Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской
технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

по теме 4.1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Санкт-Петербург
2006

Задача 1

Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции

$$z = \left(\cos\sqrt{xy}\right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\ln^5\left(1 - x^3 y^3\right)}.$$

Справочный материал

Частные производные для функции двух переменных $z = f(x, y)$ определяются как пределы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что при вычислении частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x, следует рассматривать ее как функцию одной переменной x, а переменную y считать постоянной. При вычислении частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной y, следует рассматривать ее как функцию одной переменной y, а переменную x считать постоянной.

При вычислении производных функций нескольких переменных следует пользоваться правилами дифференцирования, сформулированными для функций одной переменной, а также таблицей производных основных элементарных функций (см. приложение).

Решение задачи

Представим заданную функцию в виде

$$z = f_1(x, y) + f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y) = \left(\cos\sqrt{xy}\right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{y}{x}}$ и $f_2(x, y) = \sqrt[3]{\ln^5\left(1 - x^3 y^3\right)}$, а затем вычислим производные каждого слагаемого.

Функцию $f_1(x, y)$ по основному логарифмическому тождеству представим в виде экспоненты:

$$f_1(x,\,y)=\left(\cos\sqrt{xy}\right)^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}}=e^{\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}}}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции производная от функции $f_1(x,\,y)$ по переменной x равна производной от экспоненты по ее аргументу, умноженной на производную по x от показателя, т.е.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\left(\left(\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\right)_x'\cdot\ln\cos\sqrt{xy}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\left(\ln\cos\sqrt{xy}\right)_x'\right).$$

Поскольку $\left(\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\right)_x'=2\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}$,

$$\left(\ln\cos\sqrt{xy}\right)_x'=\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\cdot\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\text{, то}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\cdot\left(2\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}\cdot\ln\cos\sqrt{xy}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\cdot\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Функцию $f_2(x,\,y)$ запишем в виде степенной функции с дробным показателем:

$$f_2(x,\,y)=\sqrt[3]{\ln^5\left(1-x^3y^3\right)}=\ln^{\frac{5}{3}}\left(1-x^3y^3\right).$$

Продифференцируем ее по x, используя правило дифференцирования сложной функции, считая y постоянной.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{5}{3}\ln^{\frac{2}{3}}\left(1-x^3y^3\right)\cdot\frac{1}{1-x^3y^3}\cdot\left(-3x^2y^3\right).$$

Складывая $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\cdot\left(2\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}\cdot\ln\cos\sqrt{xy}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\cdot\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+$$

$$+\frac{5}{3}\ln^{\frac{2}{3}}\left(1-x^3y^3\right)\cdot\frac{1}{1-x^3y^3}\cdot\left(-3x^2y^3\right).$$

Для частной производной $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ используется формула, аналогичная формуле для производной $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\left(\left(\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\right)_y'\cdot\ln\cos\sqrt{xy}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\left(\ln\cos\sqrt{xy}\right)_y'\right),$$

в которой следует вычислить производные по переменной y:

$$\left(\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\right)_y'=2\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\ \text{ и}$$

$$\left(\ln\cos\sqrt{xy}\right)_x'=\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=e^{\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\cdot\left(2\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln\cos\sqrt{xy}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\cdot\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\right).$$

Функция $f_2(x, y) = \sqrt[3]{\ln^5\left(1 - x^3 y^3\right)}$ симметрична относительно своих переменных. Поэтому производную $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ можно получить из производной $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, заменив в ней x на y, а y на x.

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{5}{3}\ln^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^3 y^3\right)\cdot \frac{1}{1 - x^3 y^3}\cdot\left(-3x^3 y^2\right).$$

Складывая $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\mathrm{tg}^2 \frac{y}{x} \ln\left(\cos\sqrt{xy}\right)}\cdot\left(2\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}\cdot\ln\cos\sqrt{xy} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{tg}^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt{xy}}\cdot\left(-\sin\sqrt{xy}\right)\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) +$$

$$+ \frac{5}{3}\ln^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^3 y^3\right)\cdot\frac{1}{1 - x^3 y^3}\cdot\left(-3x^3 y^2\right).$$

Задача 2

Оцените абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = \sqrt{x^3 + y}$ в точке (x, y), если $x = 1 \pm 0{,}03$, $y = 3 \pm 0{,}07$.

Справочный материал

Модуль абсолютной погрешности $|\Delta|$ при вычислении значения функции $z_0 = f(x_0, y_0)$, если значения аргументов x_0 и y_0 вычислены с погрешностями Δx и Δy, не превосходит модуля значения дифференциала dz, вычисленного в точке (x_0, y_0) при приращениях Δx и Δy, т.е. оценивается неравенством

$$|\Delta| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \cdot |\Delta y| .$$

Относительная погрешность ε равна отношению модуля абсолютной погрешности к истинному значению функции z_0, т.е.

$$\varepsilon = \frac{|\Delta|}{|z_0|} \text{ или в процентах } \varepsilon = \frac{|\Delta|}{|z_0|} 100\% .$$

Решение задачи

Поскольку $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $|\Delta x| = 0{,}03$, $|\Delta y| = 0{,}07$, то, вычислив

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1;\, 3) = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1;\, 3) = \frac{1}{4},$$

получим оценку для абсолютной погрешности.

$$|\Delta| \le \frac{3}{4} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}07 = 0{,}04 .$$

Поскольку $z_0 = f(x_0, y_0) = \sqrt{1^3 + 3} = 2$, то относительная погрешность $\varepsilon = \dfrac{|\Delta|}{|z_0|} \le \dfrac{0{,}04}{2} 100\% = 2\%$.

Задача 3

Написать формулы для производных $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{z} + \sqrt{x^2 + y^2}\cos z$, если $x = x(s),\ y = y(t, s),\ z = z(t)$.

Справочный материал

Если задана функция трех переменных $u = u(x, y, z)$, а переменные x, y и z являются функциями независимых переменных t и s, т.е. $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $z = z(t, s)$, то функция u является сложной функцией независимых переменных t и s и ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Решение задачи

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z}+\cos z\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z}+\cos z\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x+y}{z^2}\right)-\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial s}=0\text{, то}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z}+\cos z\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+$$

$$+\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x+y}{z^2}\right)-\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin z\right)\cdot\frac{dz}{dt}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z}+\cos z\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{dx}{ds}+$$

$$+\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z}+\cos z\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Задача 4

Найти все производные второго порядка для функции $u=x^3y^3z^4+z^2y^2x^4+\sin(x+y-2z)$.

Справочный материал

Для функции трех переменных $u=u(x,\,y,\,z)$ определены три частные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,y,\,z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,y,\,z)$ и $\frac{\partial u}{\partial z}(x,\,y,\,z)$, которые в свою очередь являются функциями переменных $x,\,y$ и z. Следовательно, каждую из них можно снова дифференцировать по этим переменным, т.е. вычислять следующие производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\ \text{и}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ \text{и}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\ \text{и}\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

Если функция $u=u(x,\,y,\,z)$ непрерывна, то смешанные производные (производные по разным переменным) равны, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Следовательно, существует шесть различных частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

Решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^3 z^4 + 4z^2 y^2 x^3 + \cos(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 y^2 z^4 + 2z^2 y x^4 + \cos(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^3 y^3 z^3 + 2zy^2 x^4 - 2\cos(x + y - 2z).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^3 z^4 + 12z^2 y^2 x^2 - \sin(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^3 y z^4 + 2z^2 x^4 - \sin(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 12x^3 y^3 z^2 + 2y^2 x^4 - 4\sin(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 9x^2 y^2 z^4 + 8z^2 y x^3 - \sin(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 12x^2 y^3 z^3 + 8zy^2 x^3 + 2\sin(x + y - 2z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 12x^3 y^2 z^3 + 4zyx^4 + 2\sin(x + y - 2z).$$

Задача 5

Вычислить d^3u для функции $u = \cos\left(x - y^2\right)$.

Справочный материал

Для дифференциала третьего порядка (третьего дифференциала) справедлива формула

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^3 =$$

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(dy)^3 .$$

Решение задачи

Вычислим производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin\left(x - y^2\right);\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin\left(x - y^2\right)(-2y) = 2y\sin\left(x - y^2\right).$$

Вычислим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos\left(x - y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sin\left(x - y^2\right) + 2y\cos\left(x - y^2\right)(-2y) =$$

$$= 2\sin\left(x - y^2\right) - 4y^2\cos\left(x - y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos\left(x - y^2\right)(-2y) = 2y\cos\left(x - y^2\right).$$

Вычислим производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \sin\left(x - y^2\right); \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\cos\left(x - y^2\right)(-2y) -$$

$$-8y\cos\left(x - y^2\right) - 4y^2\left(-\sin\left(x - y^2\right)\right)(-2y) =$$

$$= -12y\cos\left(x - y^2\right) - 8y^3\sin\left(x - y^2\right);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \sin\left(x - y^2\right)(-2y) = -2y\sin\left(x - y^2\right);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 2\cos\left(x - y^2\right) - 4y^2\left(-\sin\left(x - y^2\right)\right) =$$

$$= 2\cos\left(x - y^2\right) + 4y^2 \sin\left(x - y^2\right).$$

Третий дифференциал заданной функции имеет вид:

$$d^3 u = \sin\left(x - y^2\right)(dx)^3 - 6y\sin\left(x - y^2\right)(dx)^2 dy +$$

$$+ 6\left(\cos\left(x - y^2\right) + 2y^2 \sin\left(x - y^2\right)\right)dx(dy)^2 +$$

$$- 4\left(3y\cos\left(x - y^2\right) + 2y^3 \sin\left(x - y^2\right)\right)(dy)^3.$$

Задача 6

Вычислить y' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = x^2 e^{x^2 + y^2}$.

Справочный материал

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию $y(x)$, явный вид зависимости которой не известен, то производную y' определяют из формулы

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \text{ если } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Решение задачи

Поскольку уравнение $y = x^2 e^{x^2 + y^2}$ можно записать в виде $y - x^2 e^{x^2 + y^2} = 0$, то функция $F(x, y) = y - x^2 e^{x^2 + y^2}$. Тогда

$$y' = -\frac{-2xe^{x^2+y^2} - x^2 e^{x^2+y^2} \cdot 2x}{1 - 2x^2 y\, e^{x^2+y^2}} .$$

Упрощая полученное выражение, запишем

$$y' = \frac{2xe^{x^2+y^2}\left(1 + x^2\right)}{1 - 2x^2 y\, e^{x^2+y^2}} .$$

Задача 7

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z(x, y)$, заданной неявно $x \cdot \ln(y+z) = \sqrt{xz}$.

Справочный материал

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает в окрестности точки однозначную дифференцируемую функцию $z = z(x, y)$, то во всех точках, где выполняется условие $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, частные производные функции $z = z(x, y)$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} .$$

Решение задачи

Уравнение $x \cdot \ln(y+z) = \sqrt{xz}$ можно записать в виде $x \cdot \ln(y+z) - \sqrt{xz} = 0$. Тогда $F(x, y, z) = x \cdot \ln(y+z) - \sqrt{xz}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\ln(y+z) - \dfrac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{x}{y+z} - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{x}{y+z}}{\dfrac{x}{y+z} - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}} .$$

Задача 8

Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных параметрически системой $\begin{cases} ux + vy = x^2 \\ uy - vx = y^2 \end{cases}$.

Справочный материал

Для определения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ из заданной системы следует:

1. Последовательно продифференцировать оба уравнения системы по переменной x, а затем по переменной y.
2. Полученные линейные относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ системы решить по формулам Крамера (см. приложение).

Решение задачи

1. Продифференцируем оба уравнения системы по переменной x. Получим систему относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} x + u + y\frac{\partial v}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial x} y - \frac{\partial v}{\partial x} x - v = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - u \\ y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial v}{\partial x} = v \end{cases}.$$

2. Теперь продифференцируем оба уравнения системы по переменной y. Получим систему относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}x+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}y+u-\dfrac{\partial v}{\partial y}x=2y \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=-v \\ y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y-u \end{cases}.$$

3. Для решения полученных систем используем формулы Крамера. Определители этих систем равны и вычисляются по правилу

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix}=-x^2-y^2.$$

Вспомогательные определители первой системы равны

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2x-u & y \\ v & -x \end{vmatrix}=-2x^2+ux-yv,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} x & 2x-u \\ y & v \end{vmatrix}=xv-2xy+uy.$$

Теперь найдем решение первой системы, используя формулы Крамера

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2x^2+ux-vy}{-x^2-y^2}=\frac{2x^2-ux+vy}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy+vx+uy}{-x^2-y^2}=\frac{2xy-uy-vx}{x^2+y^2}.$$

Вспомогательные определители второй системы равны

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -v & y \\ 2y-u & -x \end{vmatrix}=vx-2y^2+uy,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} x & -v \\ y & 2y-u \end{vmatrix}=2xy-ux+vy.$$

Решение второй системы имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vx-2y^2+uy}{-x^2-y^2}=\frac{2y^2-vx-uy}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2xy-ux+vy}{-x^2-y^2}=\frac{ux-vy-2xy}{x^2+y^2}.$$

Полученные формулы для частных производных имеют смысл при $x^2+y^2\neq 0$. В точке $(0,0)$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ не дифференцируемы.

Задача 9.1

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$z=\frac{5}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ в точке } M_0(3,-4,1).$$

Задача 9.2

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$x^2-y^2+4z^2+2xy-yz-2=0 \text{ в точке } M_0(1,-1,-1).$$

Справочный материал

Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$, то уравнения касательной плоскости и нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ имеют вид:

$$z=z_0+\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

- уравнение касательной плоскости;

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

- канонические уравнения нормали.

В этих уравнениях $z_0=f(x_0,y_0)$ - значение функции $f(x,y)$ в точке касания.

Если поверхность задана неявно зависимостью $F(x,y,z)=0$, то уравнения касательной и нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z-z_0)=0,$$

- уравнение касательной;

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)}$$ - уравнения нормали.

Решение задачи 9.1

Поверхность задана явным уравнением $z=f(x,\, y)$. Частные производные имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(5\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{5}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x=\frac{-5x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(5\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{5}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}2y=\frac{-5y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

Значения частных производных в точке $(3,-4)$ равны

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3,-4)=\frac{-3\cdot 5}{\sqrt{(9+16)^3}}=-\frac{15}{125}=-\frac{3}{25};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(3,-4)=\frac{4\cdot 5}{\sqrt{(9+16)^3}}=\frac{20}{125}=\frac{4}{25}.$$

Уравнение касательной плоскости

$$z-1=-\frac{3}{25}(x-3)+\frac{4}{25}(y+4),\ 3x-4y+25z-50=0.$$

Уравнения нормали

$$\frac{x-3}{-\frac{3}{25}}=\frac{y+4}{\frac{4}{25}}=\frac{z-1}{-1},\ \frac{x-3}{-3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-1}{-25}.$$

Решение задачи 9.2

Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,\, y,\, z)=x^2-y^2+4z^2+2xy-yz-2$.

Частные производные имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-2y+2x-z\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}=8z-y\,.$$

Значения частных производных в точке $M_0(1,-1,-1)$ равны

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial x}=5\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}=-7\,.$$

Уравнение касательной плоскости

$$0(x-1)+5(y+1)-7(z+1)=0\,,\ 5y-7z-2=0\,.$$

Уравнения нормали

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-7}\,.$$

Задача 10

Исследовать на экстремум функцию $z=e^{x+2y}\left(x^2-y^2+2xy\right)$.

Справочный материал

Экстремум функции $z=f(x,y)$ следует искать только в стационарных точках, которые определяются из системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}.$$

Если $M_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка и функция $z=f(x,y)$ дважды дифференцируема, то в этой точке вычисляются вторые производные:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0).$$

Функция имеет экстремум, если определитель $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}>0$ и не имеет экстремума, если $\Delta<0$. При $\Delta>0$ экстремум является максимумом, если $A<0$ и минимумом, если $A>0$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Экстремум функции двух переменных может быть и в точках, где функция не является дифференцируемой.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $\Delta = 0$ экстремум может быть, а может и не быть. Этот случай требует дополнительных исследований.

Решение задачи 10

1. Вычислим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy\right) + e^{x+2y}(2x + 2y) =$$

$$= e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy\right) + e^{x+2y}(2x - 2y) =$$

$$= e^{x+2y}\left(2x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 2y\right).$$

2. Найдем стационарные точки из системы:

$$\begin{cases} e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y\right) = 0 \\ e^{x+2y}\left(2x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 2y\right) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы, умноженное на (-2), прибавим ко второму. Получим уравнение

$$-2x - 6y = 0,$$

из которого выразим $x = -3y$ и подставим в первое уравнение системы. Получим уравнение

$$9y^2 - y^2 - 6y^2 - 6y + 2y = 0,$$

из которого определим y.

$$2y^2 - 4y = 0,\ 2y(y-2) = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2.$$

Поскольку $x = -3y$, то стационарными точками являются точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(-6, 2)$.

3. Вычислим производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y\right) + e^{x+2y}(2x + 2y + 2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x+2y}\left(2x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 2y\right) + e^{x+2y}(4x - 4y - 2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{x+2y}\left(x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y\right) +$$

$$+ e^{x+2y}(2x - 2y + 2).$$

4. Определим значения производных второго порядка в стационарной точке $M_1(0, 0)$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = 2,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = -2,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 2.$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$. Следовательно, в точке $M_1(0, 0)$ нет экстремума.

5. Определим значения производных второго порядка в стационарной точке $M_2(-6, 2)$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-6, 2) = -6e^{-2},\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-6, 2) = -34e^{-2},$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-6, 2) = -14e^{-2}.$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -6e^{-2} & -14e^{-2} \\ -14e^{-2} & -34e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4}(204-196) > 0$.

Следовательно, в точке $M_2(-6, 2)$ есть экстремум, а поскольку $A<0$ и $C<0$, то экстремум – максимум.

Задача 11

Найти значения функции $z(x, y)$, заданной зависимостью $x^2 - 3y^2 + z^2 + xz - yz - 120 = 0$, в стационарных точках.

Справочный материал

Стационарные точки функции $z = z(x, y)$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Если функция $z = z(x, y)$ задана неявной зависимостью $F(x, y, z) = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, частные производные функции $z = z(x, y)$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Решение задачи

1. Неявная функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^2 + xz - yz - 120$. Поскольку $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + z$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -6y - z$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + x - y$, то частные производные определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+z}{2z+x-y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-6y-z}{2z+x-y}.$$

2. Система, которой удовлетворяют координаты стационарных точек имеет вид $\begin{cases} 2x+z=0 \\ -6y-z=0 \end{cases}$. Из этой системы выразим x и y через z по формулам $\begin{cases} x=-\dfrac{z}{2} \\ y=-\dfrac{z}{6} \end{cases}$ и подставим их в уравнение $x^2-3y^2+z^2+xz-yz-120=0$. Получим

$$\frac{z^2}{4}-3\frac{z^2}{36}+z^2-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{6}-120=0, \text{ или}$$

$$\frac{10z^2}{12}-120=0,\ 10z^2=1440,\ z^2=144,\ z=\pm 12.$$

Следовательно, стационарными точками являются точки $M_1(-6,-2,12)$ и $M_2(6,2,-12)$.

Задача 12.1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy-x-y$ в области, ограниченной координатными осями и прямой $x+y=3$.

Задача 12.2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x\,y$ в области $x^2+y^2\le 1$.

Задача 13.1

Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед наибольшего объема.

Задача 13.2

На эллипсе $x^2+9y^2=9$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $4x+9y=16$.

Справочный материал

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Непрерывная функция $z = f(x, y)$, заданная на ограниченном и замкнутом множестве D принимает на этом множестве наибольшее и наименьшее значения.

Наибольшее и наименьшее значения могут достигаться в точках экстремума и на границе области, поэтому для их отыскания поступают следующим образом:

- определяют стационарные точки функции и вычисляют значения функции в тех стационарных точках, которые содержатся внутри заданного множества;
- вычисленные значения функции сравнивают между собой и со значениями функции на границе области. Среди них находят наибольшее и наименьшее.

Условный экстремум функции двух переменных

Если ставится задача найти экстремум функции двух переменных $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ (условный экстремум), то определяют функцию Лагранжа, которая имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Тогда стационарные точки, точки в которых может быть условный экстремум, определяются из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Если $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка, соответствующая значению λ_0 (множителю Лагранжа), то функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 условный экстремум, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 условный минимум, если $\Delta < 0$ и условный максимум, если $\Delta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если определитель $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть.

Решение задачи 12.1

Стационарные точки функции определяются из системы: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$. Решение системы $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Стационарная точка $M_1(1; 1)$ находится внутри заданной области (рис.1). Значение функции в этой точке равно $z(M_1) = -1$.

Граница области задается уравнениями:

1. $x = 0, \quad 0 \le y \le 3$. На этой части границы $z = y^2 - y$ – функция одной переменной. Так как $z' = 2y - 1 = 0$ при $y = 0{,}5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_2(0; 0{,}5)$, а также в граничных точках $M_3(0; 0)$ и $M_4(0; 3)$. Вычислим значения во всех этих точках: $z(M_2) = -0{,}25$, $z(M_3) = 0, \quad z(M_4) = 6$.

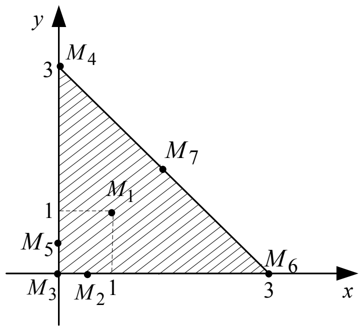

Рис. 1.

2. $y = 0, \quad 0 \le x \le 3$. На этой части границы $z = x^2 - x$. Так как $z' = 2x - 1 = 0$ при $x = 0{,}5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_5(0{,}5;\, 0)$, а также в граничных точках $M_3(0;\, 0)$ и $M_6(3;\, 0)$. Вычислим значения во всех этих точках: $z(M_5) = -0{,}25$, $z(M_6) = 6$.

3. $y = 3 - x, \quad 0 \le x \le 3$. На этой части границы $z = 2x^2 + (3 - x)^2 - 3x - 3$. Так как $z' = 4x - 2(3 - x) - 3 = 6x - 9 = 0$, при $x = 1{,}5$, то наибольшее и наименьшее значения могут быть в точках $M_7(1{,}5;\, 1{,}5)$ и в граничных точках $M_4(0;\, 3)$ и $M_6(3;\, 0)$. Вычислим $z(M_7) = -0{,}75$.

Следовательно, наибольшее значение функции равно $z_{наиб} = 6$ в точках $M_4(0;\, 3)$ и $M_6(3;\, 0)$, а наименьшее $z_{наим} = -1$ в стационарной точке $M_1(1;\, 1)$.

Решение задачи 12.2

Вычислим частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x = 0 \end{cases}.$$

Стационарная точка $M_1(0;0)$ принадлежит области $x^2+y^2\le 1$ (рис.2). Значение функции в этой точке $z(M_1)=0$.

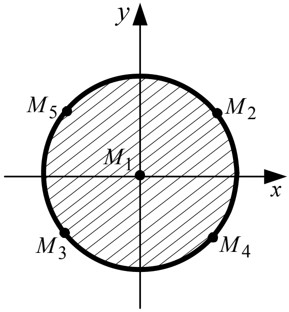

Рис. 2.

Исследование функции на границе можно проводить двумя способами.

1. Границей области является окружность, заданная уравнением $x^2+y^2=1$. Запишем это уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\ 0\le t\le 2\pi.$$

Подставляя значения $x(t)$ и $y(t)$ в функцию $z=xy$, получим функцию $z=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$ одной переменной t, заданную на промежутке $[0;2\pi]$. Наибольшее и наименьшее значения эта функция может принимать на концах промежутка при $t=0$, $t=2\pi$, а также в точках, в которых $z'(t)=0$.

Вычислим $z'(t)=\frac{1}{2}\cos 2t\cdot 2=\cos 2t$. $z'(t)=0$ при $t=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, где k - целое число.

Внутри промежутка $[0;2\pi]$ содержатся только точки $t_1=\frac{\pi}{4}$, $t_2=\frac{3\pi}{4}$, $t_3=\frac{5\pi}{4}$ и $t_4=\frac{7\pi}{4}$.

Вычислим значения функции $z=\frac{1}{2}\sin 2t$ во всех этих точках.

$$z(t_1)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0{,}5,\; z(t_2)=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=-0{,}5,$$

$$z(t_3)=\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{2}=0{,}5,\; z(t_4)=\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{2}=-0{,}5.$$

Вычислим значение функции $z=\frac{1}{2}\sin 2t$ на концах промежутка.

$$z(0)=0,\; z(2\pi)=0.$$

Следовательно, ***наибольшее значение*** функции равно $0{,}5$, которое достигается в точке $\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$, или $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и в точке $\left(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}\right)$, или $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Наименьшее значение функции равно $-0{,}5$, которое достигается в точке $\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right)$, или $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и в точке $\left(\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}\right)$, или $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Исследование функции на границе области – задача условного экстремума функции $z=xy$ при условии $x^2+y^2=1$. Функция Лагранжа имеет вид $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$. Стационарные точки определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим: $(y-x)-2\lambda(y-x)=0$, $(y-x)(1-2\lambda)=0$.

Подставляя $y=x$ в третье уравнение, получим точки: $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Не выясняя, будет ли в этих точках экстремум, вычислим: $z(M_2)=z(M_3)=\frac{1}{2}$.

При $\lambda=\frac{1}{2}$ $y=-x$. Подставляя это в третье уравнение, получим точки $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значения функции в этих точках равны: $z(M_4)=z(M_5)=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, наибольшее значение функции равно $z_{наиб}=\frac{1}{2}$ в точках $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а наименьшее $z_{наим}=-\frac{1}{2}$ в стационарных точках $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение задачи 13.1

Обозначим длины ребер прямоугольного параллелепипеда через x, y и z (рис. 3). Тогда его объем можно вычислить по формуле

$$V=xyz.$$

По условию $x+y+z=12a$. Выразим из этого равенства $z=12a-x-y$ и подставим в формулу для объема. Получим

$$V=xy(12a-x-y)=12axy-x^2y-xy^2.$$

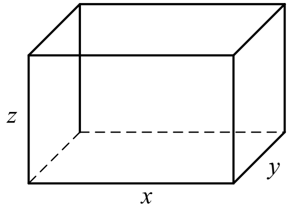

Рис. 3.

Исследуем функцию $V(x, y)$ на экстремум. Стационарная точка определяется из системы: $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 12ay - 2xy - y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 12ax - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$.

Поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $\begin{cases} 12a - 2x - y = 0 \\ 12a - 2y - x = 0 \end{cases}$, или $x = y = 4a$.

Вычислим вторые производные в стационарной точке $M(4a, 4a)$.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 12a - 2x - 2y.$$

$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M) = -8a, \quad C = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(M) = -8a, \quad B = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(M) = -4a.$$

Определитель $\Delta = AC - B^2 = 64a^2 - 16a^2 = 48a^2 > 0$.

Следовательно, в точке M есть экстремум, а так как $A < 0$ и $C < 0$, то это максимум. Поскольку максимум единственный, то это наибольшее значение. Значит, наибольший объем будет иметь параллелепипед с равными длинами ребер: $x = y = z = 4a$.

Решение задачи 13.2

Приведем уравнение прямой $4x + 9y = 16$ к нормальному виду (см. приложение). Для этого разделим обе его части на число $n = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}$. Получим

$$\frac{4}{\sqrt{97}}x+\frac{9}{\sqrt{97}}y-\frac{16}{\sqrt{9}}=0\,.$$

Для расстояния от точки $M(x,\,y)$ до этой прямой справедлива формула (см. приложение):

$$r=\left|\frac{4}{\sqrt{97}}x+\frac{9}{\sqrt{97}}y-\frac{16}{\sqrt{97}}\right|.$$

Все точки эллипса и начало координат находятся по одну сторону от прямой (рис. 4), значит под знаком модуля отрицательное число. Тогда $r=-\frac{4}{\sqrt{97}}x-\frac{9}{\sqrt{97}}y+\frac{16}{\sqrt{97}}$

Исследуем на условный экстремум функцию $z(x,\,y)=-\frac{4}{\sqrt{97}}x-\frac{9}{\sqrt{97}}y+\frac{16}{\sqrt{97}}$ при условии $x^2+9y^2=9$.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x,\,y,\,\lambda)=-\frac{4}{\sqrt{97}}x-\frac{9}{\sqrt{97}}y+\frac{16}{\sqrt{97}}+\lambda\left(x^2+9y^2-9\right).$$

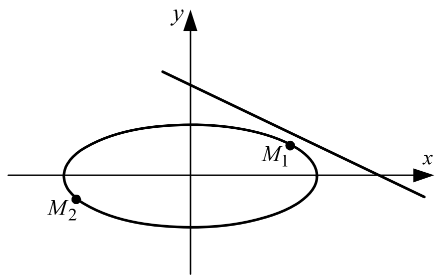

Рис. 4.

Для стационарных точек справедлива система

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=-\dfrac{4}{\sqrt{97}}+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-\dfrac{9}{\sqrt{97}}+18\lambda y=0\,.\\ x^2+9y^2=9\end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы: $x = \frac{2}{\sqrt{97}\lambda}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{97}\lambda}$. Подставив эти выражения в третье уравнение, найдем множители Лагранжа $\lambda = \pm\frac{5}{6\sqrt{97}}$ и определим $x = \pm\frac{12}{5}$ и $y = \pm\frac{3}{5}$.

Стационарные точки: $M_1\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ при $\lambda = \frac{5}{6\sqrt{97}}$ и $M_2\left(-\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ при $\lambda = -\frac{5}{6\sqrt{97}}$.

Используем достаточные условия условного экстремума. Поскольку $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 18y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 18\lambda$, а $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 18y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 18y & 0 & 18\lambda \end{vmatrix} = -648\lambda y^2 - 72\lambda x^2 = -72\lambda\left(9y^2 + x^2\right).$$

Следовательно, функция имеет условный минимум при $\lambda = \frac{5}{6\sqrt{97}} > 0$ и условный максимум при $\lambda = -\frac{5}{6\sqrt{97}} < 0$.

Следовательно, точка $M_1\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ наименее удалена от данной прямой, а точка $M_2\left(-\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ наиболее удалена.

Вариант 1

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=(\sin xy)^{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}+\arcsin\sqrt{1-xy}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ при $x=1\pm 0{,}02$, $y=1\pm 0{,}03$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=e^{\frac{x+y}{z}}+\operatorname{arctg} x^3y^2z$, если $x = x(t, s),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

4. Найти все производные второго порядка для функции $u=x^3y^2z+z^4y^3x+y^4x^2z$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=\frac{x}{y}$.

6. Вычислить y' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z(x,y)$, заданной неявно $\ln(x+y+z)=x+y+z$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных параметрически $\begin{cases} u+v=x \\ u-yv=0 \end{cases}$.

9. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $M_0(1,2,3)$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной зависимостью $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+y^3-9xy+27$ в области $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$.

13. Положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных их величин была наименьшей.

Вариант 2

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если: $z = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)^{\cos xy} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}-1}$.

2. Оценить абсолютную и относительные погрешности при вычислении значения функции $z = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{y}}$ при $x = 7 \pm 0.1$, $y = 9 \pm 0.1$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ функции $u = \sin(x - y + z) + 2^{\frac{z-x}{y}}$, где $x = x(t),\ y = y(t), z = z(t,s)$.

4. Найти все частные производные второго порядка для функции $u = \ln(x + y^2 + z) + z^4 x^5 y^3$.

5. Найти d^2u для функции $u = (x - y)\, e^{x^2 + y}$.

6. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = 3x^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(xy)}$.

7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z(x, y)$, заданной неявно $\sin(x + y + z) = x^2 + z$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных параметрически $\begin{cases} x\,u - y\,v = 0 \\ y\,u + x\,v = 1 \end{cases}$.

9. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x\,y^2(1 - x - y)$ при $x > 0$, $y > 0$.

11. Найти значения функции $z(x, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1$.

13. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность.

Вариант 3

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции: $z = (\sin\sqrt{xy})^{\ln(x^2+y^2)} + \arcsin\sqrt{x-y}$.

2. Оценить абсолютную и относительные погрешности при вычислении значения функции $z = x^y$, при $x = 2 \pm 0{,}1,\ y = 3 \pm 0{,}3$.

3. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$, если $u = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x+y}{z}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$, $x = x(t),\ y = y(t,s),\ z = z(s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = e^{x^2 y - z^3} + \frac{1}{5}x^5 y^6 z^7$.

5. Вычислить $d^2 u$ для функции $u = (x+2y)e^{x-y}$.

6. Вычислить y' и y'', если $y(x)$ задана неявно: $y = \dfrac{tg x^2 y^3}{1-x}$.

7. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно: $e^{x+y+z} = z - y$.

8. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} xv - u = y \\ u - yv = 0 \end{cases}$.

Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = e^x \cdot \cos y$ в точке $M_0(1, \pi, -e)$.

10. Исследовать функцию $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ на экстремум.

11. Найти значения функции $z = z(x, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ при $x^2 + y^2 \le 25$.

13. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?

Вариант 4

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = (\cos xy)^{\ln(x^2+y)} + \frac{1}{4}\arccos\sqrt{1-xy}$.

2. Оценить абсолютную и относительные погрешности при вычислении значения функции $z = \sqrt{x^2+y^2}$ при $x = 3 \pm 0{,}1;\ y = 4 \pm 0{,}05$.

3. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, если $u = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{x-y}\right) + x^3y^4z^2$, $x = x(s),\ y = y(t,s),\ z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = x^{y^z} + x^6y^7z^8$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = x^4y^5 + \frac{x}{y}$.

6. Вычислить y' и y'', если $y(x)$ задана неявно: $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

7. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z(x,y)$ задана неявно: $x + y + z = e^z$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}} \cdot y = x \\ e^{\frac{v}{y}} \cdot x = 1 \end{cases}$.

   Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{a}$ в точке $M_0\left(\frac{\pi a}{4}, a, a\right)$.

10. Исследовать $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ на экстремум при $x > 0, y > 0$.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + 3y^2 4z^2 - x + y - xy + xz - 1 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 100$.

13. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точку, сумма квадратов расстояний до которой от n данных точек, $i = 1,\dots,n$, была бы минимальной.

Вариант 5

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right)^{\ln(x^2-y^3)} + \operatorname{arctg}\left(1+\frac{x\sqrt{y}}{x+y}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения $z = \sin x \cdot \cos y$ при $x = 30^\circ \pm 2^\circ$, $y = 60^\circ \pm 1^\circ$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ функции $u = 3^{\frac{x-y}{2z}} - \arcsin(x+y-z)$, $x = x(s)$, $y = y(t)$, $z = z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = z \cdot \sin(xy) + \frac{xy}{1-z}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = xe^{x-y}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}}{x}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно: $\sin(x-y+z) = x^2 + y + 3z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} u - v = 2x \\ ux + vu = 0 \end{cases}$.
Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке $M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ на экстремум при $x > 0,\ y > 0$.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной неявно $2x^2 + y^2 + 2z^2 + x - y + 2z - 6xy - 3 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 + xy$ в области $|x| + |y| \le 1$.

13. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершённого прямым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q, определить его измерения так, чтобы объём тела был бы наибольшим.

Вариант 6

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции

$z = (\mathrm{tg}\, xy)^{\cos\frac{x}{y}} + \frac{1}{3}\arcsin\left(x\sqrt{y-3x}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении $z = \sqrt[3]{x^2 + y}$ при $x = 4 \pm 0{,}01, \quad y = 11 \pm 0{,}02.$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции

$u = e^{\frac{z}{x+y}} + \ln(z - x)$, если $x = x(t,s),\ y = y(s),\ z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = xe^{yz} - \cos(x + y - z)$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = e^{x-y} \cdot x$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y = \dfrac{\sin(x-y)}{x-y}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно: $\sin(x+z) = 3z + x - y$.

Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} 2xu + v = y \\ e^{\frac{u}{x}} - y = 2 \end{cases}$.

Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x(y+z)(xy-z) + 8 = 0$ в точке $M_0(2, 1, 3)$.

10. Исследовать функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на экстремум.

11. Найти значения функции $z(x, y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + y - x + 6xy - yz = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x^2 + y^2 - 2y$ при $|x| \le 1$, $0 \le y - x \le 1$, $0 \le x + y \le 1$.

13. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из сторон образует тело наибольшего объёма.

Вариант 7

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = (\ln(x+y))^{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} + \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y-x})$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = \sqrt[3]{2x^2 + y}$, если $x = 2 \pm 0{,}02$, $y = 1 \pm 0{,}03$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \operatorname{arctg}\frac{z}{2x} + \sin(x+y)$, при $x = x(t,s),\ y = y(s),\ z = z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = (\cos yx)^z - \frac{z^2}{x-y}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = \cos(x-y)x$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$ заданной неявно $y = e^{xy} + x^2$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно: $\ln(x - 2y + z) = x - z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} \sin(ux) = y \\ \cos(vy) = 2x \end{cases}$. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ в точке $M_0(2,2,1)$.

10. Исследовать функцию $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + y^2 + 4z^2 + x + 2y + 3z + xy - 2 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ в области $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x + y \le 2$.

13. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с круглым поперечным сечением, поверхность которой равна Q, имеет наибольшую вместимость?

Вариант 8

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right)^{\cos(x+y)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения $z = \frac{x}{\sqrt{y+1}}$ при $x = 2 \pm 0{,}01,\ y = 3 \pm 0{,}05$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = 5^{\frac{z}{x-y}} + \arccos\left(\frac{x+2y}{z}\right)$, при $x = x(t)$ $y = y(s)$, $z = z(s,t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = (\sin yz)^{x^2} - \frac{\sqrt{y-x}}{1-z}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = \frac{y^2}{3x}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y-1}\right) + x^2$.

7. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. функции $z(x,y)$, если $x - y + 3z = e^{xyz}$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} 2^{u-x} = 3y \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{u}{x}} = v - y \end{cases}$. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^2 + 4z + x^2 = 0$ в точке $M_0(0,1,-4)$.

10. Исследовать функцию $z = (2x^2 + y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$ на экстремум.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $3x^2 + y^2 + 3z^2 + z - y + xy - 4 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 4y - 2$ при $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y - x \le 1, 0 \le x + y \le 1$.

13. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллепипед наибольшего объёма.

Вариант 9

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=(\cos yx)^{\ln^2\left(\frac{x}{y}\right)}+\arccos\left(1-\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sin^2 x\cdot \operatorname{tg} y$ при $x=\frac{\pi}{2}\pm 0{,}02,\ \ y=\frac{\pi}{4}\pm 0{,}03.$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=e^{\frac{2x-y}{\sqrt{z}}}+\operatorname{tg}\frac{z}{x}$ при $x=x(t,s),\ y=y(t),\ z=z(s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\ln(xy-z^2)+\frac{1}{2}\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=y^5x^4-e^{xy}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x-y}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $2^{x-y+2z}=z-y+x$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}-vy=1 \\ e^{\frac{u}{y}}-vx=2 \end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M_0(1,1,1)$

10. Исследовать функцию $z=x^2+(y-1)^2$ на экстремум.

11. Найти значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $4x^2+2y+z^2+y+2z-xy-xz-yz=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\le 16$.

13. В данный прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

Вариант 10

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = (\ln(x-y))^{\sin^2\frac{x}{y}} + 3\operatorname{arctg}\frac{2x+y}{\sqrt{x}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $x = 4 \pm 0{,}05$, $y = 3 \pm 0{,}07$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \sin\left(\frac{z}{x+y}\right) - \frac{1}{2}\ln(x+y-z)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right) + \sqrt{x^2 - yz}$.

5. Вычислить d^2u ля функции $u = \sin^2(x-2y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2+y^2}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно: $\sin(x-y+z) = z+2y-x$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} ux - vy = 0 \\ 2^{\frac{u}{x}} = 3\frac{v}{y} \end{cases}$.

   Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке. $M_0(1, 1, 3)$.

10. Исследовать функцию $z = (x-y+1)^2$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $x^2 + y^2 + 2z^2 - y - x - z + xz + 8 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - x^2$ в области $x^2 + y^2 \le 9$.

13. Данное положительное число a разложить на три слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Вариант 11

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = (\operatorname{tg}\sqrt{x-y})^{\ln\frac{x}{y}} - \arccos\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y^2}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения $z = (x+y)e^{xy}$ при $x = 1 \pm 0{,}2$, $y = 1 \pm 0{,}01$.

3. Написать формулы для $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$, если $u = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} - \sqrt{y} + z) - \sin(x - z + y)$ при $x = x(t)$, $y = y(s)$, $z = z(t,s)$

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = \cos^2(xyz) - \frac{1}{5}\frac{z}{x-y}$.

5. Вычислить дифференциал второго порядка для функции $u = e^{x^2+y^2}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = \sin(xy) + \sqrt{y^2 - x^2}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно зависимостью: $\ln(x - y - z) = 2x - y + z$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} xu + yv = 1 \\ \frac{u}{y} - \frac{v}{x^2} = 0 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в точке $M_0(2, 2, 3)$.

10. Исследовать функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x, y)$, заданной зависимостью $x^2 + 10y^2 - z + xz + 4yz + 4 = 0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2xy$ в области $|x| + |y| \le 1$.

13. На плоскости даны три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) с массами m_1, m_2, m_3. При каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим.

Вариант 12

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{\sin(xy)}-\arcsin\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=x\ln\frac{y}{x}$, при $y=e\pm 0{,}1,\ \ x=1\pm 0{,}2.$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=e^{\frac{x+27}{y}}+\cos\left(\frac{z}{y-x}\right)$ при $x=x(t,s),\ y=y(t),\ z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\frac{xy}{y-2z^2}-\sin\left(xy-z^2\right)$.

5. Вычислить d^2u, если $u=\frac{x}{x-y}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=\frac{1}{3}x^2\cdot e^{\frac{y}{x}}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $\cos(z-x)=y+3z-x$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} vx+uy=2 \\ \frac{x}{u}-\frac{y}{v}=3 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M_0(1{,}0{,}0)$.

10. Исследовать функцию $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной зависимостью $x^2+4z^2-x+xy+6yz+2=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=y-x$ в области $-1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1$.

13. В эллипсоид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{9}=1$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

Вариант 13

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\cos\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^{\operatorname{tg}xy}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y+x}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении $z=e^{y}\cdot\sin x$ при $x=\frac{\pi}{2}\pm 0{,}01,\ y=1\pm 0{,}02.$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\frac{z}{3^{x-y}}+\ln(x+y-z)$ при $x=x(t,s),\ y=y(t,s), z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\sin^2(x+yz)+2^x\cdot 3^y\cdot 4^z$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=(x+y)e^{x+y}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=x\cdot 2\ln(x-y)$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $e^{z-x}=2z+x^2+y^2$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases}\cos(x-u)=yv\\ \sin(v-y)=xu\end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $M_0(1,1,\frac{\pi}{4})$.

10. Исследовать функцию $z=xy\ln(x^2+y^2)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $x^2+2y^2+z^2+x-y-z+2yz=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2$, $|x|+|y|\le 2$ в области $|x|+|y|\le 2$.

13. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длины рёбер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объёмом.

Вариант 14

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции
$z = \left(\sin\frac{2x}{y}\right)^{\ln\frac{x}{y}} - 2\arccos\left(x - \sqrt{y - x}\right)$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, при $x = 2 \pm 0{,}01$, $y = 15 \pm 0{,}2$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции
$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{z}\right) - \frac{1}{4}e^{y-zx}$

4. Вычислить все производные второго порядка для функции $u = x^{yz} + y^{xy} + z^{xy}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = (x - 2y)\sin(xy)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $y = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно зависимостью: $4^{y-z} = x^2 + y^2 + z^2$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} x \cdot e^{\frac{u}{y}} = 1 \\ y \cdot e^{\frac{v}{x}} = 2 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = y + \ln\frac{x}{y}$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.

10. Исследовать функцию $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ на экстремум.

11. Вычислить значения $z(x, y)$ заданной неявно зависимостью $2x^2 + y^2 + 3y + z^2 - x - z + 3yz = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2y^2 - x$ в области $x^2 + y^2 \le 100,\ y \ge 0$.

13. Внутри четырёхугольника найти точку, сумма квадратов расстояний до которой от вершин была бы наименьшей.

Вариант 15

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left[\cos(\sqrt{y-x})\right]^{\sin\left(\sqrt{y-x}\right)}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{2x}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$, при $x=3\pm 0{,}3,\ y=4\pm 0{,}4$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\ln(2x-\sqrt{z})+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x=x(s),\ y=y(t),\ z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\sin^2(xy-z)+\frac{z-\sqrt{x}}{2y}$.

5. Вычислить дифференциал второго порядка для функции $u=(x+y)\,e^{\frac{x}{y}}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos(xy)$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $\sin(2x-y+z)=x+y-z$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} ux+vy=2 \\ u-vx=y \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ в точке $M_0(1,\frac{\pi}{2},1)$.

10. Исследовать функцию $z=x^3+y^3-3xy$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $x^2+4y^2+z^2-2x+3y-z+yz-yx=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2+2xy$ при $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$, $0\le x+y\le 3$.

13. Из всех треугольников с основанием a и с углом α при вершине найти треугольник с наибольшей площадью.

Вариант 16

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\ln(x-y)}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2x+y}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sqrt[3]{y^2-x^3}$, при $x=2\pm 0.05,\ y=4\pm 0.08$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции

$u=y\,e^{z-x}+\arccos\frac{z}{x-y}$ при $x=x(s), y=y(t,s), z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\cos^2(z\,x\,y)+z^{xy}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=\frac{2x}{y-1}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной зависимостью $y=x^y\cdot\sqrt{x^2-y^2}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью $e^{\frac{xz}{y}}=x+y-z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} y\,e^{\frac{u}{x}}=1 \\ x\,e^{\frac{v}{y}}=2 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1,2,5)$.

10. Исследовать функцию $z=x^2-(y-2)^2$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной зависимостью $4x^2+y^2+z^2-x-y-xy-4=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2y+x$ в области $y\geq x^2,\ y-2x\leq 3$.

13. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и внутренней ёмкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

Вариант 17

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=(\sin\frac{y}{\sqrt{x}})^{\cos\frac{x}{y}}-\frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{y}}{2y-x}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sin^2(x-y)$ при $x=60^\circ\pm1^\circ$, $y=30^\circ\pm2^\circ$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\frac{1}{5}\ln(y-3z)+\arcsin\frac{x}{2z}$ при $x=x(s),\ y=y(t),\ z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=2^{xyz}-\sin\left(\frac{\sqrt{x-y}}{z}\right)$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=y\sin(2x-y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=x^2\ \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $\ln(z+x-y)=z^2+y^2-x^2$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} v-u=y \\ ux+yv=0 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M_0(3,4,12)$.

10. Исследовать функцию $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $x^2+y^2+z^2-y-z-2yz-1=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $1-z=3y^2+x^2$ при $0\le x\le1, -1\le y\le0, 0\le x-y\le1$.

13. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объём.

Вариант 18

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left(\ln(y-2x)\right)^{\sin\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+2y}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = y^x$ при $x = 2 \pm 0{,}01,\ y = 5 \pm 0{,}02$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \frac{x^3 y^2}{z} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+z}$, если $x = x(t,s)$, $y = y(s)$, $z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = \cos^2(\sqrt{x} - yz) - x^{yz}$

5. Вычислить $d^2 u$ для функции $u = \sin^2(3x + y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\sqrt{y-x}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $3^{x-y+z} = y - 2x + 3z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}} y = x \\ e^{\frac{y}{v}} x = 1 \end{cases}$

Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$ в точке $M_0(1, 1, \frac{\pi}{8})$.

9. Исследовать функцию $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ на экстремум.

10. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $4x^2 + y^2 + 2z^2 + x + y + z + 2 = 0$, в стационарных точках.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - 2x^2$ в области $x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 100$.

12. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

Вариант 19

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left(\operatorname{tg} xy\right)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{1-y}} + \frac{1}{4}\arccos\frac{\sqrt{y}+3x}{2y-x}$.
2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = \operatorname{tg} x \cdot \cos y$ при $x = 45^\circ \pm 1^\circ$, $y = 60^\circ \pm 0{,}5^\circ$.
3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = e^{x-y+z} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{z}{x-y}$, если $x = x(s)$, $y = y(t)$, $z = z(t,s)$.
4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = z^{x^y} + \sqrt{x - \sqrt{y - \sqrt{z}}}$.
5. Вычислить d^2u для функции $u = xy^6 - \cos^2(x^4y^3)$.
6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = 4^{xy}\sqrt{x+y}$.
7. Функция $z(x, y)$ задана неявно зависимостью: $z = 2y - x + \sin(4x - y^2 + z)$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.
8. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы параметрически: $\begin{cases} \sin(ux) = y \\ \cos(vy) = x \end{cases}$

   Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.
9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ в точке $M_0(1,-2,2)$.
10. Исследовать функцию $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$ на экстремум.
11. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $x^2 + y^2 + 4z^2 - x - y + z + yz = 0$ в стационарных точках.
12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + 1$ в области $y \ge x^2 - 1$, $y \le 4$.
13. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

Вариант 20

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left[\operatorname{tg}(1-xy)\right]^{\ln\frac{y}{x}}-\arcsin\frac{yx}{1-\sqrt{x}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sqrt{2x+y^2}$, если $x=2\pm 0{,}01;\ y=4\pm 0{,}02$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\left(\frac{1}{3}\right)^{z-2x}+\cos\left(\frac{y+x}{2z}\right)$, если $x=x(s),\ y=y(t,s), z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\frac{1}{2}\sin^2(1-xyz)+\frac{x}{y-3z}$.

5. Вычислить дифференциал d^2u для функции $u=\frac{y}{x}+x^4\sqrt{y}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной: $y=\frac{1}{\sqrt{x-y}}\sin(1-xy)$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью: $e^{x^2+y+2z}=z^2+y-x$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ заданы параметрически: $\begin{cases}2xu-v=y\\ yv-x=1\end{cases}$

Вычислить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2+y^2-z^2+xy-yz+2xz=2$ в точке $M_0(1,0,0)$.

10. Исследовать функцию $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции, заданной неявно зависимостью $x^2+2y^2+z^2+x+y+z+xz=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=1-x-y$ в области $x^2+y^2\le 4$.

13. Из всех треугольников, имеющих данный периметр P. найти наибольший по площади.

Вариант 21

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left[\cos\left(x - \sqrt{xy}\right)\right]^{\sin\frac{y}{x}} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2y}{3\sqrt{x}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = e^{xy}$ при $x = 5 \pm 0{,}1;\ y = 0 \pm 0{,}05$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \ln(x^2 - y^2 + z) - \frac{1}{2}\sin(x + y - z^2)$, при $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $z = z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = 3\cos^2(xyz) - \frac{\sqrt{z}}{x-2y}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = (x - y)\,e^{\frac{x}{y}}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{y}}{1-x}\right)$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно зависимостью $\cos(x - y^2 + z) + x^2 - z^3 + y = 0$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} e^{\frac{v}{x}} = y \\ e^{\frac{u}{y}} = x + 2 \end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z - 2x + \ln\frac{y}{x} + 1 = 0$ в точке $M_0(1,1,1)$.

10. Исследовать функцию $z = x^2 y\,(2 - x + y)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x, y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + 4y^2 + 2z^2 + x - y + 2yz + 1 = 0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 9$.

13. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точку, наименее удалённую от точки $P(0,2)$.

Вариант 22

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\sin\frac{y}{x}\right)^{\ln(x+y)}+\arcsin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sqrt{x^2-y^2}$ при $x=5\pm 0{,}1;\ y=4\pm 0{,}05$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\cos\left(\frac{xz}{y-x}\right)-e^{\frac{x+z}{y}}$, если $x=x(s),\ y=y(t),\ z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции: $u=\sqrt{x^2-y^3z^4}-4^{xyz}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=\cos^2(x-2y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $y=\sqrt[3]{x-y}\cdot e^{\frac{y}{x}}$

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно: $\ln(x+2y-z)=x+3y-2z^2$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases}\cos(u-x)=2y\\ \sin(vy)=x\end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-3=0$ в точке $M_0(1,1,1)$.

10. Исследовать функцию на экстремум $z=2x^2-x+(y+1)^2$.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $x^2+2y^2+z^2-x+y+yz+2=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=5x-3y$ в области $y\ge x,\ y\ge -x,\ y\le 4$.

13. В эллипс $x^2+3y^2=12$ вписать равнобедренный треугольник с основанием, параллельным большой оси эллипса так, чтобы площадь треугольника была наибольшей.

Вариант 23

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{y}} \right)^{\sin(xy)} - \frac{1}{4} \arccos \frac{x+y}{2\sqrt[3]{y}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = y \ln \frac{x}{y}$ при $x = 1 \pm 0{,}05$; $y = e \pm 0{,}1$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{y+x}{z}\right) + z \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ при $x = x(s)$, $y = y(t, s)$, $z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции: $u = z^{y^x} - \sqrt{\sin(y\sqrt{x} - z)}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = \frac{1}{3} \sin^2(xy)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $y = x^y \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно: $3x - y + z = 4^{x + y^2 - 2z}$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} u - xv = 2 \\ v + yu = 3 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x(x - y) + y(x - z) + z(x + y) - 2 = 0$ в точке $M_0(1,0,1)$.

10. Исследовать функцию $z = y^2 + 3x^2 + y - x$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x, y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + y^2 + 3z^2 + x + y - xz + 4 = 0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + y^2 - 4x + y$ в области $x^2 + 4y^2 \le 4$.

13. На параболе $y^2 = 4x$ найти точку, наименее удалённую от прямой $x - y + 4 = 0$.

Вариант 24

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2x}\right)^{\ln\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{2x}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=e^{x}\cos y$ при $x=1\pm 0{,}05$,; $y=\frac{\pi}{4}\pm 0{,}01$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=x\cos(yz)-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{z^{3}}{x-y^{2}}\right)$ если $x=x(t), y=y(t,s), z=z(s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=(\cos z)^{xy}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x-y}}{z}$.

5. Вычислить $d^{2}u$ для функции $u=(x+y)\,e^{\frac{2y}{x}}$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $y=3x^{2}\sin(yx)$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно. $\ln(y-x+z)=5x+y-2z$ Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases}\sin(xu)=3y\\ e^{\frac{v}{y}}=x\end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением
$$x^{2}+2y^{2}+3z^{2}+2xy+2xz+4yz=6 \text{ в точке } M_{0}(1,0,1).$$

10. Исследовать функцию $z=e^{x-2y}(2x+y)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $3x^{2}+2y^{2}+z^{2}+z+xy+yz+3=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=\frac{1}{2}x^{2}-y^{2}+5x-y$ в области $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

13. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости.

Вариант 25

1. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=(\cos(1-xy))^{\operatorname{tg}(xy)}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{xy}}{2x-3y}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sqrt{2x^2-3y^2+3}$, при $x=3\pm0{,}1$, $y=2\pm0{,}2$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\frac{1}{y}\operatorname{tg}\left(\frac{z}{x}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z^2-x}{y}}$ $x=x(t,s),\ y=y(t,s),\ z=z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=2x^{\sin\frac{y}{x}}-\frac{\sqrt{y-\sqrt[3]{x}}}{3z}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=(2x+y)\cos(xy)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y=\frac{2}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{1-y}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно $\frac{1}{5^{z-y}}=x^2-y-z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases}2^{u-x}=0\\2^{vy}=x-u\end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ в точке $M_0(0,0,4)$.

10. Исследовать функцию $z=y^2+x^2-xy+2x-y$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной зависимостью $x^2+4y^2+2z^2+x-y+z+2=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4-3x+2y$ в области $x^2+y^2\le 9$.

13. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершённый сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объём его равен V.

Вариант 26

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\ln(x-y)\right)^{\operatorname{tg}\frac{y}{x}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{y}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\sin x\cos 2y$ при $x=\frac{\pi}{2}\pm 0.05$, $y=\frac{\pi}{6}\pm 0.1$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\frac{e^{2y-x}}{z}+\cos\left(\frac{z-x}{y}\right)$, если $x=x(t,s)$, $y=y(t)$, $z=z(s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\frac{\operatorname{tg}(xy)}{1-x}-\frac{2z-y}{\sqrt{x}}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=(3x-2y)\sin(x-y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y=\sqrt{y-x}\sin(xy)$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно: $\cos(x-y^2+z)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+z}$

Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} ux+vy=0 \\ \frac{u}{x}+\frac{v}{y}=1 \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $\frac{1}{3}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=1$ в точке $M_0(1,1,1)$.

10. Исследовать функцию $z=y^2x^3(4-y-x)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $2x^2+y^2+3z^2+y-xz+yz-4=0$, во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+4y^2-xy$ в области $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 0$.

13. На параболе $y=2x^2+1$ найти точку, наименее удалённую от точки $P(10,0)$.

Вариант 27

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\right)^{\ln(x^3 - y^3)} - \arccos\sqrt{1 + xy}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = x^y$, если $x = 3 \pm 0{,}1$, $y = 2 \pm 0{,}4$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \frac{\sin(2x - y)}{z} - 2^{\frac{3z}{y-x}}$, если $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции

$$u = x\cos(yz^2) - \frac{\sqrt{x - 2y}}{\sqrt[3]{z}}.$$

5. Вычислить d^2u для функции $u = \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(x^2 - y^2\right)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = e^{xy}\sqrt{x^2 + 2y^2}$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно:. $\ln(y - z - 2x) = x - y^2 + 3z$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} \sin(xv) = 1 + y \\ \cos(uy) = v - x \end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ в точке $M_0(1,1,0)$.

10. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy$ на экстремум

11. Вычислить значения функции $z(x, y)$, заданной неявно зависимостью $x^2 + y^2 + z^2 + 8xz - z + 4 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 - x - y$ в области $x^2 + y^2 \le 64$.

13. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

Вариант 28

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)^{\cos(xy)}-\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}y$, при $x=\frac{\pi}{4}\pm 0.01,\ y=\frac{\pi}{4}\pm 0.1$

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u=\frac{z^2}{\cos(xy)}-e^{z-x+y}$, если $x=x(s),\ y=y(t),\ z=z(t,s)$

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=z^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\sqrt[3]{1-xyz}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=e^{x-y}\left(x-2y^2\right)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y=\sin(xy)\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно: $\ln(y-z^2x)=\frac{1}{z-y+4x}$.

Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases} uy-vx=1 \\ e^{\frac{u}{x}}-e^{\frac{y}{v}}=x \end{cases}$

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{z}}-y$ в точке $M_0(0,1,1)$.

10. Исследовать функцию $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной неявно зависимостью $2x^2+2y^2+z^2+6yz-z+6=0$. во всех стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,y)$. заданной неявно $z+2=x^2-5y^2$, в области $0\le x\le 2$, $y-x\le 0$.

13. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объёма.

Вариант 29

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\left(\ln(x^2-y^2)\right)^{\sin xy}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z=\ln\frac{x}{y}$, при $x=e\pm 0{,}1$; $y=1\pm 0{,}01$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ функции $u=\frac{1}{2}\ln(x-y+z^2)+\frac{\sin(x+2y)}{2z}$, при $x=x(t), y=y(t,s), z=z(t,s)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u=\cos(xy-z^2)-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y-z^2}}$.

5. Вычислить d^2u для функции $u=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^2+y^2\right)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, если $y=2^{xy}\sqrt{x^2-y^2}$.

7. Функция $z(x,y)$ задана неявно зависимостью $\cos(y+2x-3z)=x^2+y^2+z^2$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если: $\begin{cases}\cos(xu)=vy\\ \sin(y-v)=\frac{u}{x}\end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2+xy-yz+z^2+xz=3$ в точке $M_0(1,1,0)$.

10. Исследовать функцию $z=e^{x+2y}(x^2-xy+2y^2)$ на экстремум.

11. Вычислить значения функции $z(x,y)$, заданной зависимостью $x^2+y^2+4z^2+4xz-2z+2=0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,y)$, заданной неявно $z-4=5x+4y$, в области $x^2+y^2\le 4$.

13. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

Вариант 30

1. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \left[\cos(xy)\right]^{\ln\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy}$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении значения функции $z = \sin x + \cos y$, при $x = \frac{\pi}{6} \pm 0.1$, $y = \frac{\pi}{3} \pm 0.2$.

3. Написать формулы для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial s}$ для функции $u = \frac{1}{4}e^{x-y+z^2} + \cos\frac{z-x}{2y}$, если $x = x(t,s)$, $y = y(s)$, $z = z(t)$.

4. Вычислить все частные производные второго порядка для функции $u = \frac{x-y^2}{3\sqrt{z}} - \sin^2(xyz)$.

5. Вычислить d^2u для функции $u = e^{2x-3y}(x-4y)$.

6. Вычислить y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно $y = \frac{x}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$.

7. Функция $z(x, y)$ задана неявно $z = y - 2x + \sin(zx)$. Вычислить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} uy - vx = 2 \\ \cos(ux) = \sin(vy) \end{cases}$.

9. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln\left(\frac{x+y}{2z}\right) + z - y = 0$ в точке $M_0(1,1,1)$.

10. Исследовать функцию $z = 3y^2 + (2x-1)^2$ на экстремум/

11. Вычислить значения функции $z(x, y)$, заданной зависимостью $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz + z - 2 = 0$, в стационарных точках.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$, заданной неявно $z + 1 = x^2 + x + y^2 - 4y$, в области $-1 \le x \le 0$, $y - x \le 1$.

13. Найти наименьшее значение суммы m-й и n-й степеней $(m > 0, n > 0)$ двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a .

Приложение

Таблица производных основных элементарных функций

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x)' = 1$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правила дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

4. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$;

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$;

6. $y'_x = \left(f(u(x))\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Формулы Крамера

Решение линейной системы $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}\ y = b_1 \\ a_{21}y + a_{22}x = b_2 \end{cases}$, у которой определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, вычисляется по формулам

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Нормальное уравнение прямой

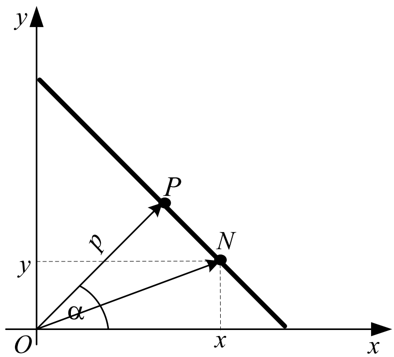

Рис. 5.

Если вектор $\overline{OP}$, модуль которого равен p перпендикулярен прямой и образует угол α с осью Ox (рис. 5), то, выбирая на прямой произвольную точку $N(x, y)$ и вычислив проекцию вектора $\overline{ON} = \{x, y\}$ на вектор $\overline{OP} = \{p\cos\alpha,\ p\sin\alpha\}$, получим

$$\text{Пр}_{\overline{\text{OP}}}\overline{ON} = \frac{\left(\overline{ON}, \overline{OP}\right)}{\left|\overline{OP}\right|} = \frac{px\cos\alpha + py\sin\alpha}{p} = p\ ,$$

или $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

Перенося все слагаемые в левую часть, получим уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

в котором p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α - угол, который составляет этот перпендикуляр с осью Ox . Это уравнение называется ***нормальным уравнением прямой.***

Чтобы привести уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, следует разделить обе его части на число $n = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, т.е. записать в виде

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 .$$

Знак $\pm$ выбирается противоположным знаку C .

Расстояние от точки до прямой

Если уравнение прямой приведено к нормальному виду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\ ,$$

то расстояние от точки $M(x, y)$ до этой прямой определяется по формуле

$$r = \left|x\cos\alpha + y\sin\alpha - p\right| .$$

Поскольку $r = \text{Пр}_{\overline{\text{OK}}}\overline{OM} - p = \dfrac{x(p + r)\cos\alpha + y(p + r)\sin\alpha}{p + r} - p$,

или $r = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ (рис. 6).

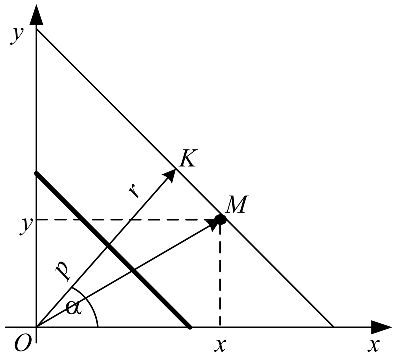

Рис. 6.

Формула $r = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ получена при условии, что точка M и начало координат находятся по разные стороны от прямой (рис. 6).

Если точка M и начало координат находятся по одну сторону от прямой, то

$$r = p - x\cos\alpha - y\sin\alpha .$$

При любом расположении точки M справедливо

$$r = \left| x\cos\alpha + y\sin\alpha - p \right| .$$