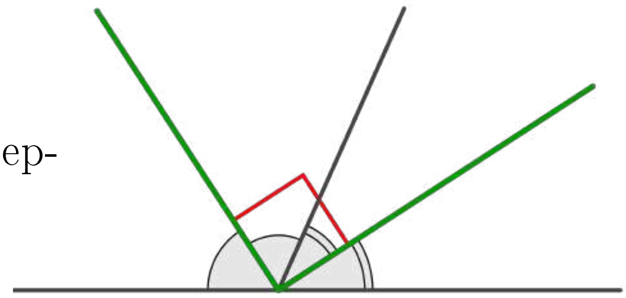
Три свойства: если $a \parallel b$ и c – секущая, то
1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние)

Три признака: $a \parallel b$ при секущей c, если:
1. $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие)
2. $\angle 1 = \angle 4$ (соответственные)
3. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (односторонние)



Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны.

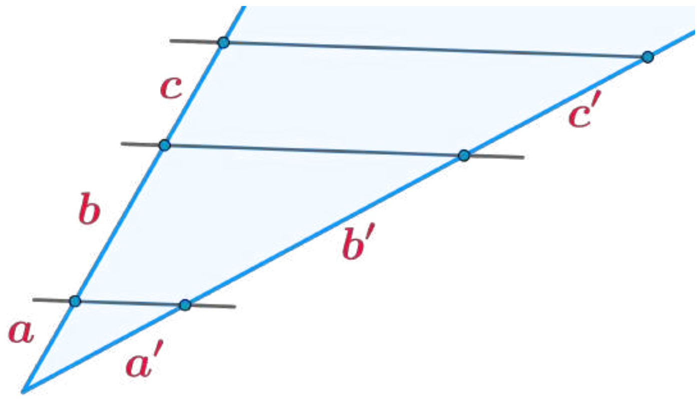
Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.



Теорема Фалеса

Если на одной из сторон угла отложить последовательно отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на второй стороне угла отрезки, пропорциональные отрезкам на первой стороне:

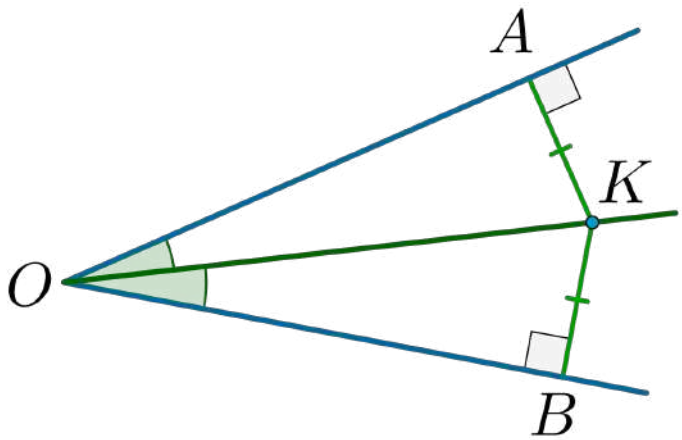
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

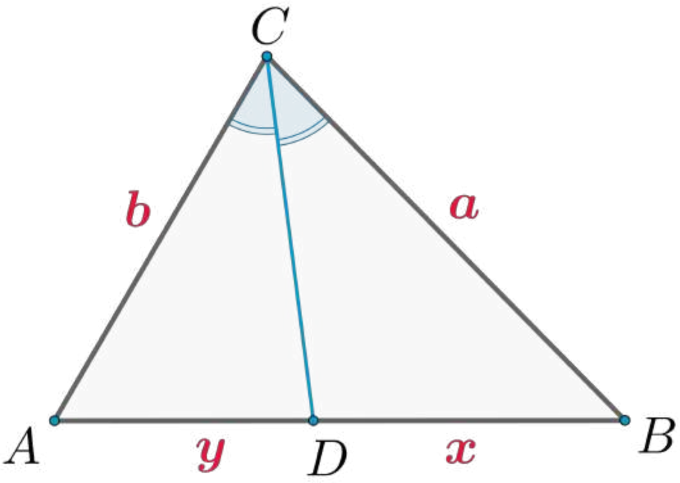


---

1. Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

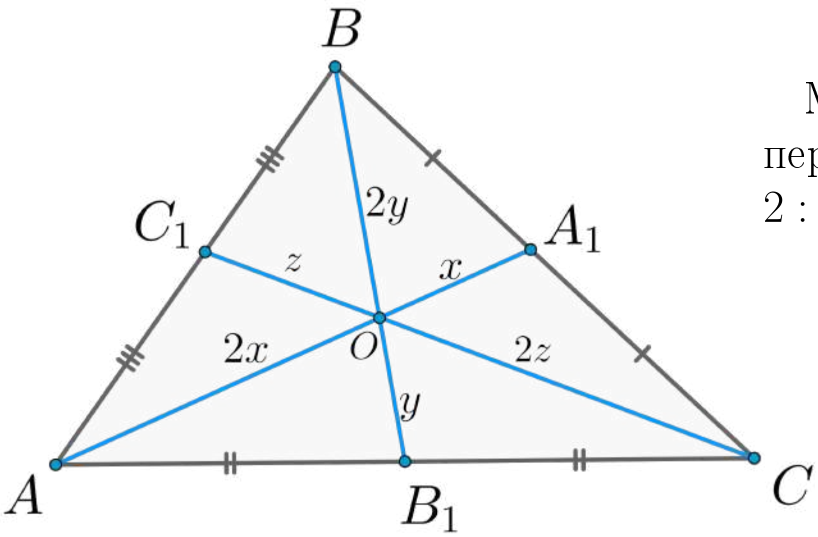
2. Верно и обратное: если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.





Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

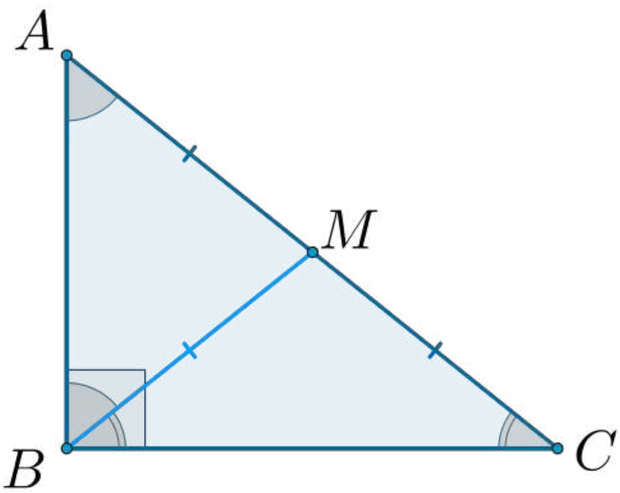
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 =$$

$$CO : OC_1 = 2 : 1$$



Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

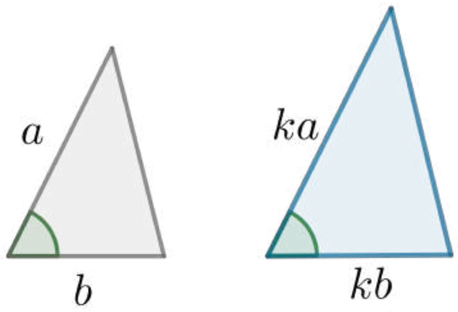
$$BM = \frac{1}{2}AC = AM = MC$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника: $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$.

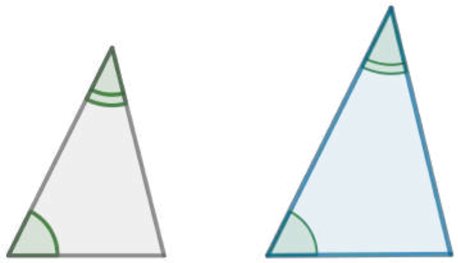
Признаки подобия треугольников.

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие против равных углов, относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом.

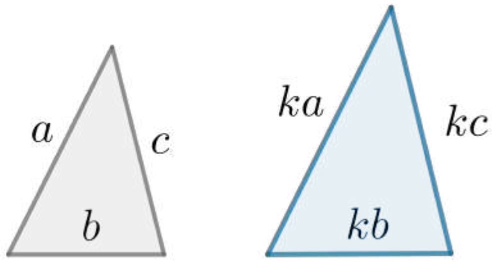
1. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.



2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



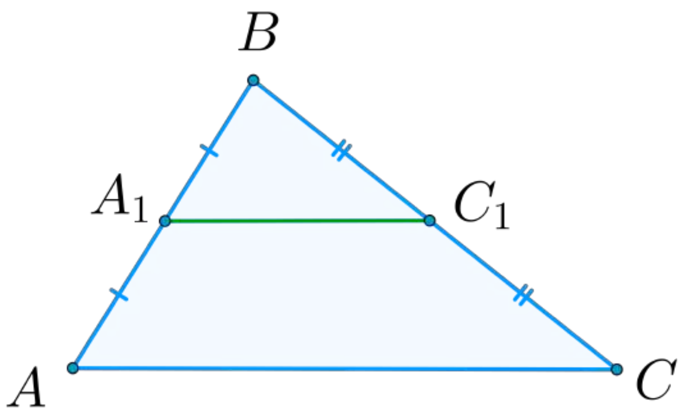
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



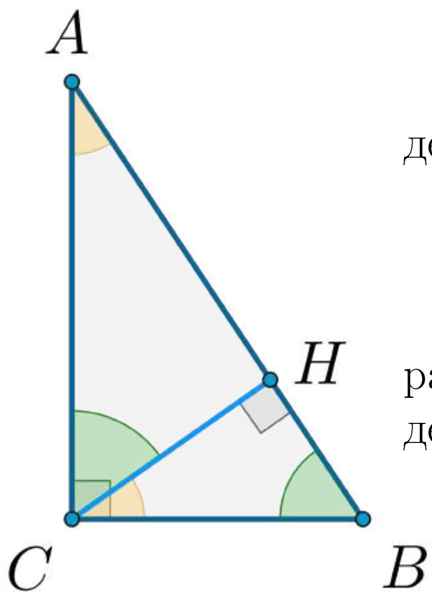
Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

1. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне: $A_1C_1 \parallel AC$.

2. Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны: $A_1C_1 = 0,5AC$.



3. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный ему треугольник: $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.



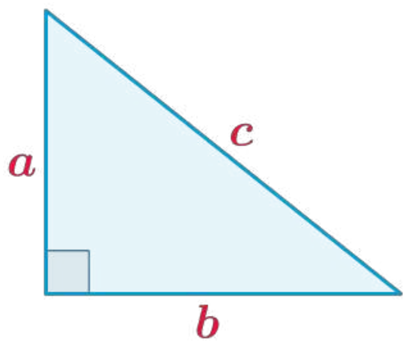
1. Высота из вершины прямого угла треугольника делит его на два треугольника, подобных исходному:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle BHC$$

2. Квадрат высоты из прямого угла треугольника равен произведению длин отрезков, на которые она делит гипотенузу:

$$CH^2 = AH \cdot BH$$

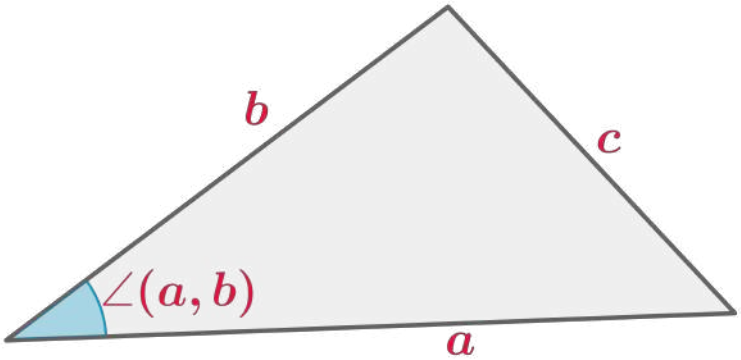
Теорема Пифагора



Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема косинусов

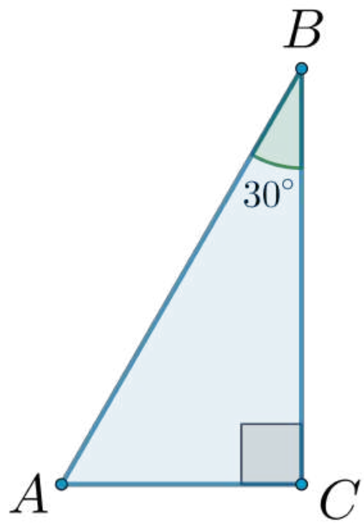


Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle(a, b)$$

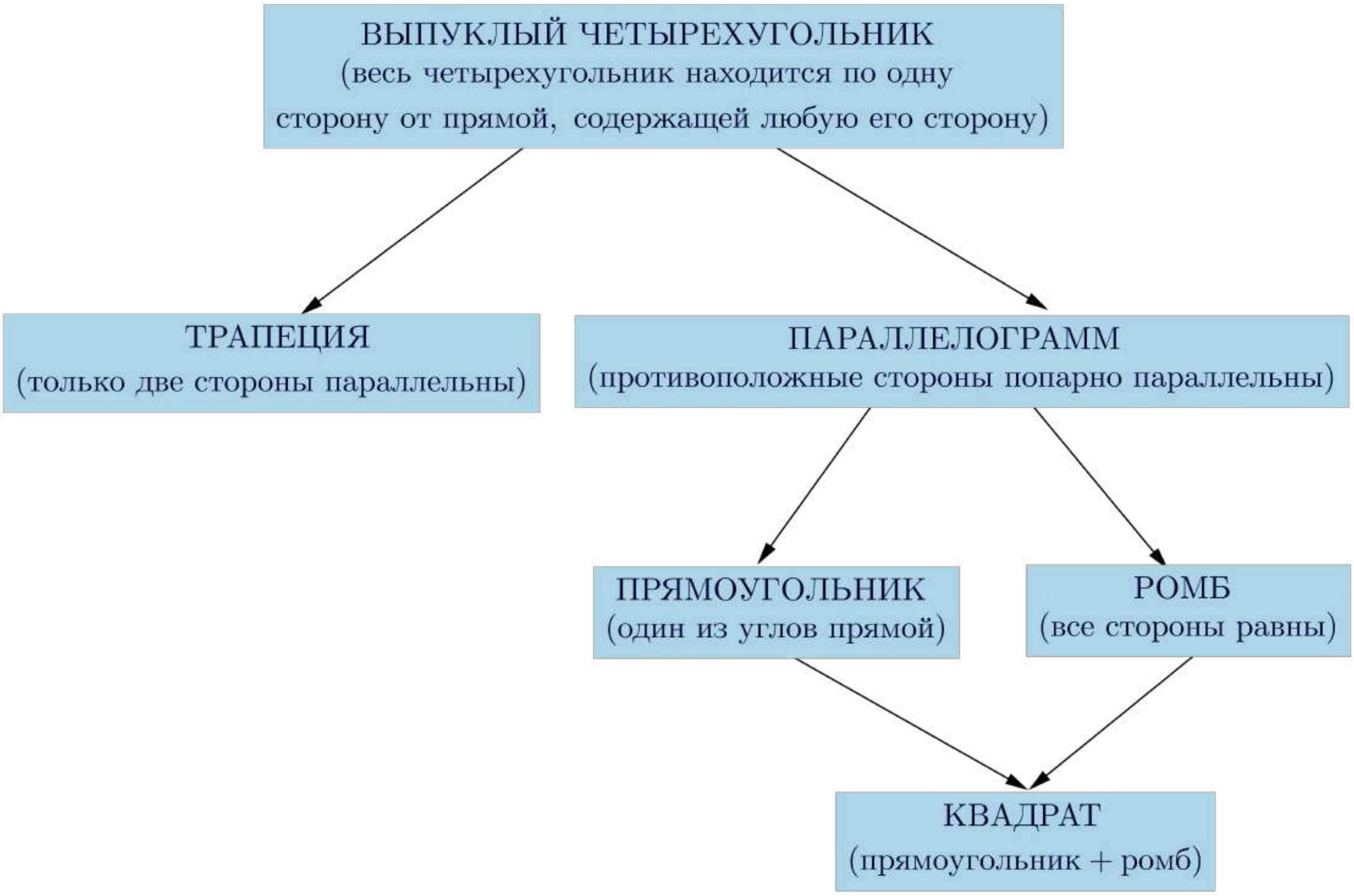
1. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

2. Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.



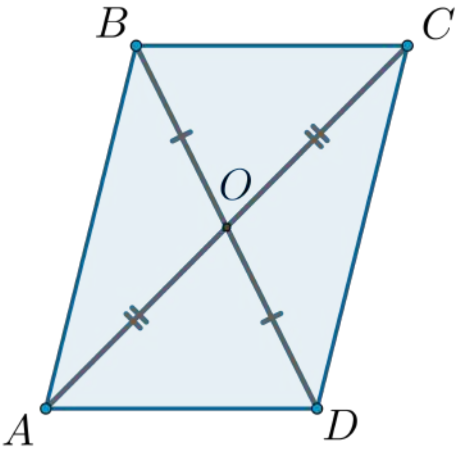
Часть 2. Базовые факты о четырехугольниках и о правильном шестиугольнике.

Сумма внутренних углов любого выпуклого четырехугольника равна 360°.



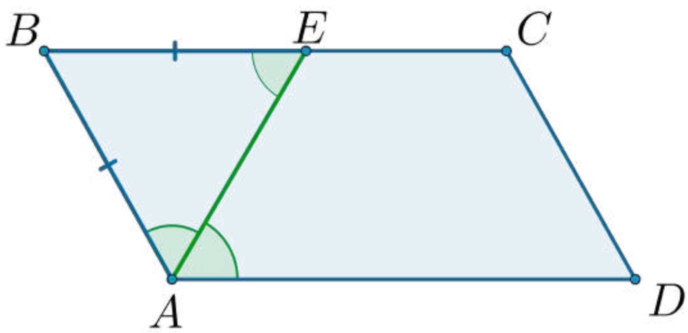
1. Если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны, а две другие не параллельны, то такой четырехугольник называется трапецией.
2. Если у выпуклого четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, то он называется параллелограммом.
3. Если у параллелограмма все стороны равны, то он называется ромбом.
4. Если у параллелограмма хотя бы один угол прямой, то он называется прямоугольником.
5. Если у ромба хотя бы один угол прямой, то он называется квадратом ИЛИ если у прямоугольника все стороны равны, то он называется квадратом.

Параллелограмм - четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



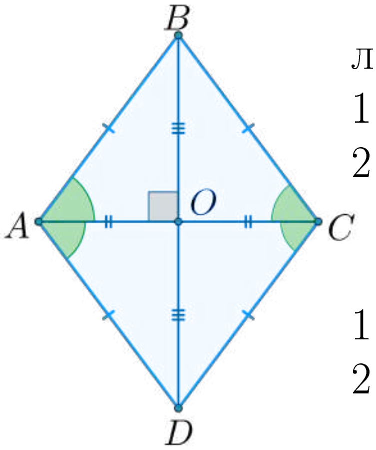
Признаки: четырехугольник является параллелограммом, если
1. противоположные стороны попарно равны.
2. две стороны равны и параллельны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойства: у параллелограмма
1. противоположные стороны попарно равны.
2. противоположные углы попарно равны.
3. диагонали точкой пересечения делятся пополам.



Биссектриса AE параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть $AB = BE$ и $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$.

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны. Соответственно, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

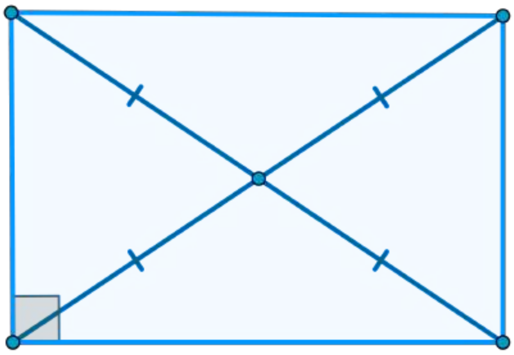


Признаки: параллелограмм является ромбом, если
1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Свойства: у ромба
1. диагонали взаимно перпендикулярны.
2. диагонали являются биссектрисами его углов.

Прямоугольник - параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой.
Соответственно, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

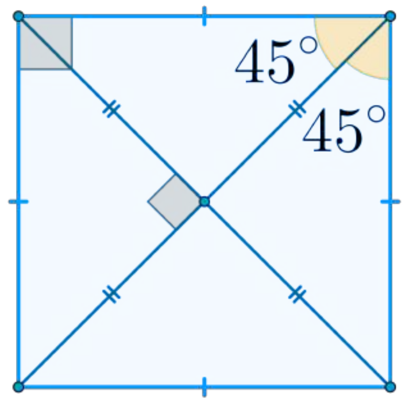
Признаки:
1. Если у выпуклого четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.
2. Если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.



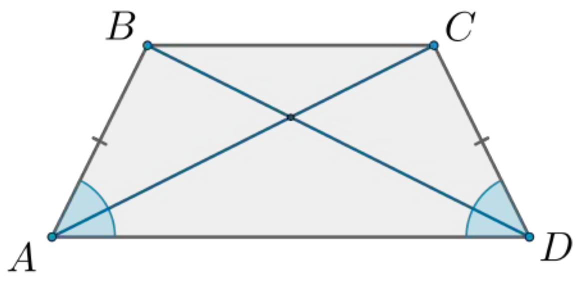
Свойство:
Диагонали прямоугольника равны.

Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны.
Альтернативное определение: квадрат – это ромб, у которого хотя бы один угол прямой.
Соответственно, квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Свойства:
1. Все стороны равны.
2. Все углы прямые.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
4. Диагонали равны.
5. Диагонали взаимно перпендикулярны.
6. Диагонали делят углы квадрата пополам.



Трапеция – выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.
Параллельные стороны называются основаниями, а две другие – боковыми.



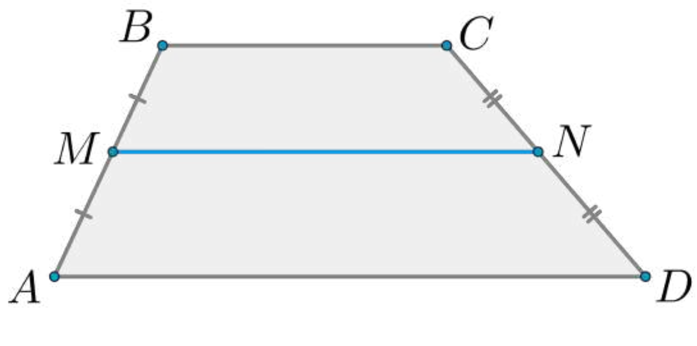
Свойство:
Сумма углов при боковой стороне равна 180°:
$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны.

Если у трапеции:
1. углы при основании равны;
ИЛИ
2. диагонали равны,
то она является равнобедренной.

У равнобедренной трапеции углы при основании равны и диагонали равны.

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.



1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции.

2. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований:

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

Правильный многоугольник – многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

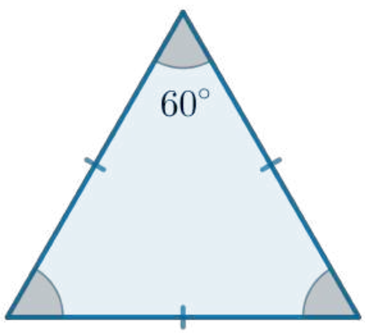
Важные факты:

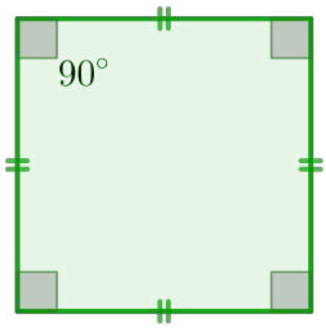
1) Правильный (равносторонний) треугольник: все углы равны по 60°.

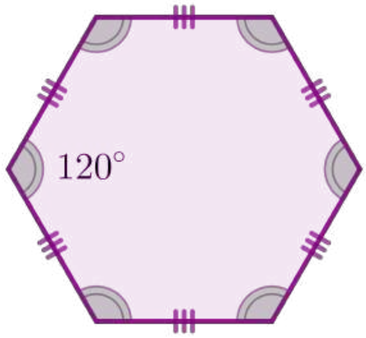
2) Правильный четырехугольник – это квадрат.

3) Правильный шестиугольник: все углы равны по 120°.

4) Если у правильного многоугольника n углов (соответственно, и n сторон), то каждый его угол равен $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.







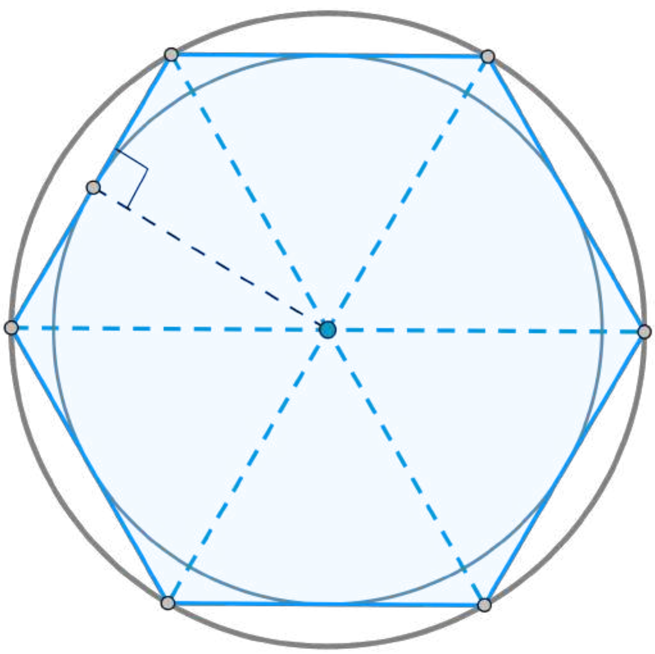
Подробнее о правильном шестиугольнике:

1) Большие диагонали делят его на 6 равных равносторонних треугольников.

2) Большая диагональ в два раза больше стороны.

3) Центры вписанной и описанной окружностей совпадают – это точка пересечения больших диагоналей.

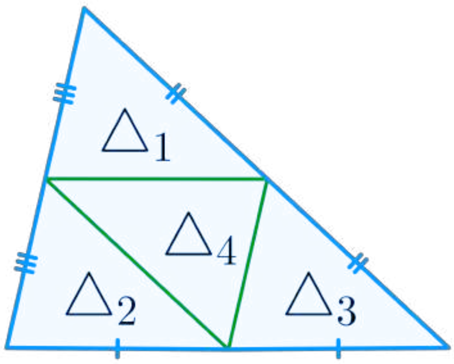
4) Радиус описанной окружности равен стороне.



Часть 3. Теоремы о площадях и периметрах треугольников.

Средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника:

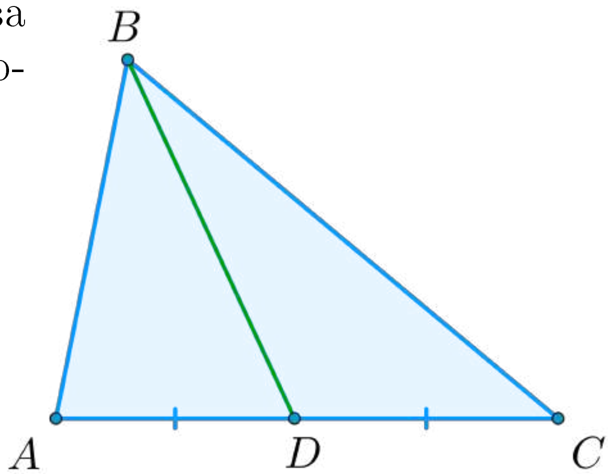
$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4$$



Следовательно, площади этих треугольников равны:

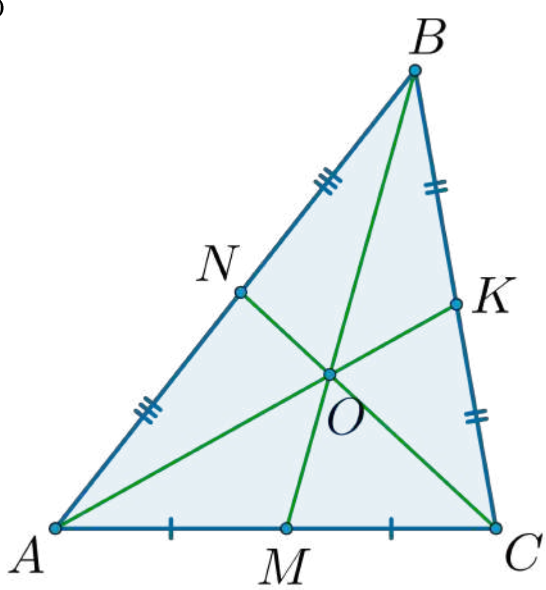
$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$

Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих):



$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$$

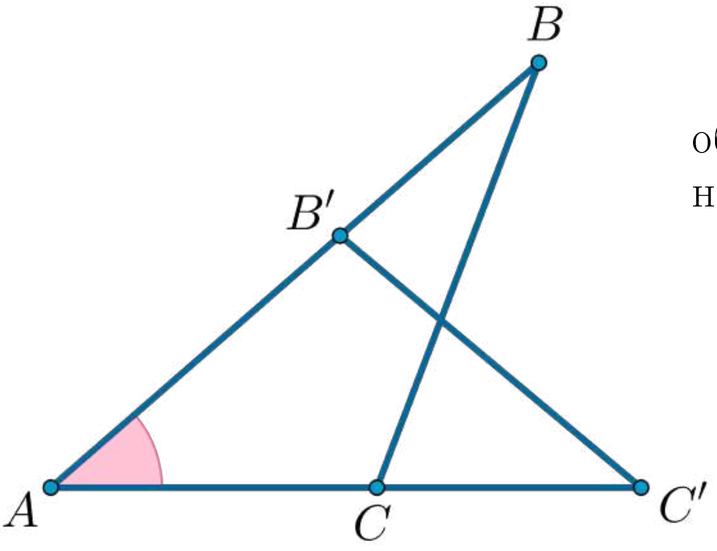
Все три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников:



$$S_{\triangle AOM} = S_{\triangle COM} =$$

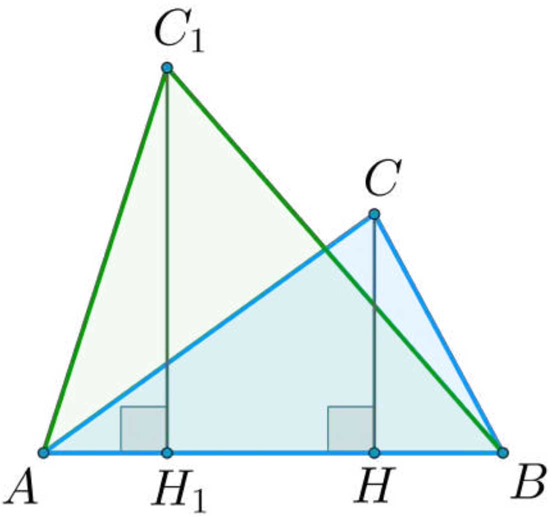
$$= S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOK} =$$

$$= S_{\triangle BON} = S_{\triangle AON}$$



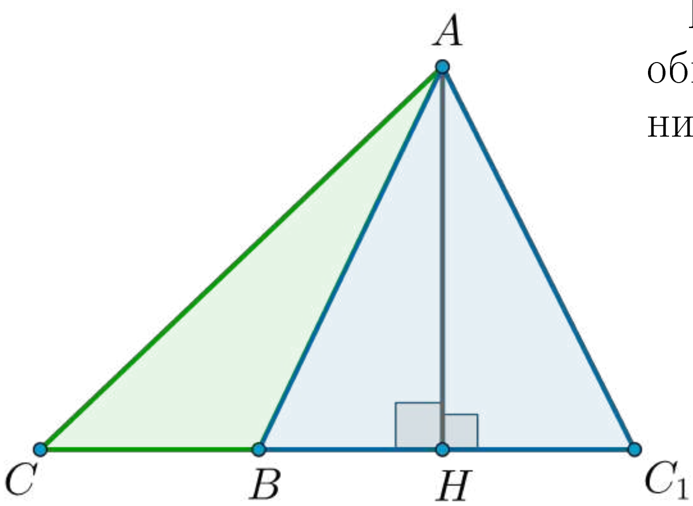
Площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения сторон, образующих этот угол:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$



Площади треугольников, имеющих общую сторону, относятся как высоты, проведенные к этой стороне:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{CH}{C_1H_1}$$

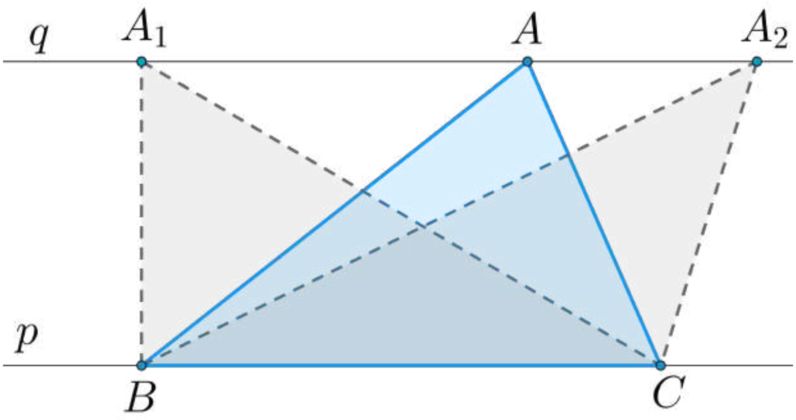


Площади треугольников, имеющих общую высоту, относятся как основания, к которым эта высота проведена:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{BC}{BC_1}$$

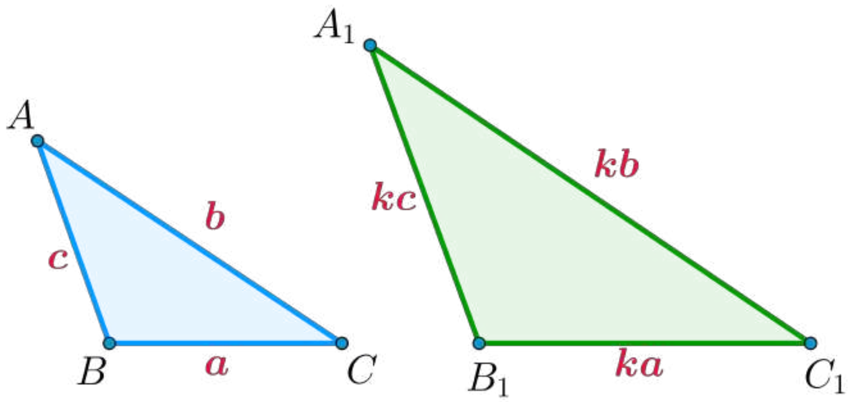
Если прямые p и q параллельны, то

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC}$$



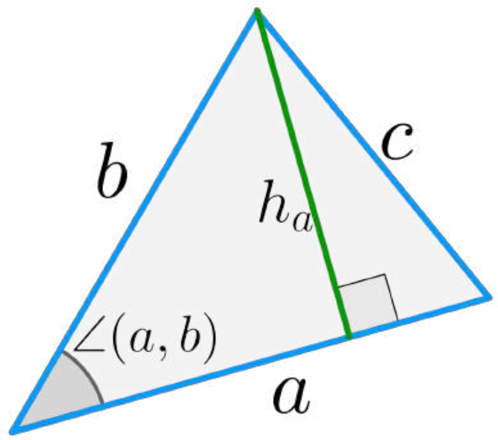
Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$$



Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия:

$$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = k$$



1. Формула Герона площади треугольника:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2. Площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту:

$$S_\triangle = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

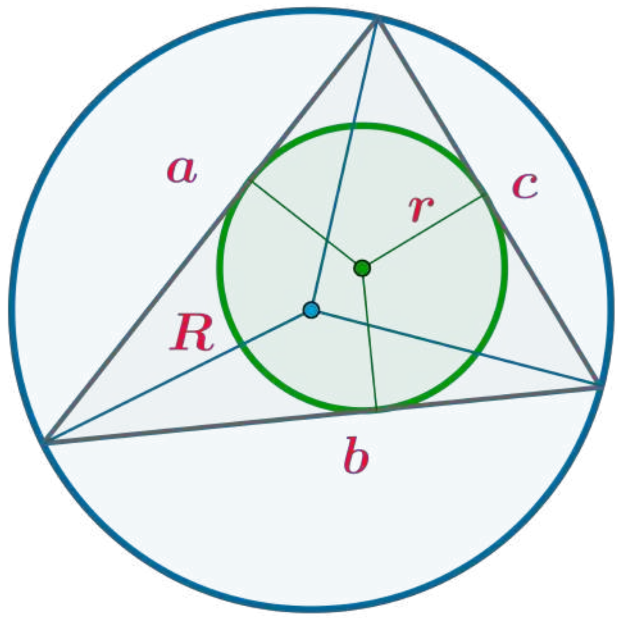
3. Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\angle(a,b)$$

---

1. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S_\triangle = p \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



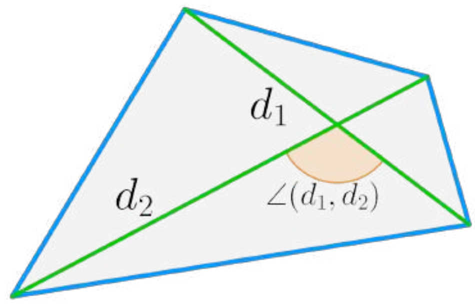
2. Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности:

$$S_\triangle = \frac{abc}{4R}$$

Часть 4. Базовые теоремы о площадях четырехугольников.

Площадь выпуклого многоугольника

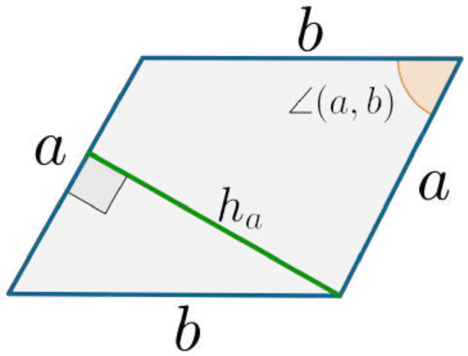
— равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними:



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \angle(d_1, d_2)$$

Площадь параллелограмма

— равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне:



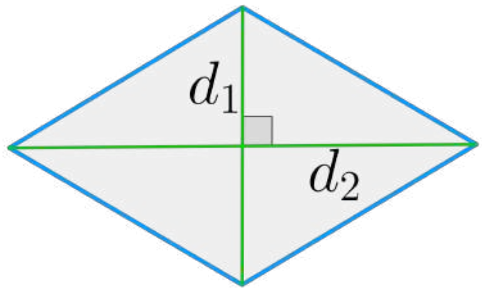
$$S = a \cdot h_a$$

— равна произведению соседних сторон на синус угла между ними:

$$S = ab \cdot \sin \angle(a, b)$$

— можно искать по формуле площади выпуклого многоугольника.

Площадь ромба

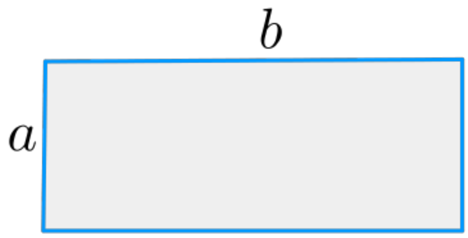


— равна полупроизведению диагоналей (следствие формулы для площади выпуклого многоугольника):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

— можно искать по формулам площади параллелограмма.

Площадь прямоугольника

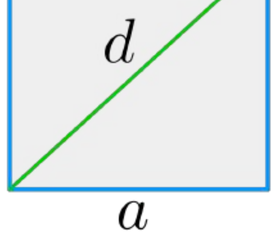


— равна произведению его соседних сторон:

$$S = ab$$

— можно искать по формуле площади выпуклого многоугольника.

Площадь квадрата



— равна квадрату его стороны:

$$S = a^2$$

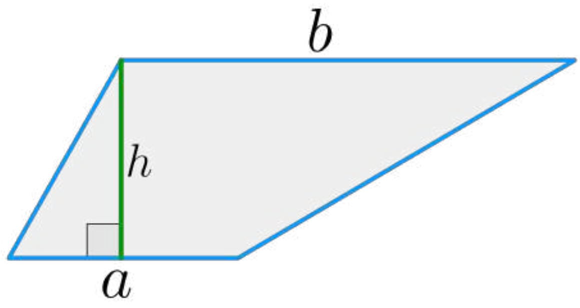
— равна половине квадрата его диагонали (следствие формулы для площади ромба):

$$S = \frac{1}{2} d^2$$

Площадь трапеции

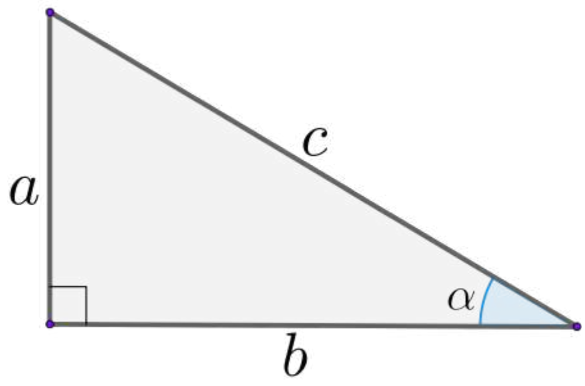
— равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



— можно искать по формуле площади выпуклого многоугольника.

Часть 5. Тригонометрия в прямоугольном треугольнике.



В прямоугольном треугольнике:

► Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

► Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

► Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

► Котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему:

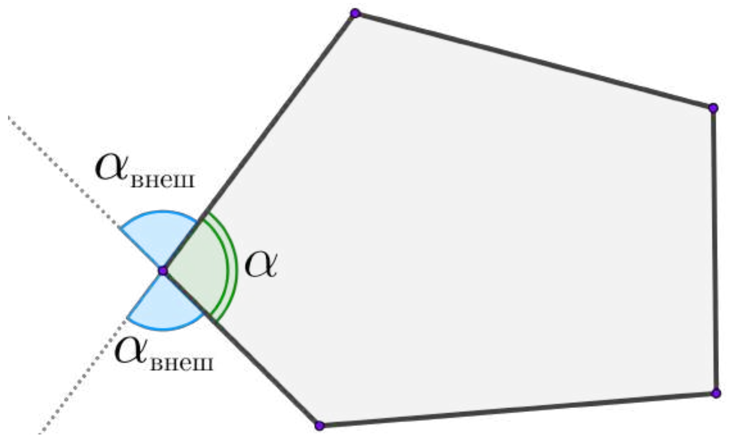
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Важные формулы:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \\[2em] \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}}$$

	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**не сущ.**
ctg	**не сущ.**	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Внешний угол многоугольника – угол, смежный с внутренним углом многоугольника.



$$\sin \alpha_{\text{внеш}} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha_{\text{внеш}} = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{внеш}} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_{\text{внеш}} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Замечание: Синус и острого, и тупого угла – положительное число. Косинус, тангенс и котангенс острого угла – положительные числа, а тупого угла – отрицательные числа.
(острый угол: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, тупой угол: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

Пример:

1) Если $\sin 30^\circ = 0,5$, и мы знаем, что $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$, то $\sin 150^\circ = -0,5$;

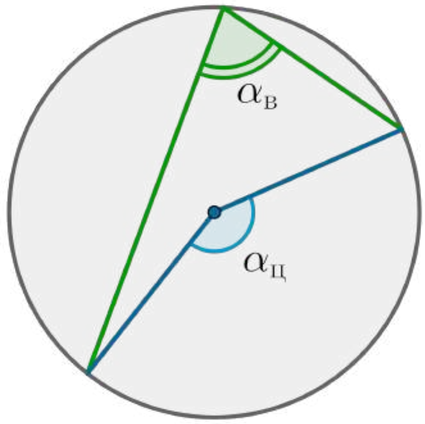
2) Так как $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$, то $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

Часть 6. Теоремы об углах в окружности.

— Центральный угол – это угол, вершина которого совпадает с центром окружности. Он равен дуге, на которую опирается.

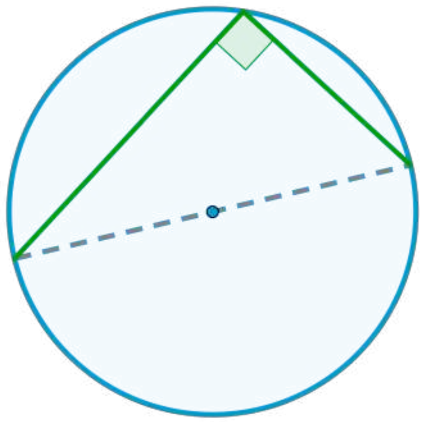
— Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны ее пересекают. Он равен половине дуги, на которую опирается.

— Центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу:



$$\alpha_ц = 2\alpha_в$$

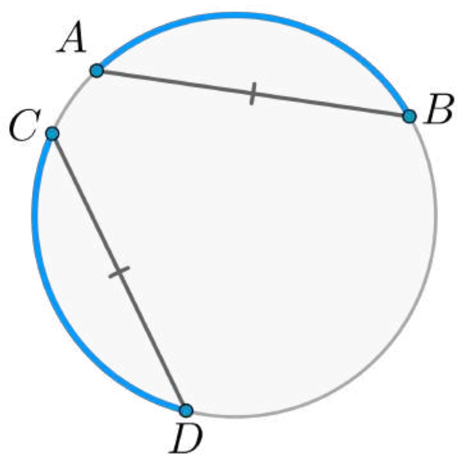
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

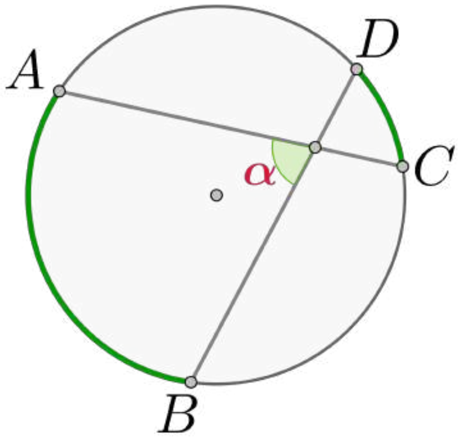


— Равные дуги окружности стягивают равные хорды.

— Равные хорды окружности стягивают равные дуги.

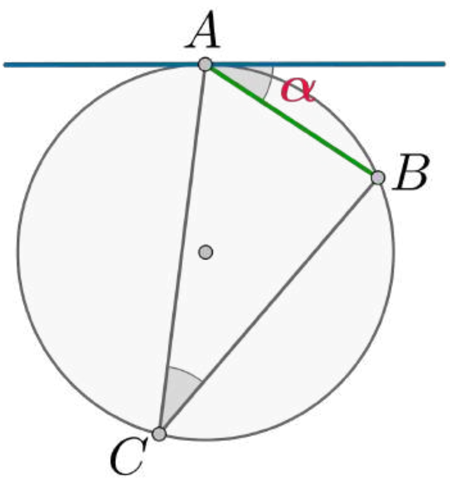
$$\breve{AB} = \breve{CD} \quad \Leftrightarrow \quad AB = CD$$





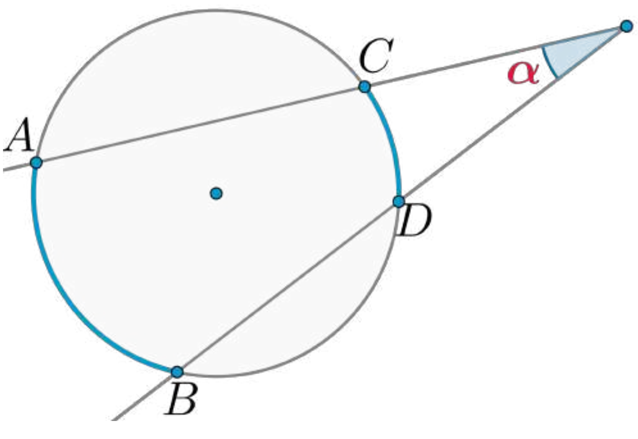
Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$



Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, заключенной между ними (или равен вписанному углу, опирающемуся на эту дугу):

$$\alpha = \frac{1}{2}\breve{AB} = \angle ACB$$

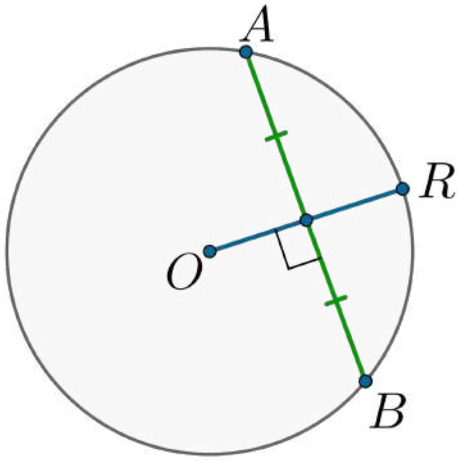


Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$

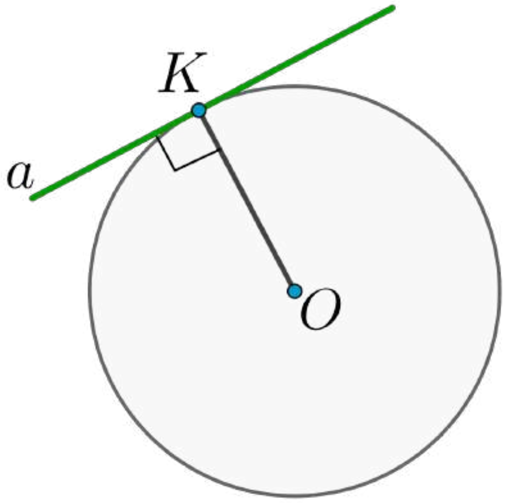
— Если радиус перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам.
— Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

$$OR \perp AB \quad \Leftrightarrow \quad OR \text{ делит } AB \text{ пополам}$$



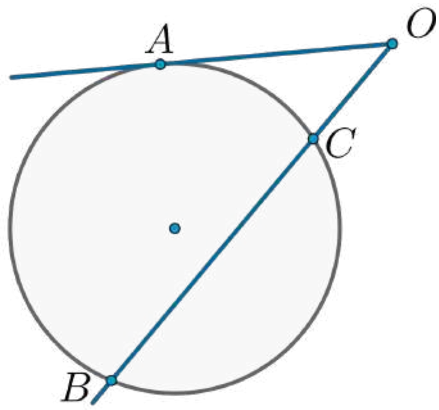
— Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
— Если прямая проходит через конец радиуса и перпендикулярна ему, то она является касательной к окружности.

$$OK \perp a$$



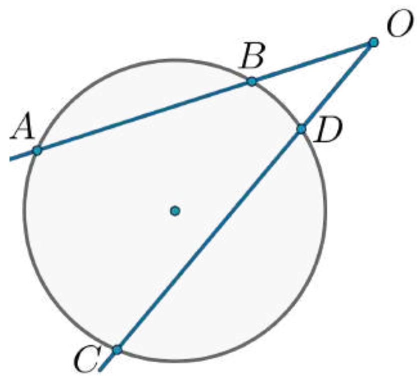
Часть 7. Теоремы об отрезках в окружности.

Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:



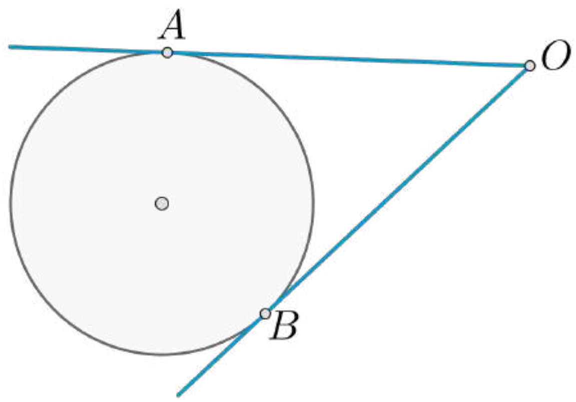
$$OA^2 = OB \cdot OC$$

Для данной окружности произведение секущей на ее внешнюю часть – величина постоянная:

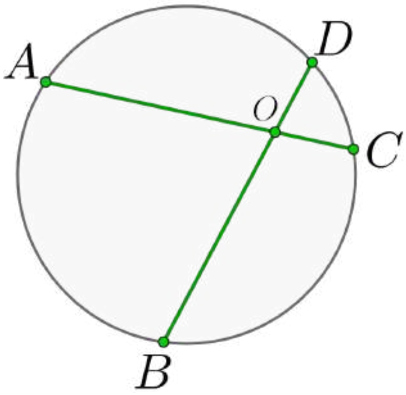


$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны:



$$OA = OB$$

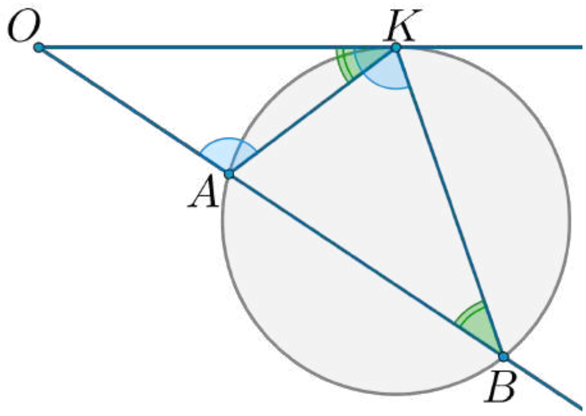


Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

Часть 8. Подобные треугольники в окружности.

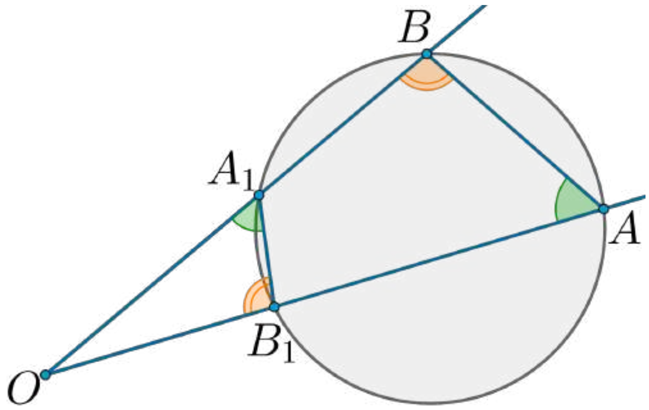
Если OK – касательная, где K – точка касания с окружностью, OB – секущая, A и B – точки пересечения с окружностью, то



$$\triangle OAK \sim \triangle OBK$$

(следствие: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть)

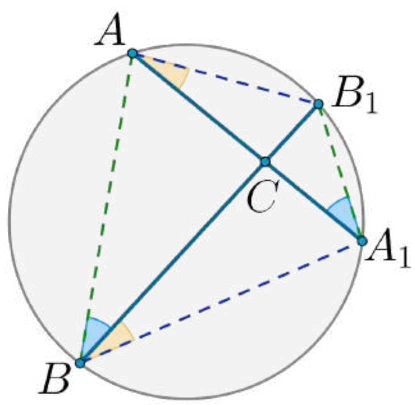
Если OA и OB – секущие, пересекающие повторно окружность в точках B_1 и A_1 соответственно, то



$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$$

(следствие: для данной окружности произведение секущей на ее внешнюю часть – величина постоянная)

При пересечении хорд в окружности образуются две пары подобных треугольников:

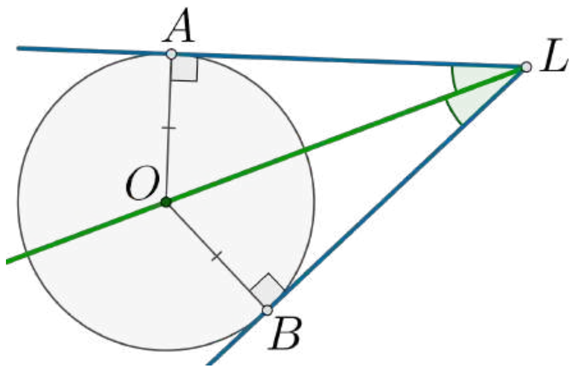


$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$$
$$\triangle AB_1C \sim \triangle A_1BC$$

(следствие: произведения отрезков хорд равны)

Часть 9. Вписанная окружность.

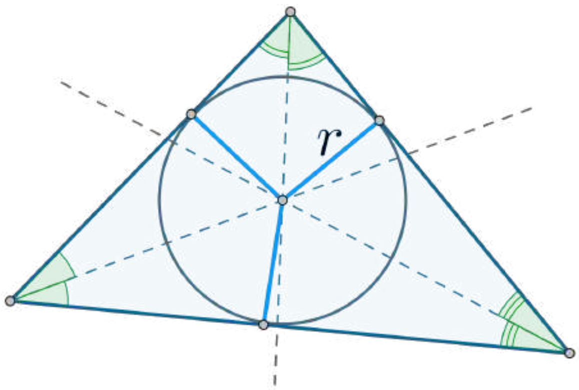
Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла. Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.



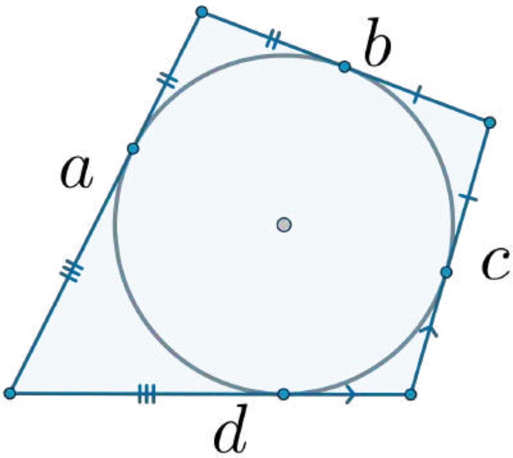
$$LO - \text{ биссектриса}$$

$$OA = OB$$

Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.
Заметим, что в общем случае точка касания окружности со стороной треугольника не совпадает с точкой пересечения биссектрисы со стороной треугольника.



— Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.
— Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

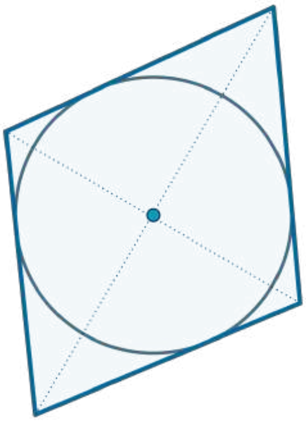


$$a + c = b + d$$

— Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника.

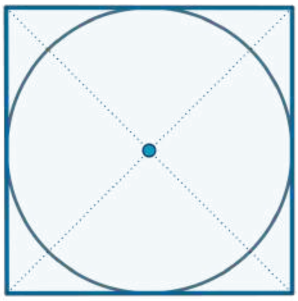
— Центр вписанной в многоугольник окружности лежит на пересечении биссектрис углов.

1 :



— Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом. Центр окружности лежит на пересечении диагоналей (рис 1).

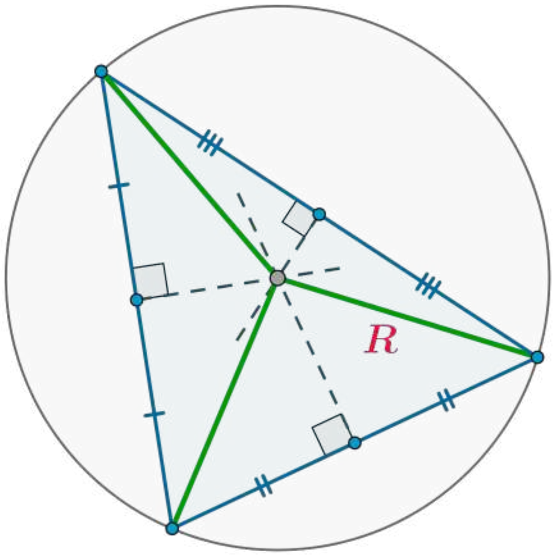
2 :



— Если в прямоугольник можно вписать окружность, то он является квадратом. Центр окружности лежит на пересечении диагоналей (рис 2).

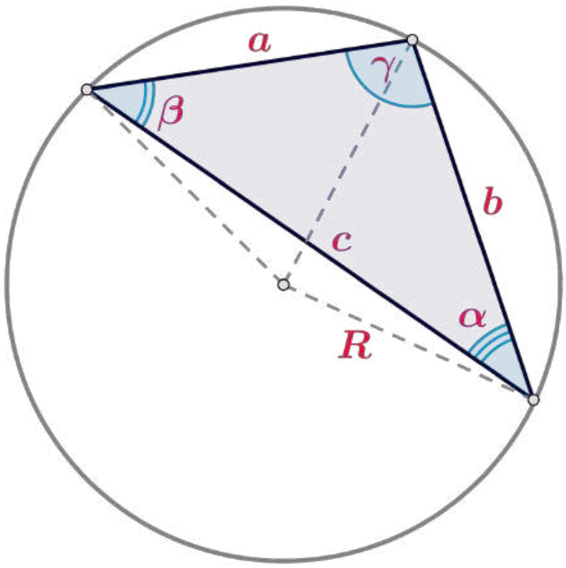
Часть 10. Описанная окружность.

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
Заметим, что в общем случае серединный перпендикуляр к стороне треугольника не проходит через противоположную вершину треугольника.

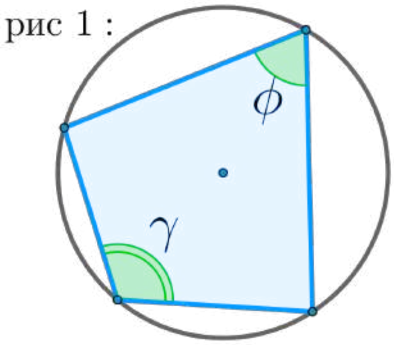


Теорема синусов.

Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла — величина постоянная для каждого треугольника и равна двум радиусам описанной около треугольника окружности:

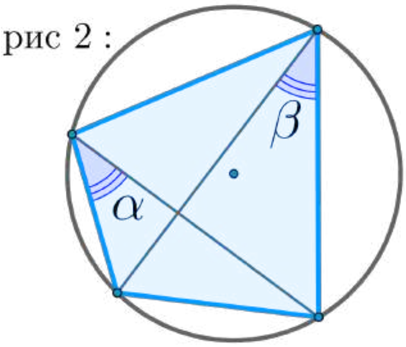


$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



• Если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° (рис 1):

$$\gamma + \phi = 180^\circ$$



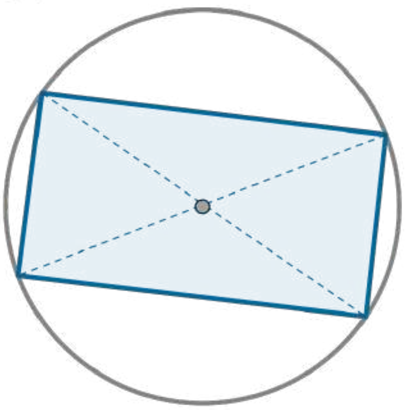
• Около четырехугольника можно описать окружность, если выполнено одно из двух утверждений:
– сумма противоположных углов γ и ϕ равна 180° (рис 1);
– угол α равен углу β (рис 2).

• Центр описанной окружности лежит на серединных перпендикулярах к сторонам четырехугольника.

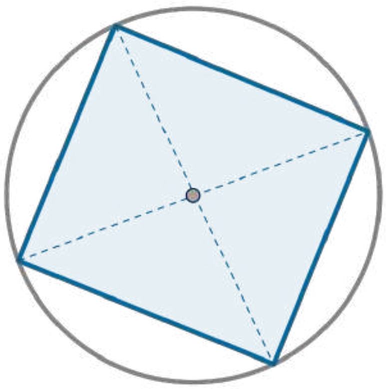
Центр описанной около выпуклого многоугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам.

1) Если около параллелограмма можно описать окружность, то он является прямоугольником.
Центр окружности лежит на пересечении диагоналей.
2) Если около ромба можно описать окружность, то он является квадратом.
Центр окружности лежит на пересечении диагоналей.
3) Если около трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной.

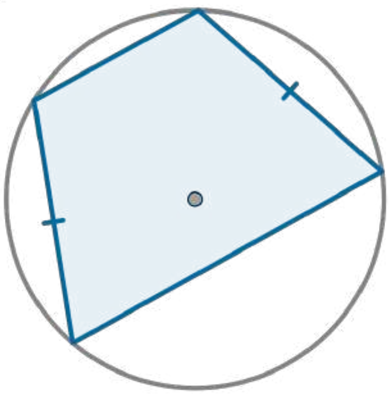
1 :



2 :

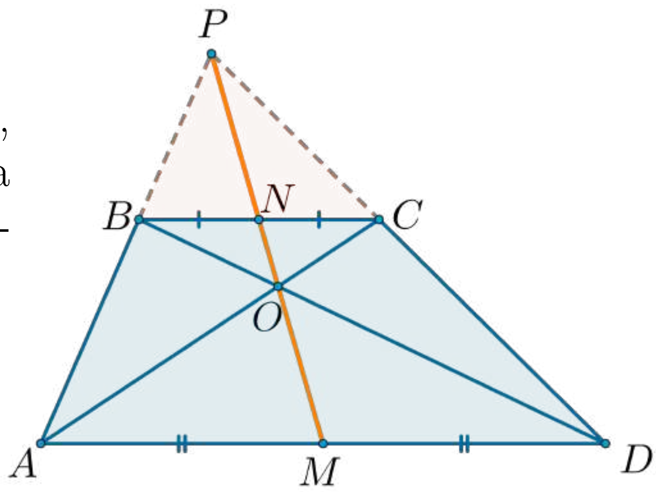


3 :



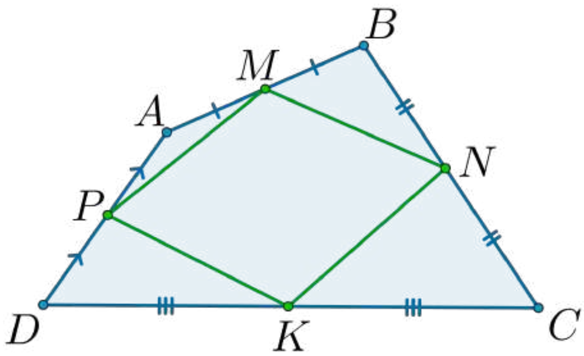
Часть 11. Крутые теоремы.

Середины M и N оснований трапеции, точка O пересечения диагоналей и точка P пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.



Теорема Вариньона.

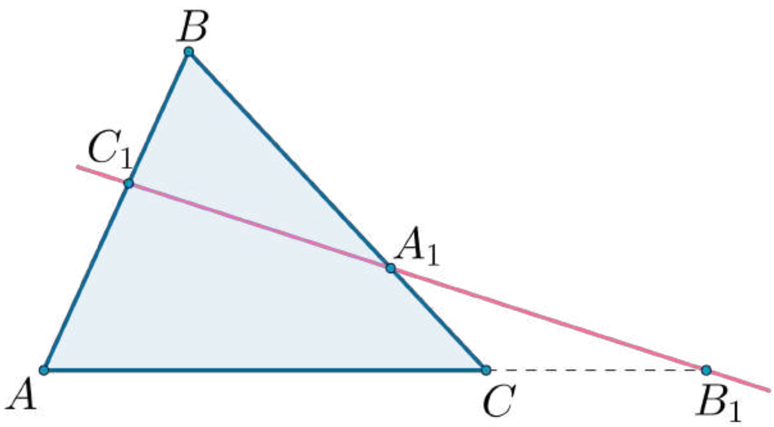
Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
$PMNK$ – параллелограмм.



Теорема Менелая.

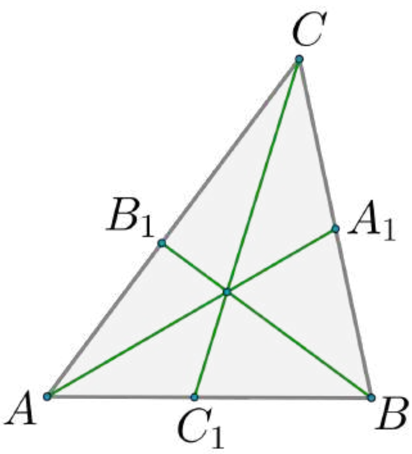
Если прямая пересекает стороны AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а также продолжение стороны AC в точке B_1, то выполнено следующее соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Как запомнить равенство? Если ввести терминологию: вершины A, B, C треугольника называть вершинами, точки A_1, B_1, C_1 – точками, то для каждой дроби работает правило "вершина-точка-точка-вершина". Проход по всем вершинам и точкам осуществляется в одном направлении, в нашем случае – по часовой стрелке.

Теорема Чевы.

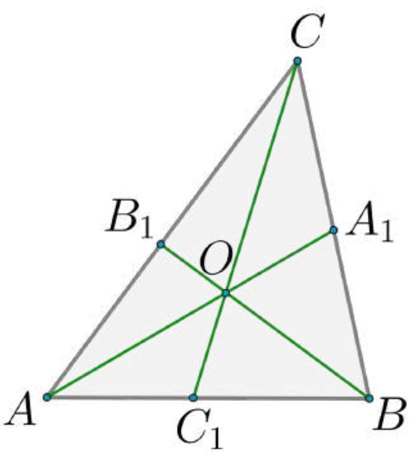


Если AA_1, BB_1 и CC_1 – чевианы, пересекающиеся в одной точке, то для них выполнено следующее соотношение:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

Чевиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

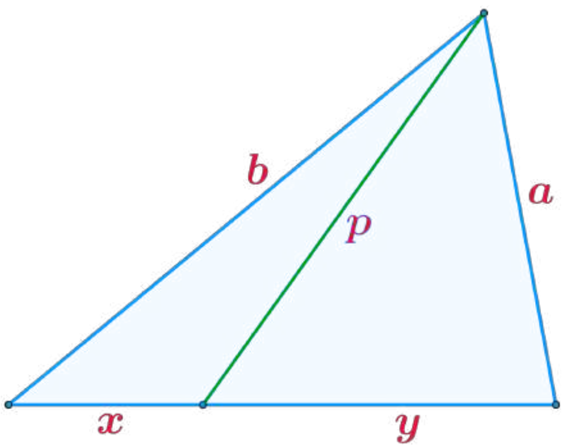
Метод запоминания данного соотношения такой же, как и для теоремы Менелая.



Теорема Ван-Обеля.

Если AA_1, BB_1 и CC_1 – чевианы, пересекающиеся в одной точке, то для них выполнено следующее соотношение:

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$



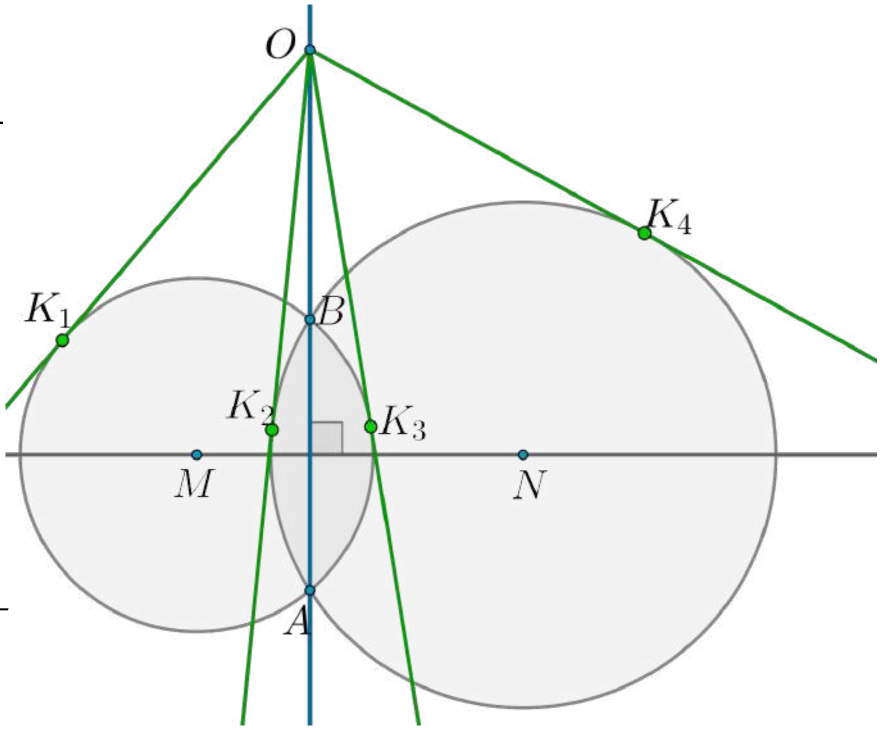
Теорема Стюарта.

$$p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$$

Свойство радикальной оси.

MN — линия центров окружностей.
AB — радикальная ось (прямая, проходящая через точки пересечения окружностей).
$OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4$ — отрезки касательных.

Радикальная ось перпендикулярна линии центров окружностей. Отрезки касательных, проведенных из любой точки радикальной оси к окружностям, равны.

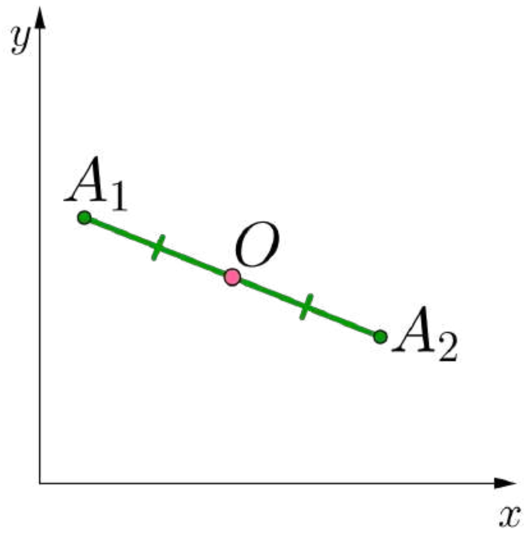


Часть 12. Векторы.

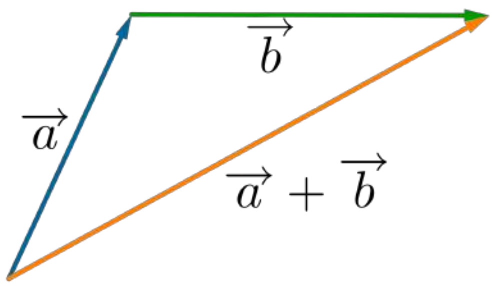
Если $A_1\,(x_1; y_1)$ и $A_2\,(x_2; y_2)$,
O — середина отрезка A_1A_2,
то верны следующие формулы:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

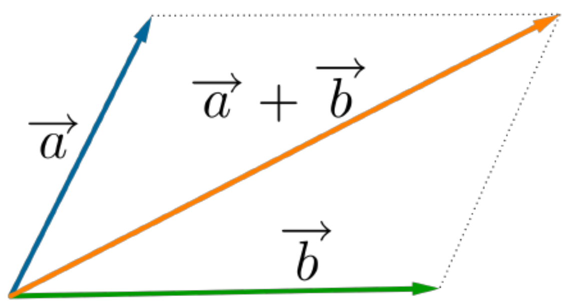
$$O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

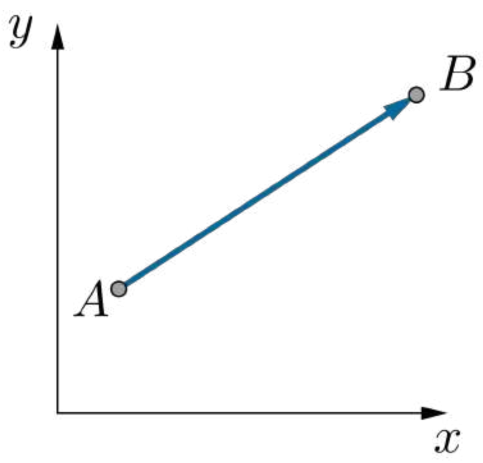


Правило треугольника суммы векторов: отложить вектор $\overrightarrow{b}$ от конца вектора $\overrightarrow{a}$, тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ будет равен вектору, начало которого совпадает с началом вектора $\overrightarrow{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\overrightarrow{b}$.



Правило параллелограмма суммы векторов: отложить вектор $\overrightarrow{b}$ от начала вектора $\overrightarrow{a}$, построить на данных векторах параллелограмм. Тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ – вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с началом векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.





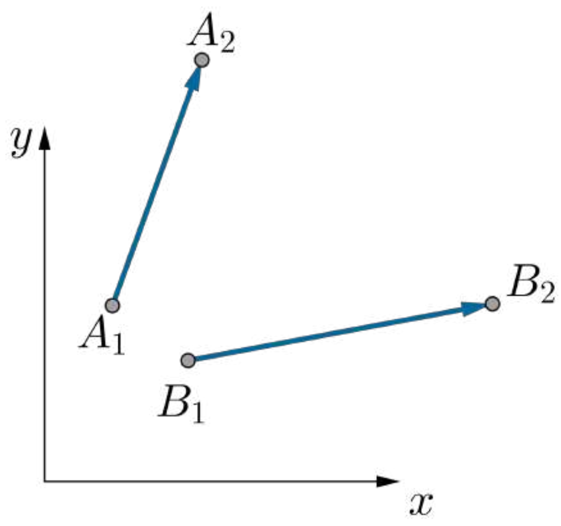
Пусть даны точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$.

Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Если $\overrightarrow{AB} = \{a, b\}$, то его длина вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Пусть даны два вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_1; y_1\}$ и $\overrightarrow{B_1B_2} = \{x_2; y_2\}$.

Тогда сумма этих векторов имеет координаты:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

Скалярное произведение этих векторов можно вычислить по одной из двух формул:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = |\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2})$$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,, \overrightarrow{B_1B_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$$

$(\cdot, \cdot)$ – *скалярное произведение.*
