Числовые ряды

Основные понятия

Опр. Бесконечная сумма чисел $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (или $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$),

где каждое число u_n можно вычислить, зная его номер n, называется **числовым рядом**.

При этом формула $u_n = f(n)$, позволяющая найти каждый член ряда, называется формулой **общего члена** ряда, а числа $u_1, u_2, \ldots$ - действительные и комплексные числа, называемые членами ряда.

Опр. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Опр. Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм.

Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частных сумм, т.е.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Опр. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Рассмотрим примеры

Пример. Ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ сходится, так как представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}, |q| < 1$, сумму которой можно найти по формуле $s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Пример. Рассмотрим ряд $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$. Представим общий член ряда в виде: $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Тогда частичная сумма s_n будет выглядеть так:

$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$.

Следовательно, ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример. Ряд 1+1+1+…+1+… расходится, так как $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Пример. Ряд 1-1+1-1+…+$(-1)^{n+1}$+… тоже расходится, так как последовательность его частичных сумм имеет вид: $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$ и т.д., а такая последовательность предела не имеет.

Свойства сходящихся рядов

1^0. Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

Док-во: Исключим из ряда $\sum u_n$ произвольные k членов и выберем значение n, при котором все отброшенные члены содержатся в частичной сумме s_n. Тогда $s_n = c_k + S_{n-k}$, где c_k – сумма отброшенных членов ряда, а S_{n-k} – сумма членов, входящих в s_n, но не входящих в c_k. Тогда $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} c_k + \lim_{n\to\infty} S_{n-k} = c_k + \lim_{n\to\infty} S_{n-k}$, так как c_k – постоянная величина, не зависящая от n. Следовательно, конечные пределы $\lim_{n\to\infty} s_n$ и $\lim_{n\to\infty} S_{n-k}$ существуют или не существуют одновременно, ч.т.д.

2^0. Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

<u>Теорема.</u> *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

Док-во: Обозначим частичную сумму второго ряда c_n. Тогда $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs$, ч.т.д.

3^0. Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

<u>Опр</u>. Суммой или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum(u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

<u>Теорема.</u> Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны S и σ, то ряд $\sum(u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ.

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Док-во: Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum(u_n \pm v_n)$, а s_n и σ_n – частичные суммы из того же числа слагаемых рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

Тогда $S_n = s_n + \sigma_n$, поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + \sigma_n) = s + \sigma$. Следовательно, ряд $\sum(u_n \pm v_n)$ сходится, и его сумма равна $S + \sigma$. Аналогичным образом доказывается сходимость ряда $\sum(u_n - v_n)$.

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Необходимое условие сходимости ряда

<u>Критерий Коши.</u>

(необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при n > N и любом p > 0, где p – целое число, выполнялось бы неравенство: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

__Док-во.__ (необходимость) Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при n>N. При n>N и любом целом p>0 выполняется также неравенство $|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому как правило используются более простые признаки сходимости:

__Теорема__ (необх.признак сх). Если ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Док-во. Представим u_n как разность частичных сумм $s_n - s_{n-1}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Тогда $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{3n-1} + ...$

Найдем $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \ne 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

__Теорема.__ Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & при \quad четных \quad n \\ 1, & при \quad нечетных \quad n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Остаток ряда

__Опр__. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется ***n*-м остатком** данного ряда.

Обозначим сумму остатка ряда (при условии, что он сходится) через $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$. Тогда из теоремы следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится и любой его остаток, и наоборот – из сходимости какого-либо остатка ряда следует сходимость ряда в целом.
Докажем еще одно свойство остатка сходящегося ряда:

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Док-во. Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, тогда $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = s - s = 0$, ч.т.д.

Ряды с неотрицательными членами

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с знакоположительными членами, т.е. рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Пусть для всех членов ряда $\sum u_n$ выполнено условие $u_n \geq 0$.

Теорема. Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

Док-во.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, но $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n$, то есть последовательность частичных сумм является возрастающей. Следовательно, $s_n < s \quad \forall n$, то есть $\{s_n\}$ ограничена сверху числом s.
2) Пусть $\{s_n\}$ ограничена сверху. Обозначим через s верхнюю грань $\{s_n\}$. Тогда, так как $\{s_n\}$ возрастает, $\forall \varepsilon \quad \exists N : |s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n > N$, то есть число s является пределом $\{s_n\}$, следовательно, ряд сходится.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема (признак сравнения). Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Док-во. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема (предельный признак сравнения). *Если $u_n > 0,\ \ v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Док-во. Выберем число N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} < h+1$. Тогда $u_n < (h+1)v_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то по теореме суммы ряда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (h+1)v_n$, следовательно, по признаку сходимости сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Наоборот, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует при этом расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Теперь выберем число $\underline{h}$ такое, что $0<\underline{h} < h$, и зададим номер N, при котором $\frac{u_n}{v_n} > \underline{h}$ при любом $n > N$. Отсюда $u_n > \underline{h}v_n$, и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Теорема доказана полностью.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$.

Т.к. $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$. Данный ряд расходится, т.к. гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится.

Признак Даламбера

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Теорема. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Док-во.

а) Пусть $\rho < 1$. Выберем число q так, что $\rho < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$, следовательно, $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство для $n = N + 1$, $n = N + 2$ и т.д., получим:

$$u_{N+1} < qu_N$$
$$u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{N+k} < q^k u_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k u_N = u_N \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится (как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1), поэтому сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$, а следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

б) Пусть теперь $\rho > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N, $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, следовательно, $u_n > u_{n-1}$. С учетом знакоположительности ряда из этого следует, что $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то есть ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости).

Замечания.

1. При $\rho = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (ряд в этом случае может и сходиться, и расходиться).

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида n! или a^n.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. $u_n = \frac{n}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$-ряд сх.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

Решение. $u_n = \frac{1}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ - ряд сходится.

Пример. Применим признак Даламбера к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится (учитываем, что $(n + 1)! = n!(n + 1)$).

Признак Коши (радикальный признак)

Теорема. Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число l<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \le l$, то ряд $\sum u_n$ сходится,

если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Док-во.
а) Пусть $l < 1$. Выберем число q такое, что $l < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то по 1-му признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$, тогда по теореме 1.1 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.
б) Пусть теперь $l > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, то есть $u_n > 1$. Следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечания.
1. Так же, как в признаке Даламбера, $l = 1$ не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.
2. Если для одного и того же ряда существуют пределы по Даламберу и по Коши, то они равны друг другу.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \dfrac{2}{3} < 1$.- ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

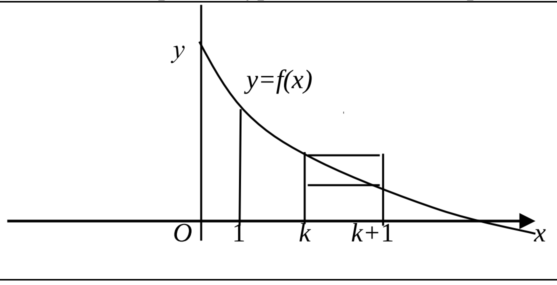
Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, т.о., необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши

Теорема. Если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Док-во. Выберем натуральное число k и рассмотрим значения x на отрезке $k \leq x \leq k+1$.



Тогда в силу убывания функции f $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрировав это неравенство по отрезку единичной длины $[k, k+1]$, получим:

$f(k)\int\limits_{k}^{k+1} dx \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)\int\limits_{k}^{k+1} dx,$ откуда

$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(k)dx \geq f(k+1)\cdot$

Складывая подобные неравенства, полученные при значениях k от 1 до n, приходим к неравенству: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, откуда $s_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leq s_n$, где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$

сходится и сумма его равна s, то $s_n \le s$, следовательно, $\int_1^{n+1} f(x)dx \le s$, поэтому $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если же, наоборот, предположить, что сходится $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то

$$s_{n+1} \le f(1) + \int_1^{n+1} f(x)dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx \cdot$$

Значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена сверху и возрастает, следовательно, сходится.

Пример. Применим интегральный признак Коши к исследованию сходимости рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, сравнивая их с интегралами $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. Рассмотрим следующие возможные значения α:

а) α > 1. Тогда $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$ (так как при α > 1 $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$). Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит, сходится и рассматриваемый ряд.

б) α = 1. При этом $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln x \Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$ - интеграл расходится, поэтому расходится и ряд.

в) α < 1. Тогда $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}\right) = \infty$ (так как при α < 1 $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = \infty$). Из расходимости несобственного интеграла следует расходимость исследуемого ряда.

Замечание. Итак, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *сходится при α > 1 и расходится при α ≤ 1.* Это свойство ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ будет часто использоваться в дальнейшем.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы. Находим $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d\ln x = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln x) \Bigg|_2^b \right) = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln b) - \ln\ln 2\right) = \infty$.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h \ne 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Знакочередующиеся ряды

Опр. Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \text{, где } u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

(т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Признак Лейбница

Теорема. Если исследуемый ряд:

1) знакочередующийся, то есть имеет вид $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, где $u_i > 0$ (*);
2) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$ (последующий член ряда по модулю меньше предыдущего);
3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд сходится (хотя бы условно), его сумм $0 < s \le u_1$.

Док-во. Рассмотрим первых $2m$ членов ряда: $s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0$, так как $u_{2i-1} - u_{2i} > 0$. Итак, последовательность $\{s_{2m}\}$ положительна и возрастает с возрастанием m. С другой стороны, s_{2m} можно записать в ином виде: $s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1$.

Следовательно, последовательность $\{s_{2m}\}$ ограничена сверху и поэтому имеет предел: $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = s$.

Докажем, что тот же предел имеет и последовательность частичных сумм, составленных их нечетного числа слагаемых: $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} (s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = s + 0 = s.$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ при любом n, то есть ряд (*) сходится.

Замечания.

1. Исследование знакочередующегося ряда $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots$ сводится путем умножения на (-1) к исследованию ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$.
2. Соотношение $0 < s \le u_1$ позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму S данного ряда его частичной суммы S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет с собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т.е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать: $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \ldots =$ S. Взяв пять членов, т. е. заменив S на $S_5 = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^4} + \dfrac{1}{5^5} \approx 0{,}7834$, сделаем ошибку, меньшую, $\dfrac{1}{6^6} = \dfrac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$.

Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Опр. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным.***

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1).

Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1), т.е.

$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (2), то сходится и сам знакопеременный ряд (1).

Док-во. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

По свойству абсолютных величин: $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится (гармонический ряд).

Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Опр. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum|u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Опр. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum|u_n|$ расходится.

Пример. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Решение. $|u_n|=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ (так как $\ln n<n$), поэтому по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$ расходится, то есть абсолютной сходимостью рассматриваемый ряд не обладает.

Проверим для него выполнение условий теоремы. Знакочередование обеспечивается множителем $(-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$, а из монотонного возрастания функции $y=\ln x$ следует, что $\ln(n+1)>\ln n$, а $\frac{1}{\ln(n+1)}<\frac{1}{\ln n}$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится условно.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов (без доказательства)

Теорема (Дирихле). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ абсолютно сходится, то любой ряд, составленный из членов данного ряда, взятых, возможно, в другом порядке, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Теорема. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S_1+S_2 (или S_1-S_2).

Теорема. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_n v_n$ членов этих рядов, тоже абсолютно сходится, и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

Замечание. Указанные свойства справедливы только для абсолютно сходящихся рядов. Если ряд сходится условно, то перестановкой его членов можно изменять сумму ряда (теорема Римана) или получить расходящийся ряд. В частности, расходящимися в этом случае будут ряды, составленные из всех положительных и из всех отрицательных членов данного условно сходящегося ряда.