Билет 19.

Что такое конечная разность. Как она находится?

Определение. Нам даны некоторые узлы $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ из отрезка $[a,b]$, функция $f(x)$ определена на $[a,b]$, и в этих узлах нам известны её табличные значения
$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$. Кроме того, $x_{i+1} - x_i = h > 0$ (промежутки равные). Разности $f_1 - f_0, f_2 - f_1, \dots, f_n - f_{n-1}$ назовем конечными разностями 1-го порядка и будем обозначать

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Конечные разности 2-го порядка определяем через конечные разности 1-го порядка:

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

и т.д.
Конечные разности n-го порядка определим формулой:

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i, \quad i = 0$$

Конечные разности удобно оформлять в виде таблицы:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	
x_4	f_4	Δf_3			

Отметим, что если при вычислении конечных разностей допущена ошибка, то она быстро распространяется по таблице. Поэтому важно контролировать правильность вычислений: *сумма конечных разностей в столбце таблицы равна разности крайних значений (верхнего и нижнего) предыдущего столбца*

Свойство 1. Конечные разности выражаются непосредственно через значения функции по формуле:

$$\Delta^k f_0 = f_k - k f_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} f_{k-2} + \dots + (-1)^k f_0$$

Свойство 2. Константу можно выносить за знак конечной разности.

$$\alpha \in \mathbb{R}; \qquad \Delta^k (\alpha f)_i = \alpha \Delta^k f_i$$

Свойство 3. Конечная разность от суммы (разности) функций равна сумме (разности) конечных разностей слагаемых.

$$\Delta^k (f \pm g)_i = \Delta^k f_i \pm \Delta^k g_i$$

Свойство 4. Конечные и разделенные разности n-го порядка для случая равноотстоящих узлов связаны между собой формулой:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{k! h^n}$$

Доказать можно по методу мат. индукции.

Свойство 5. (следствие из свойства 4) Конечная разность n-го порядка от многочлена n-й степени постоянна, а более высокого порядка равна нулю.

Билет 20.

Определение системы Чебышева.

Определение. Система функций $\{\varphi(x)\}, k = 0, \ldots, n$ называется системой Чебышева на $[a,b]$, если при любом расположении узлов $x_k \in [a,b], x_l \neq x_j$, при $k \neq j$ справедливо неравенство $det(A) \neq 0$. Здесь A – матрица размерности $(n+1)\times(n+1)$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_k) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Алгебраический многочлен по системе функций $\varphi_i(X) = x^i, i = 0, \ldots, n$ можно записать в виде:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

Пример другой системы Чебышева на $[a,b]$:

1)$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ на отрезке периодичности $[0,2\pi]$

Пример системы, не являющийся системой Чебышева:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Билет 21.

Оценить погрешность формулы численного дифференцирования.

$$f_{\bar{x}x,i} \equiv \frac{1}{h}\left(f_{x,i} - f_{\bar{x},i}\right) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

Спросить у Гуриной

Билет 22.

Формула Гаусса для вычисления интегралов. Почему она имеет наивысшую алгебраическую степень точности.

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{2}\sum_{i=1}^{N} A_i f\left(x_i\right), \qquad (1)$$

где $x_i = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}t_i$, $i = 1,2,\ldots,N$, t_i – нули полинома Лежандра $P_N(x) = \frac{1}{2^N N!}\frac{d^N\left[\left(x^2-1\right)^N\right]}{dx^N}$
Остаточный член формулы Гаусса с N узлами имеет вид:

$$R_N(f) = \frac{(d-c)^{2N+1}(N!)^4 f^{(2N)}(\xi)}{[(2N)!]^3(2N+1)}, c < \xi < d$$

Определение. Алгебраической степенью точностью квадратурной формулы называется максимальная степень многочленов, на которых она точна.

Пример. Широко известный метод Гаусса по пяти точкам имеет порядок точности 9. $(2 * 5 \text{ точек} - 1) = 9$

В общем случае, используя n точек, по формуле (1) можно получить метод с порядком точности $2n-1$, т. е. получаются точные значения для полиномов степени не выше $2n-1$.

Почему она имеет наивысшую степень точности? ~~Потому что у всех остальных методов степень меньше, а $2n-1$ максимально вохможная~~. Спросить у Гуриной.

Билет 23.

Полиномом какой степени, является интерполяционный полином Лагранжа на $N+1$ узле?

Полином степени N.
Пример. Имеем таблицу из трех узлов:

$$f(100) = 10;\ f(121) = 11;\ f(144) = 12$$

Применяем формулу (указана после примера) и получаем многочлен Лагранжа, он является полиномом второй степени:

$$0{,}0000941x^2 + 0.0684172x + 4{,}0993700$$

Формула:

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} + \\ + f(x_2)\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}$$

Билет 24.

Является ли интерполяционным полином метода наименьших квадратов? Если да, то при каких условиях?

Этот билет совпадает с билетом №7. Спросить у Гуриной.