ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Основные понятия. Центр масс механической системы

Моделирование реального тела в качестве материальной точки имеет свои ограничения. Реальный объект необходимо рассматривать в качестве механической системы, т.е. как совокупность материальных точек или тел, в которой положение и движение каждой точки или тела зависит от положения и движения всех остальных точек.

Действующие на механическую систему силы подразделяются на внешние ($\vec{F}^E$) и внутренние ($\vec{F}^J$), активные ($\vec{F}$) и реакции ($\vec{F}^R$) связей, силы инерции ($\vec{F}^\Phi$).

Внешние силы - силы, действующие на точки (тела) механической системы со стороны точек (тел), не входящих в данную механическую систему.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками (телами) самой механической системы.

Основное свойство внутренних сил – это то, что в силу третьего закона динамики (действие равно противодействию) главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю.

$$\vec{R}^I_{0\Gamma} = 0 \qquad \vec{M}^I_{0\Gamma} = 0$$

$$R^I_{\Gamma x} = 0 \qquad M^I_{\Gamma x} = 0$$

$$R^I_{\Gamma y} = 0 \qquad M^I_{\Gamma y} = 0$$

$$R^I_{\Gamma z} = 0 \qquad M^I_{\Gamma z} = 0$$

Несмотря на это, система внутренних сил не является равновесной, так как эти силы приложены не к одному, а к разным телам внутри системы. Поэтому под действием внутренних сил может происходить перемещение внутри системы.

Механическая система-это система материальных точек, каждая из которых имеет определенную массу и занимает в данный момент определенное положение в пространстве.

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, положение которой определяется радиусом-вектором (рис.3.18)

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}, \tag{3.1}$$

где m_i - масса i-й материальной точки системы; $\vec{r}_i$ - радиус-вектор этой точки; $M = \sum m_i$ - масса всей системы.

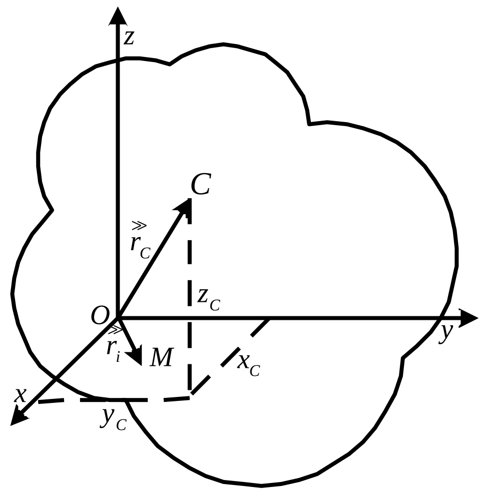


Рис. 3.18

Проецируя последнее векторное равенство на координатные оси, получим, что координаты центра масс механической системы определяются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M};$$

$$y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M};$$

$$z_C = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты i-й точки механической системы.

В однородном поле тяжести вес любой частицы тела пропорционален ее массе и центр масс системы совпадает с центром тяжести. Центр масс системы характеризует распределение масс в системе.

Масса является мерой инертности тел при поступательной системе. При вращательном движении при его анализе одной лишь массы недостаточно. Поэтому вводят понятие момента инерции.

Моменты инерции твердого тела

На ледовой площадке спортсмен-фигурист, чтобы достичь высокой угловой скорости соединяет ноги, выпрямляет туловище и вытягивает вверх руки, с целью же гашения скорости (в конце выступления) руки разбрасывает по сторонам. Из приведенного примера видно, что на кинематику механической системы оказывают влияние не только массы, но и взаимное их расположение.

Известно, что при поступательном движении, мерой инерции твердого тела является масса. Тогда как при вращательном движении инертность тела определяется распределением его массы относительно оси вращения, т.е. моментом инерции.

Так, например, при прочих равных условиях (рис.3.19) поступательного движения, тело 1 имеющее большую массу, до остановки, будет двигаться дольше легкого тела 2. При равных массах тела остановятся одновременно. В случае же вращения тел одинаковой массы (рис.3.19), тело 2, точки которого расположены дальше от оси вращения, чем у тела 1, до остановки будет вращаться дольше, чем тело 1, масса которого сконцентрирована возле оси.

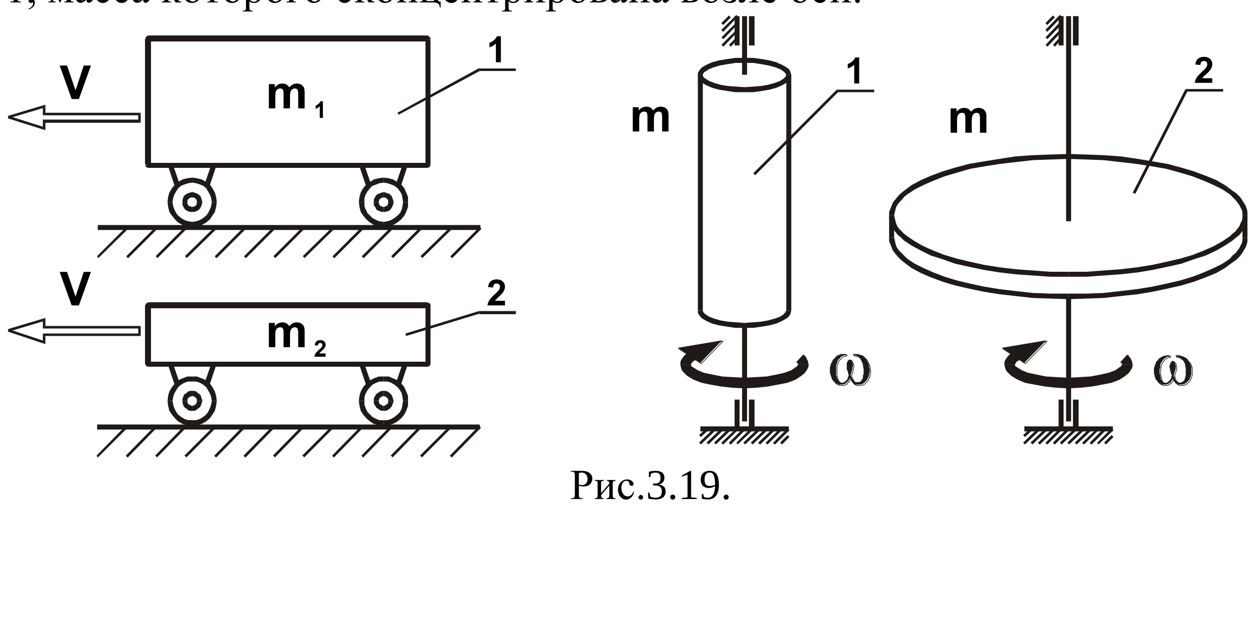
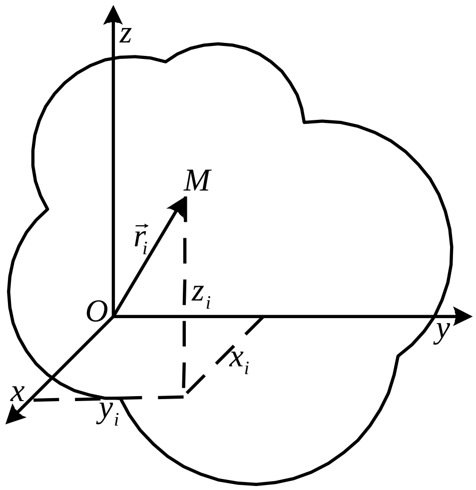


Рис.3.19.

Момент инерции относительно точки (полюса) - скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до полюса:

$$I_0 = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$



Момент инерции относительно оси - скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до оси:

$$I_x = \sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \sum m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_z = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)$$

Момент инерции тела относительно плоскости - скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до плоскости:

$$I_{xOy} = \sum m_i \cdot z_i^2$$

$$I_{xOz} = \sum m_i \cdot y_i^2$$

$$I_{yOz} = \sum m_i \cdot x_i^2$$

Центробежный момент инерции тела относительно какой- либо пары координатных осей - скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на произведение её координат по этим осям.

$$I_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \,, \quad I_{XZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \,, \quad I_{YZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \,.$$

Центробежные моменты инерции, в отличии от осевых, могут быть отрицательными и равными нулю.

Зависимости между моментами инерции твердого тела относительно координатных осей, координатных плоскостей и начала координат имеют вид:

$$I_O = I_{YOZ} + I_{ZOX} + I_{XOY},$$

$$I_O = 0{,}5\,(I_x + I_y + I_z).$$

$$I_x = I_{ZOX} + I_{XOY}, \quad I_y = I_{XOY} + I_{YOZ}, \quad I_z = I_{YOZ} + I_{ZOX}.$$

Момент инерции относительно оси произвольного направления.

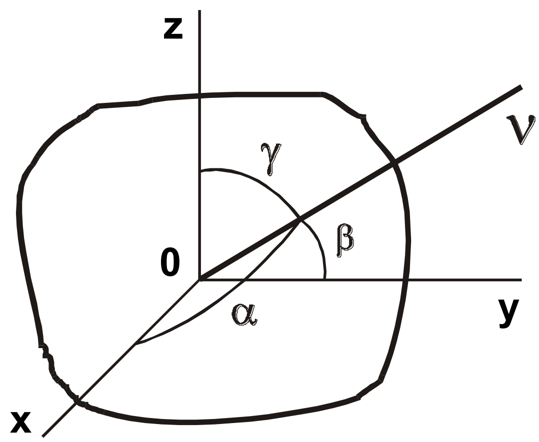


Рис. 3.20.

$$I_\nu = I_X * \cos^2\alpha + I_Y * \cos^2\beta + I_Z * \cos^2\gamma - 2 * I_{XY} * \cos\alpha * \cos\beta$$
$$- 2 * I_{YZ} * \cos\beta * \cos\gamma -$$
$$- 2 * I_{XZ} * \cos\alpha * \cos\gamma$$

где I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ} -центробежные моменты инерции.

Радиус инерции

Момент инерции твердого тела относительно заданной оси, например, оси z, можно представить в виде:

$$I_z = m\rho_z^2,$$

где ρ - радиус инерции тела относительно оси z.

Радиус инерции определяет то расстояние от оси, (рис. 3.21) на котором нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы она имела тот же момент инерции, как и рассматриваемое тело.

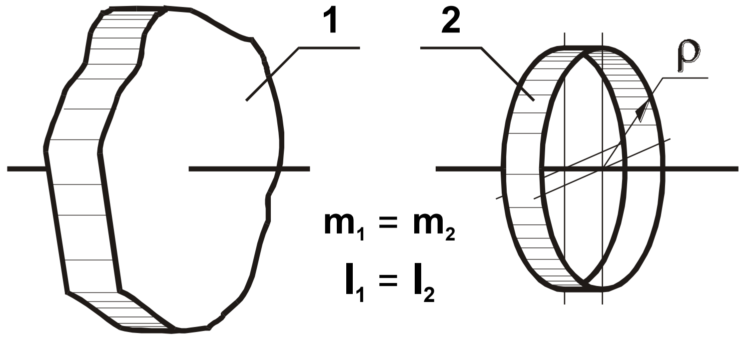
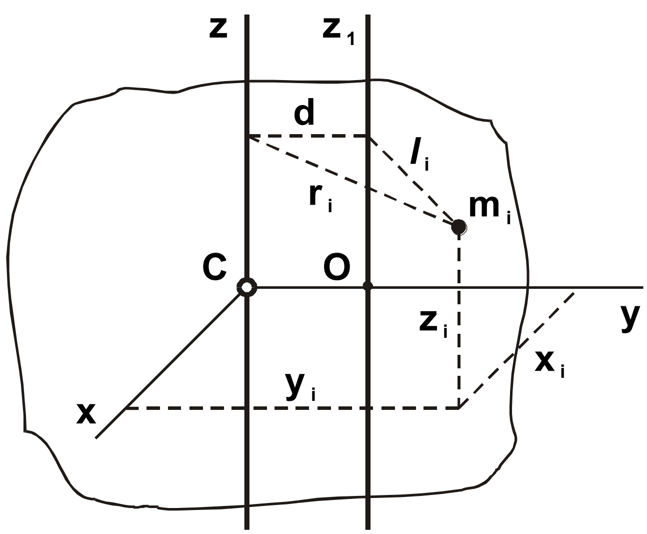


Рис. 3.21.

Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса Штейнера)

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут иметь различное значение. Зависимость между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела, определяется по теореме Гюйгенса.

Согласно ей: момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной оси плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между ними.



$I_{z_1} = I_{z_C} + m \cdot d^2$

$I_{z_1} = \sum m_i \cdot h_i^2$, где h- расстояние от каждой точки до оси z_1.

Докажем данную теорему

Исходя из определения момента инерции относительно оси, запишем

$$I_{Z_C} = \sum m_i * r_i^2$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$I_{Z_1} = \sum m_i *(x_i^2 + (y_i - d)^2) = \sum m_i *(x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2* y_i * d) =$$

$$= \sum m_i *(x_i^2 + y_i^2) + \sum m_i * d^2 - \sum m_i * 2* y_i =$$

$$= \left| y_C = \frac{\sum m_i * y_i}{M} \Rightarrow y_C * M = \sum m_i * y_i \right| = \sum m_i * r_i^2 + d^2 * \sum m_i = I_{Z_C} + d^2 * m$$

Из формулы Гюйгенса видно, что при удалении оси Z_1 от оси Z в3уличина момента инерции возрастает. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно оси проходящий через центр масс.

Осевые моменты инерции некоторых однородных простейших симметричных тел.

Однородный тонкий стержень:

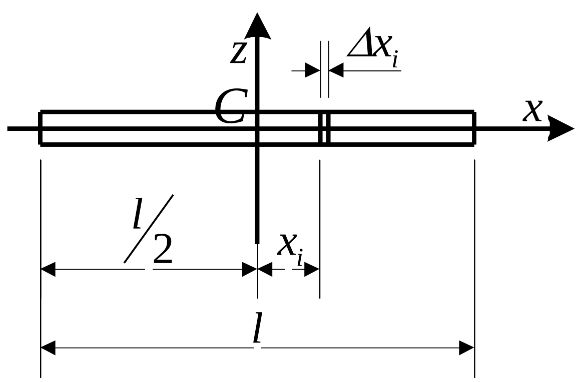


Рис.3.22.

Рассмотрим стержень (рис. 3.22) для которого: l - длина; F - площадь поперечного сечения; ρ - плотность. Масса элемента длиной:

$$m = \rho * V$$

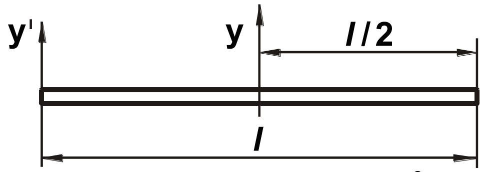
$$V = \rho * l * F$$

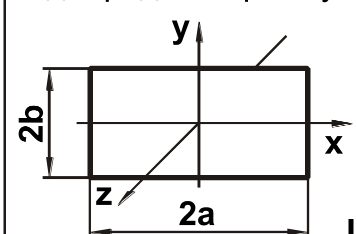
$$\Delta m_i = \rho * F * \Delta x_i$$

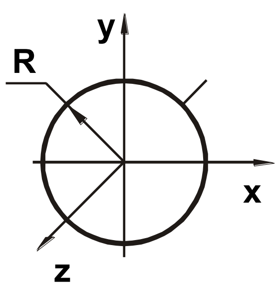
$$I_Z = \sum \Delta m_i * x_i^{\,2} = \sum \rho * F * \Delta x_i * x_i^{\,2}$$

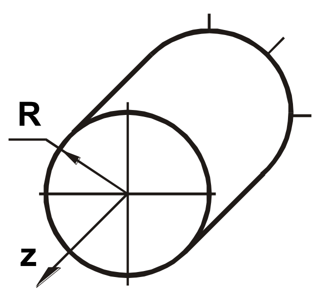
$$I_Z = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \rho * F * \Delta x_i * x_i^{\,2} = \rho * F * \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m * l^2}{12}$$

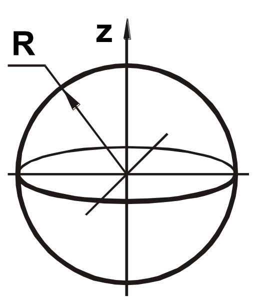
Осевые моменты инерции простейших тел

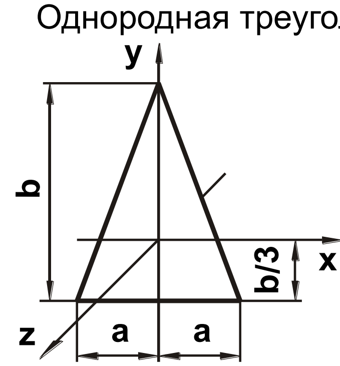
<table>
<tr>
<td>Однородный стержень


$I_y = \frac{m\,l^2}{12}$; $I_{y'} = \frac{m\,l^2}{3}$</td>
<td>Однородная прямоугольная пластина


$I_x = \frac{m\,b^2}{3}$
$I_y = \frac{m\,a^2}{3}$
$I_z = \frac{m\,(3a^2 + b^2)}{18}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Однородная круглая пластина


$I_z = \frac{mR^2}{2}$
$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}$</td>
<td>Однородный круглый цилиндр


$I_z = \frac{mR^2}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Однородный шар


$I_{zx} = \frac{2}{5}\,mR^2$</td>
<td>Однородная треугольная пластина


$I_z = \frac{m\,(3a^2+b^2)}{18}$
$I_y = \frac{m\,a^2}{6}$
$I_x = \frac{m\,b^2}{18}$</td>
</tr>
</table>

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Допустим, что механическая система состоит из n точек. Пусть на каждую i-ю точку механической системы действуют равнодействующая $\vec{F}_i^J$ внутренних сил и равнодействующая $\vec{F}_i^E$ внешних сил. Выберем некоторый полюс O, свяжем с ним начало системы координат (рис.3.23).

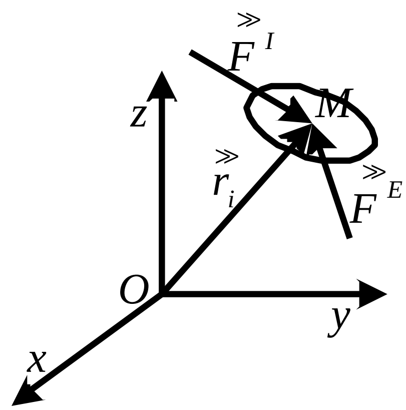


Рис.3.23

Основное уравнение динамики некоторой i-й точки имеет следующий вид:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^J,$$

а ее дифференциальные уравнения движения –

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = \vec{F}_{ix}^E + \vec{F}_{ix}^J;$$

$$m_i \cdot \ddot{y}_i = \vec{F}_{iy}^E + \vec{F}_{iy}^J;$$

$$m_i \cdot \ddot{z}_i = \vec{F}_{iz}^E + \vec{F}_{iz}^J.$$

Для изучения движения системы нужно составить $3 \cdot n$ таких уравнений. Входящие в правые уравнения силы могут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей. В результате интегрирования системы дифференциальных уравнений можно получить законы движения каждой точки системы.

Теорема о движении центра масс механической системы

Составить все $3 \cdot n$ дифференциальных уравнений движения n точек механической системы довольно сложно. Поэтому для изучения движения механической системы чаще применяют следующую **теорему**: *движение всей механической системы можно рассматривать как движение одной точки - центра масс*.

Доказательство. Представим формулу (3.2) в следующем виде:

$$m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^J .$$

Сложим правые части выражений (3.3) для каждой точки и приравняем ее к сумме левых частей данных выражений:

$$\sum m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{F}_i^J ;$$

$$\frac{d^2 \sum m_i \cdot \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{R}_Г^E + \vec{R}_Г^J .$$

Причем $\vec{R}_Г^J = 0$. Из выражения (3.1) следует, что

$$\sum m_i \cdot \vec{r}_i = M \cdot \vec{r}_C .$$

С учетом этого формула (3.4) примет вид

$$\frac{d^2(M \cdot \vec{r}_C)}{dt^2} = \vec{R}_Г^E .$$

Или

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_Г^E .$$

Проецируем последнее выражение на оси координат:

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum \vec{F}_{ix}$$
$$M \cdot \ddot{y}_C = \sum \vec{F}_{iy} \quad .$$
$$M \cdot \ddot{z}_C = \sum \vec{F}_{iz}$$

Теорема о движении центра масс звучит следующим образом: **центр масс механической системы движется как материальная точка с массой равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему**.

Используя вышеописанные уравнения можно определять движение центра масс системы, не определяя движения отдельных ее точек.

Если в качестве механической системы рассматривать твердое тело, то полученные выражения будут являться **дифференциальными уравнениями поступательного движения** данного тела. Поэтому поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Следствия из теоремы:

1) Внутренние силы не влияют на движения центра масс системы. Т.е. внутренними силами без внешних, нельзя вывести из равновесия или изменить движение центра масс системы.

Два других следствия из рассматриваемой теоремы выражают закон сохранения движения центра масс системы.

2) если на механическую систему не действуют внешние силы или их геометрическая сумма равна нулю ($\vec{R}_{\Gamma}^{E} = 0$), то такая система движется прямолинейно и равномерно ($\vec{a}_C = 0$).

$$\vec{a}_C * M = 0, \quad \vec{R}_{\tilde{A}}^{\,E} = 0, \quad \vec{a}_C = 0 \;\Rightarrow\; V = const, V = 0 \; (V_0 = 0)$$

3) то же самое справедливо, если рассматривать движение механической системы относительно любой оси.

Если нешние силы, действующие на механическую систему таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.

($\sum \vec{F}_{ix} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0$).

$$\vec{a}_{CX} * M = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}_{CX} = 0 \;\Rightarrow\; V_{CX} = const$$

Следствия из теоремы подтверждаются следующими примерами:

Центр масс искусственного спутника земли не меняет характер своего движения при выходе космонавта в открытый космос.

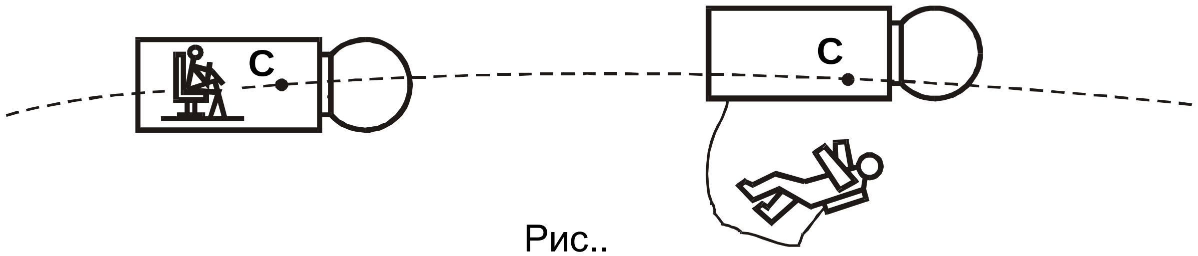


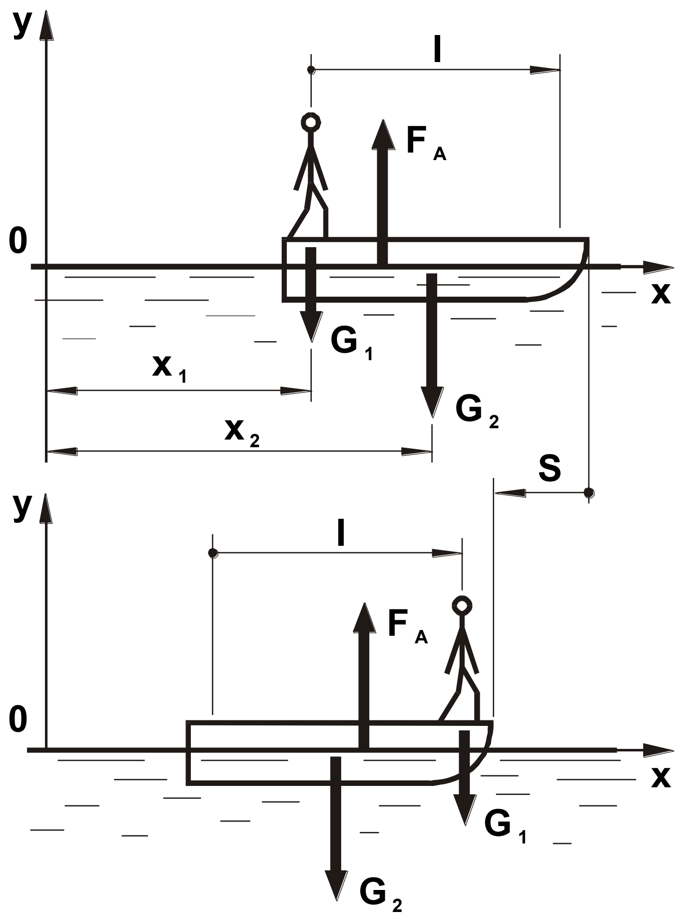
Рис..

2. При отсутствии трения человек не может перемещаться по совершенно гладкой поверхности.

3. Силы, действующие на колеса автомобиля со стороны двигателя, не могут привести его в движение. Движение осуществляется только при появлении внешних сил - сил сцепления (F*сц*).

Решение задач

Условие задачи. Человек весом G_1 стоит на корме лодки весом G_2 и длинной l, находящейся в покое в стоячей воде. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, расстояние S, на которое переместится лодка, если человек перейдет на нос лодки.



Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из человека и лодки, на которую действуют: силы тяжести G_1, G_2 и сила Архимеда F_A, выталкивающая лодку из воды.

На основании теоремы о движении центра масс имеем:

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_A$$

Так как все силы вертикальны, то в проекции на ось x записанное выражение примет вид

$$M \cdot \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0.$$

Дважды интегрируя полученное дифференциальное уравнение будем иметь:

$$\dot{x}_C = C_1,$$

$$x_C = C_1 \cdot \mathrm{t} + C_2.$$

При условии, что в начальный момент времени (t=0) скорость центра масс системы равна нулю ($\dot{x}_C = 0$), а координата x_C центра масс определяется некоторой величиной A (x_C=A), получаем: C_1=0, C_2=A, и, следовательно,

$$x_C = A = const$$

Иными словами, в процессе движения человека по лодке, координата x_C своего значения менять не будет, и перемещение человека будет компенсироваться обратным перемещением лодки.

Выражения, определяющие координату x_C центра масс системы до и после перемещений человека и лодки, соответственно, будут иметь вид:

$$x_C = \frac{G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2}{G_1 + G_2}; \; x_C = \frac{G_1 \cdot (x_1 + l - S) + G_2 \cdot (x_2 - S)}{G_1 + G_2}.$$

Приравняв правые части последних выражений, получим:

$$\frac{G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1 \cdot (x_1 + l - S) + G_2 \cdot (x_2 - S)}{G_1 + G_2} \Rightarrow 0 = G_1 \cdot l - G_1 \cdot S - G_2 \cdot S,$$

откуда

$$S = \frac{G_1 \cdot l}{G_1 + G_2}.$$

.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ, МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Общие теоремы динамики являются следствиями системы дифференциальных уравнений движения точки или системы материальных точек. Они оперируют обобщенными характеристиками движения системы, помогая глубже раскрыть природу механической системы.

Понятие количество движения

Одной из мер механического движения точки или системы является количество движения.

Количество движения материальной точки - это вектор, имеющий направление вектора скорости и равный произведению массы точки на ее скорость:

$$q = m \cdot \vec{v}\ .$$

Проекции количества движения на декартовы оси координат:

$$q_x = m \cdot v_x\ ;$$

$$q_y = m \cdot v_y\ ;$$

$$q_z = m \cdot v_z\ .$$

Количество движения механической системы – вектор, равный сумме векторов количеств движений всех точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum q_i\ .$$

Упростим эту формулу:

$$\vec{Q} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = \left| \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right| = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \cdot \vec{r}_i\ ;$$

величина $\sum m_i \cdot \vec{r}_i = M \cdot \vec{r}_C$, поэтому

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M \cdot \vec{r}_C) = M \cdot \frac{d\vec{r}_C}{dt}\ ;$$

с учетом того, что $\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C$, окончательно получим

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C\ .$$

Количество движения механической системы есть вектор, равный произведению массы системы на скорость центра масс данной механической системы.

Заметим, что вектор Q подобно главному вектору сил в статике, является некоторой обобщенной векторной характеристикой движения всей механической системы. Если при движении системы центр масс неподвижен, то количество движения будет равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, рано нулю.

Понятие импульса силы

Импульс силы характеризует меру передачи движения. Т.е. действие силы $\vec{F}$ на материальную точку в течение времени dt можно охарактеризовать так называемым **элементарным импульсом силы** - $d\vec{S} = \vec{F}dt$. При этом собственно полный **импульс силы** – это векторная величина, определяемая по формуле

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt ,$$

где t_0 и t – соответственно начальное и конечное значения времени действия силы $\vec{F}$.

Направление импульса $\vec{S}$ силы совпадает с направлением самой силы $\vec{F}$.

Если сила $\vec{F} = const$, то импульс силы - $\vec{S} = \vec{F} \cdot (t - t_0)$.

Проекции импульса силы на декартовы оси координат:

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt ; \; S_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt ; \; S_z = \int_{t_0}^{t} F_z dt .$$

Пусть главный вектор $\vec{R}_Г$ некоторой системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_m$:

$$\vec{R}_Г = \sum \vec{F}_k .$$

Тогда импульс главного вектора определится следующим образом:

$$\vec{S}_Г = \int_{t_0}^{t} \vec{R}_Г dt = \int_{t_0}^{t} (\sum \vec{F}_k) dt = \sum \int_{t_0}^{t} \vec{F}_k dt .$$

Обозначив $\int_{t_0}^{t} \vec{F}_k dt = \vec{S}_k$, получим

$$\vec{S}_{\Gamma} = \sum \vec{S}_k \ .$$

Т.е. импульс главного вектора равен сумме импульсов составляющих сил.

Последнее утверждение справедливо и для равнодействующей.

Теорема об изменении количества движения материальной точки

Преобразуем основное уравнение динамики материальной точки следующим образом:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_k \; ; \; m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k \; ; \; \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k \; ;$$

$$\frac{dq}{dt} = \sum \vec{F}_k \; .$$

Производная по времени от количества движения материальной точки равна равнодействующей сил, действующих на точку.

Данное утверждение - это теорема об изменении количества движения материальной точки в **дифференциальной форме**.

В проекциях на декартовы оси координат имеем:

$$\frac{dq_x}{dt} = \sum F_{kx} \; ; \; \frac{dq_y}{dt} = \sum F_{ky} \; ; \; \frac{dq_z}{dt} = \sum F_{kz} \; .$$

Получим выражение теоремы об изменении количества движения материальной точки в другой (**интегральной форме**)

Преобразуем выражение $\frac{dq}{dt} = \sum \vec{F}_k$, приняв, что $\sum \vec{F}_k = \vec{R}$:

$$dq = \vec{R} \cdot dt \; ; \qquad \int_{q_0}^{q} dq = \int_{t_0}^{t} \vec{R} \cdot dt$$; Тогда

$$\vec{q} - \vec{q}_0 = \vec{S} \; .$$

Изменение $\vec{q} - \vec{q}_0$ количества движения материальной точки за некоторый промежуток t-t_0 времени равно импульсу $\vec{S}$ равнодействующей сил, действующих на точку за тот же промежуток времени

В проекциях на декартовы оси координат имеем:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x \; ; \qquad Q_y - Q_{0y} = S_y \; ; \; Q_z - Q_{0z} = S_z \; .$$

Теорема об изменении количества движения механической системы

Аналогично тому, как для одной материальной точки, выведем теорему об изменении количества движения для системы в различных формах.

Преобразуем уравнение (теорема о движении цента масс механической системы)

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_Г^E$$

следующим образом:

$$M \cdot \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{R}_Г^E; \; \frac{d(\vec{v}_C \cdot M)}{dt} = \vec{R}_Г^E; \; \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_Г^E.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: **производная от количества движения механической системы по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на систему**.

В проекциях на декартовы оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \vec{R}_{Гx}^E; \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \vec{R}_{Гy}^E; \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \vec{R}_{Гy}^E.$$

Беря интегралы от обеих частей последних уравнений по времени, получим теорему об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: **изменение количества движения механической системы равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на систему**.

Т.е.

$$\vec{Q}_x - \vec{Q}_{0x} = \vec{S}_Г^E.$$

Или в проекциях на декартовы оси координат:

$$Q_x - Q_{0x} = S_{Гx}^E; \qquad Q_y - Q_{0y} = S_{Гy}^E; \qquad Q_z - Q_{0z} = S_{Гz}^E.$$

Следствия из теоремы (законы сохранения количества движения)

Закон сохранения количества движения получаются как частные случаи теоремы об изменении количества движения для системы в зависимости от особенностей системы внешних сил. Внутренние силы могут быть любыми, так как они не влияют на изменения количества движения.

Возможны два случая:

1. Если векторная сумма всех внешних сил, приложенных к системе, равна нулю $\vec{R}_{\Gamma}^{E} = 0$, то количество движения системы постоянно по величине и направлению $\vec{Q} = const$

2. Если равна нулю проекция главного вектора внешних сил на какую либо координатную ось $R_{\Gamma x}^{E} = 0$ и/или $R_{\Gamma y}^{E} = 0$ и/или $R_{\Gamma z}^{E} = 0$, то проекция количества движения на эти же оси является величиной постоянной, т.е. $Q_x = const$ и/или $Q_y = const$ и/или $Q_z = const$ соответственно.

Аналогичные записи можно сделать и для материальной точки и для материальной точки.

Пример 1.

Условие задачи. Из орудия, масса которого *M*, вылетает в горизонтальном направлении снаряд массы *m* со скоростью *v*. Найти скорость *V* орудия после выстрела.

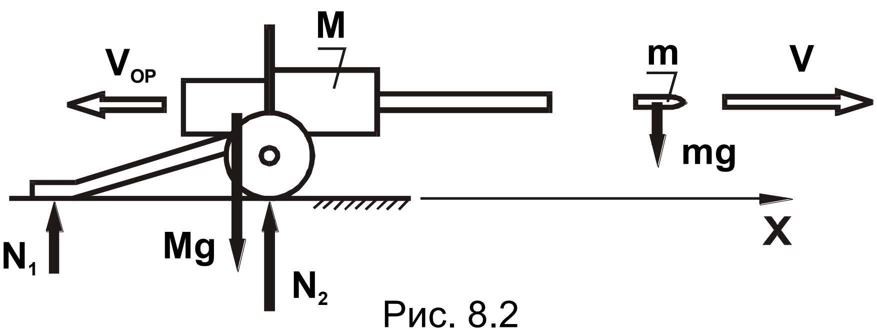


Рис. 8.2

Решение. Все внешние силы, действующие на механическую систему орудие-снаряд, вертикальны. Значит, на основании следствия из теоремы об изменении количества движения системы, имеем: $Q_x = const$.

Количество движения механической системы до выстрела: $Q_{0x} = 0$

Количество движения механической системы после выстрела:

$$Q_x = M \cdot V + m \cdot v.$$

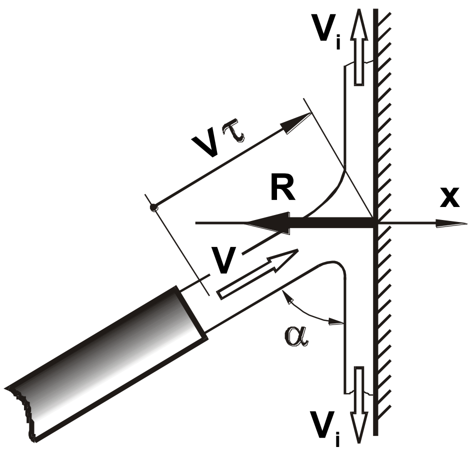
Приравнивая правые части выражений, получим, что

$$V = -\frac{m}{M} \cdot v.$$

Знак «-» в полученной формуле указывает на то, что после выстрела орудие откатится в направлении, противоположном оси *Ox*.

ПРИМЕР 2. Струя жидкости плотностью ρ вытекает со скоростью V из трубы с площадью поперечного сечения F и ударяется под углом α о вертикальную стенку. Определить давление жидкости на стену.

РЕШЕНИЕ. Применим теорему об изменении количества движения в интегральной форме к объему жидкости массой *m* ударяющемуся о стену за некоторый промежуток времени *t*.



$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{R}\tau$$

$$Q_{2x} - Q_{1x} = R\tau$$

$$Q_{1x} = mV\sin\alpha =$$

$$= \underbrace{\rho F V \tau}_{m} V \sin\alpha = \rho F V^2 \tau \sin\alpha$$

$Q_{2x} = 0$, так как $\vec{V}_i \perp x$

Таким образом

$$\rho F V^2 \tau \sin\alpha = -R\tau$$

$$\boxed{R = \rho F V^2 \sin\alpha}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Кинетический момент материальной точки

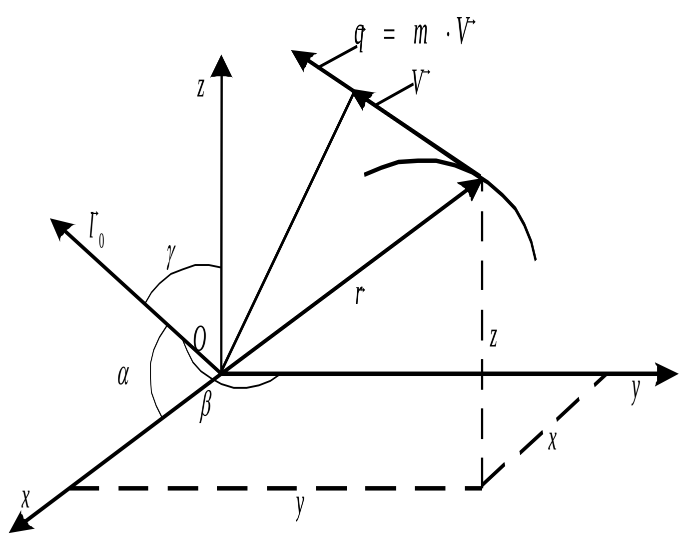
В некоторых задачах наряду с количеством движения в качестве векторной меры движения рассматривают момент количества движения (кинетический момент) относительно некоторого центра или оси. Эти моменты определяются аналогично тому, как определялись моменты силы.

Для материальной точки массой m , движущейся со скоростью V, кинетическим моментом точки относительно некоторого центра O называется векторная величина, определяемая равенством $\vec{l}_0 = \vec{r} \times m * \vec{V} = \vec{r} \times \vec{q}$

где $\vec{r}$ - радиус вектор движущейся точки, приведенной из центра O.

Вектор момента количества движения точки перпендикулярен плоскости, в которой расположены вектора $\vec{r}$ и $\vec{q}$. α, β, γ - углы между l_0 и осями x, y, z.

Векторная запись для определения кинетического момента, выраженная через единичные орты, имеет следующий вид $\vec{l}_0 = l_{0_X} * \vec{i} + l_{0_Y} * \vec{j} + l_{0_Z} * \vec{k}$.



Другие виды векторного выражения для определения кинетического момента можно получить исходя из исходной формулы для расчета кинетического момента

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m*\vec{V} = (x*\vec{i} + y*\vec{j} + z*\vec{k}) \times (m*V_X*\vec{i} + m*V_Y*\vec{j} + m*V_Z*\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m*V_X & m*V_Y & m*V_Z \end{vmatrix}$$

Аналитические выражения проекций вектора момента количества движения относительно центра O на координатные оси.

$$l_{0_X} = y*m*V_Z - z*m*V_Y$$

$$l_{0_X} = z*m*V_X - x*m*V_Z$$

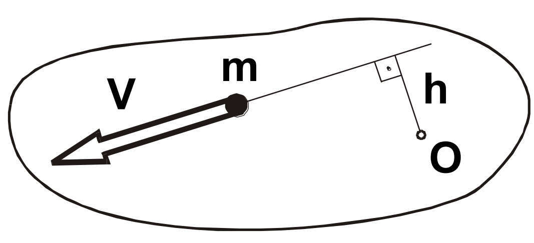
$$l_{0_X} = x*m*V_Y - y*m*V_X$$

Где x, y, z –координаты движущейся точки, V_x, V_y, V_z-проекции скоростей точки на координатные оси.

$$l_0 = \sqrt{{l_{0_X}}^2 + {l_{0_Y}}^2 + {l_{0_Z}}^2} \quad cos\,\alpha = \frac{l_{0_X}}{l_0}; \quad cos\,\beta = \frac{l_{0_Y}}{l_0}; \quad cos\,\gamma = \frac{l_{0_Z}}{l_0}$$

При движении точки в плоскости её кинетический момент может быть определен как алгебраическая величина:

$$l_0 = m*V*h;$$



В системе единиц СИ модуль момента количества движения измеряется

$$[l_0] = кг\frac{м^2}{с}$$

Кинетический момент механической системы

Определим кинетический момент механической системы. Для каждой из точек механической системы имеем векторы количества движения $\mathrm{m}_1 V_{1,} m_2 V_2 .... m_n V_n$. Относительно неподвижного центра О можем найти векторы-моменты количеств движения каждой из точек по формуле

$$\vec{l}_{i0} = \vec{r}_i \times m_i * \vec{V}_i = \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

Главный момент количества движения материальных точек механической системы относительно центра O является кинематическим моментом системы и определится как геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

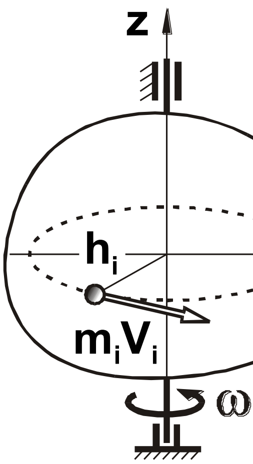
$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{V}_i \times \vec{r}_i \ .$$

Проекции вектора $\vec{L}_0$ на координатные оси будут являться моментами количества движения системы относительно координатных осей:

$$L_X = \sum y_i * m_i * V_{i_Z} - \sum z_i * m_i * V_{i_Y}$$
$$L_Y = \sum z_i * m_i * V_{i_X} - \sum x_i * m_i * V_{i_Z}$$
$$L_Z = \sum x_i * m_i * V_{i_Y} - \sum y_i * m_i * V_{i_X}$$

Кинетический момент вращающегося тела

Определим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью w.



$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i h_i = \left[V_i = \omega h_i \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega h_i h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \omega h_i^2 = \omega \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2}_{I_z} = \omega I_z$$

$$\boxed{L_z = I_z \omega}$$

Кинетический момент твердого тела вращающегося вокруг неподвижной оси равен произведению осевого момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость тела.

Знак кинетического момента относительно оси совпадает с знаком угловой скорости вращения тела относительно этой оси: при вращении против хода часовой стрелки (глядя с конца оси) кинетический момент положительный, при вращении по ходу часовой стрелки – отрицательный.

Отметим, что подобно тому, как количество движения механической системы является характеристикой ее поступательного движения, так кинетический момент является характеристикой ее вращательного движения.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.

Установим, как изменится со временем вектор кинетического момента движущейся материальной точки l_0 массой *m*. Для этого продифференцируем по времени выражение

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m * \vec{V}$$

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m * \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m * \vec{V} + \frac{d(m * \vec{V})}{dt} \times \vec{r} =$$

$$\vec{V} \times m * \vec{V} + \vec{a} * m \times \vec{r} = \vec{F} \times \vec{r} = \vec{M}_0^{(F)}$$

Окончательно получим

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0^{(F)} .$$

Последнее уравнение выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра: **производная от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O* по времени равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра.**

Проектируя обе части полученного равенства на координатные оси, получим

$$\frac{dl_X}{dt} = \sum M_X , \frac{dl_Y}{dt} = \sum M_Y , \frac{dl_Z}{dt} = \sum M_Z$$

Эти равенства выражают теорему об изменении кинетического момента относительно координатных осей

Следствия из теоремы:

1. Если сумма моментов сил, действующих на точку относительно некоторого центра O в некоторое время равнялось 0, то момент количества движения точки в это время остается постоянным:

$$\sum \vec{M}_0^{(F)} = 0 \Rightarrow \vec{l}_0 = const.$$

Если на точку в это время действовали силы, то они называются центральными, так как линии их действия все время пересекали центр О.

2. Если сумма моментов сил, действующих на точку относительно какой-либо из неподвижных осей равен 0, то момент количества движения точки относительно этой оси остается постоянным

$$\sum M_X = 0 \Rightarrow l_X = const$$

$$\sum M_Y = 0 \Rightarrow l_Y = const$$

$$\sum M_Z = 0 \Rightarrow l_Z = const$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Пусть система материальных точек m_1, m_2, ..., m_n движется под действием сил, которые разделим на внешние P_1, P_2, ..., Pn и внутренние P_1, P_2, ..., P_n.

Для каждой, отдельно взятой точки, можно применить теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \vec{M}_{iO}^{E} + \vec{M}_{iO}^{I}, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Просуммируем полученные *n* уравнений и сделаем соответствующие преобразования (см. блок-схему):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO}^{E} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO}^{I}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO}^{E} = \vec{M}_{ГO}^{E}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{iO} = \frac{d\vec{L}_{O}}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO}^{I} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_{O}}{dt} = \vec{M}_{ГO}^{E}$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента для системы: **производная по времени вектора кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра**.

В проекции на оси координат теорема примет следующий вид:

$$\frac{dL_X}{dt} = M_{ГX}^{E}, \quad \frac{dL_Y}{dt} = M_{ГY}^{E}, \quad \frac{dL_Z}{dt} = M_{ГZ}^{E}.$$

Следствия из теоремы:

1. Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы

2. Если главный момент внешних сил, действующих на систему относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра есть величина постоянная по величине и направлению.

$$\vec{M}^E_{гO} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = const$$

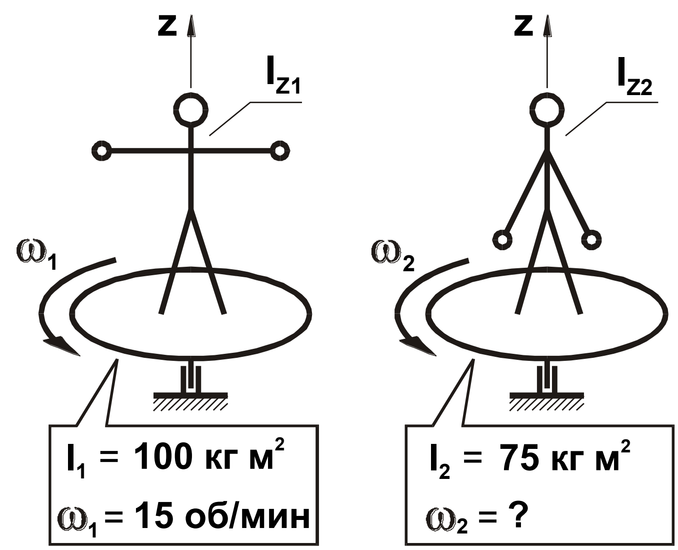
3. Если главный момент внешних сил, действующих на систему относительно некоторой неподвижной оси (например, оси z) равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси в процессе движения системы остается постоянным.

$$M^E_{гz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = const$$

Второе и третье следствия называют **закономъ сохранения кинетического момента.**

Приведем два примера, демонстрирующих закон сохранения кинетического момента.

Пример 1. Человек, стоящий на вращающемся диске. Так, момент внешних сил, действующих на систему человек-диск, относительно оси вращения диска, равен нулю. Поэтому, человек, изменяя положение рук по отношению к туловищу, может изменить скорость своего вращения без приложения внешних сил, т.е. за счет изменения осевого момент инерции своего тела.



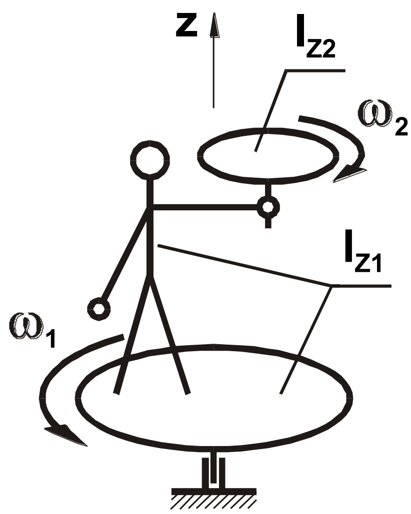
Кинетический момент системы, при изменении положения рук, остается неизменным

$$M_{rz}^{E} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = I_z \omega = const$$

$$I_{Z1}\omega_1 = I_{Z2}\omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_{Z1}}{I_{Z2}} = 15 \frac{100}{75} = 20 \text{ об/мин}$$

Пример 2. Для поворота человека на диске, без использования внешних сил, человеку необходимо вращать находящийся у него в руках обруч:



$$M^E_{rz} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = const$$

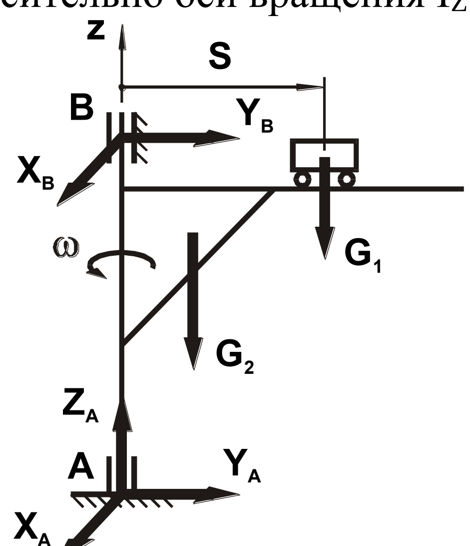
Если при $t = 0$, $L_z = 0$, то:

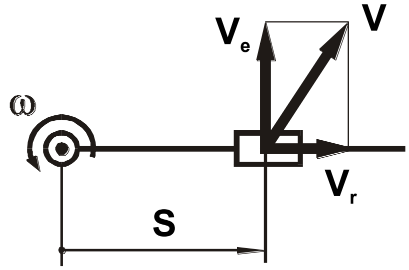
$$I_{z1}\omega_1 + I_{z2}\omega_2 = 0$$

Скорости диска и обруча будут связаны зависимостью:

$$\omega_1 = -\omega_2 \frac{I_{Z2}}{I_{Z1}}$$

ПРИМЕР 3. По стреле подъемного крана, вращающегося со скоростью w_O =1рад/с, начинает двигаться тележка массой m=100 кг. Определить, как измениться скорость крана, если тележка переместиться по стреле с расстояния S_1=2 м на расстояние S_2=6 м от оси вращения крана. Осевой момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения I_Z=2000 кг м^2.





РЕШЕНИЕ. Действующие на кран с тележкой внешние силы, момента относительно оси вращения крана не создают, следовательно:

$$M^E_{rz} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = const$$

$$L_Z = L_{Z\,КРАН} + L_{Z\,ТЕЛЕЖКА}$$

$$L_{Z\,КРАН} = I_Z\omega$$

$$L_{Z\,ТЕЛЕЖКА} = m\underbrace{V_e}_{\omega S}S = m\omega SS = m\omega S^2$$

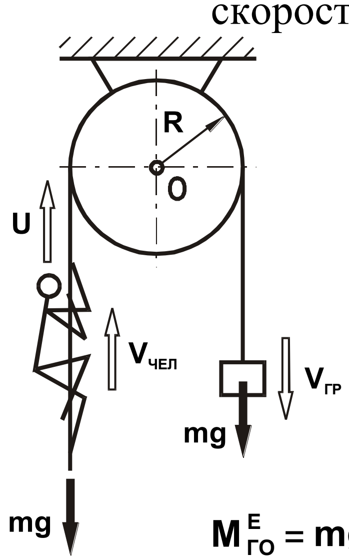
$$L_Z = I_Z\omega + m\omega S^2 = \omega(I_Z + mS^2)$$

$$L_Z(S_1) = L_Z(S_2)$$

$$\omega_o(I_Z + mS_1^2) = \omega(I_Z + mS_2^2)$$

$$\omega = \omega_o\frac{I_Z + mS_1^2}{I_Z + mS_2^2} = 1\frac{2000 + 100\cdot 2^2}{2000 + 100\cdot 6^2} = $$
$$= 0{,}43\ рад/с$$

ПРИМЕР 4. Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат. С одной стороны за канат ухватился человек, с другой стороны к канату подвязан груз одинаковой массы с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью U относительно каната?



РЕШЕНИЕ..

$$M^E_{ГО} = mgR - mgR = 0 \Rightarrow \frac{dL_O}{dt} = 0 \Rightarrow L_O = const$$

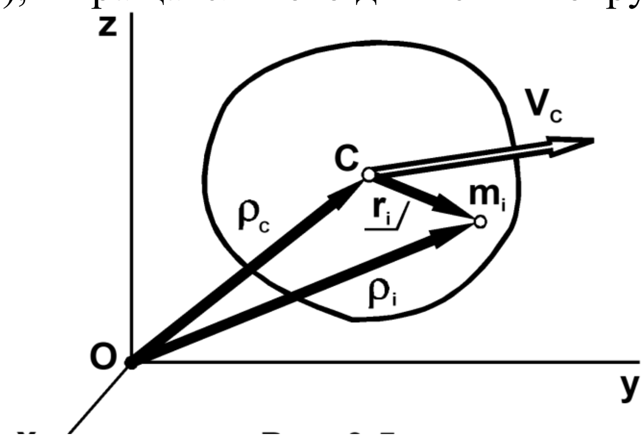
$$L_O = mV_{чел}R + mV_{гр}R = \left[V_{чел} = V_{гр} + U\right] =$$
$$= m(V_{гр}+U)R + mV_{гр}R$$

Так как при $t=0$ $L_O=0$, то $m(V_{гр}+U)R + mV_{гр}R = 0$

Откуда: $V_{гр} + V_{гр} + U = 0 \Rightarrow \boxed{V_{гр} = -0{,}5\,U}$

Теорема о зависимости кинетических моментов в относительном движении.

Движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторой точкой, принимаемой в качестве полюса (в качестве полюса может быть выбрана точка центра масс), и вращательного движения вокруг этого полюса.



Теорема о зависимости кинетических моментов в относительном движении звучит следующим образом: **кинетический момент системы относительно центра *O* равен сумме векторного произведения главного вектора количества движения на радиус-вектор центра масс и кинетического момента тела в относительном движении относительно центра масс.**

Докажем данную теорему.

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_C + \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_{ir} \quad \Rightarrow \quad m_i\vec{V}_i = m_i\vec{V}_C + m_i\vec{V}_{ir}$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{V}_i == \sum_{i=1}^{n} (\vec{\rho}_C + \vec{r}_i) \times (m_i\vec{V}_C + m_i\vec{V}_{ir}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_C \times m_i\vec{V}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_C \times m_i\vec{V}_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_C + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_{ir}$$

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_C \times m_i\vec{V}_C = \vec{\rho}_C \times \vec{V}_C \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{\rho}_C \times M\vec{V}_C$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_C \times m_i\vec{V}_{ir} = \vec{\rho}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_{ir} = \vec{\rho}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\rho}_C \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i =$$

$$= \vec{\rho}_C \times \frac{d}{dt}(M\vec{r}_C) = 0, \text{ так как } \vec{r}_C = 0$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i \times \vec{V}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i \times \vec{V}_C = M\vec{r}_C \times \vec{V}_C = 0, \text{ так как } \vec{r}_C = 0$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_{ir} = \vec{L}_{Cr}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{\rho}_C \times M\vec{V}_C + \vec{L}_{cr}}$$

Т.е. последняя формула показывает, что кинетический момент системы относительно неподвижной точки О равен векторной сумме кинетического момента центра масс относительно указанной точки О, если бы в центре масс была сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы для относительного движения системы по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно с центром масс.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы в её относительном движении по отношению к центру масс

Ранее была рассмотрена теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной системы координат

Если же за центр (или ось), относительно которой определяется кинетический момент, выбирается движущаяся точка, то запись теоремы будет иметь другой вид. Для вывода данной теоремы воспользуемся ранее полученным выражением для определения кинетического момента в относительном движении:

$$\vec{L}_O = \vec{\rho}_C \times M\vec{V}_C + \vec{L}_{cr}$$

Продифференцируем приведенное выражение:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\rho}_C \times M\vec{V}_C + \vec{L}_{cr}) = \frac{d\vec{\rho}_C}{dt} \times M\vec{V}_C + \vec{\rho}_C \times M\frac{d\vec{V}_C}{dt} + \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt} =$$

$$= \underbrace{\vec{V}_C \times M\vec{V}_C}_{=0} + \vec{\rho}_C \times \underbrace{M\vec{a}_C}_{=\vec{R}^E_\Gamma} + \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt} = \vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma + \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt}$$

\

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma + \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt}$$

с другой стороны:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}^E_{\Gamma O} \Rightarrow \underbrace{\left[\vec{M}^E_{\Gamma O} = \vec{M}^E_{\Gamma C} + \vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma\right]}_{\text{Известно из статики}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}^E_{\Gamma C} + \vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma$$

Приравниваем правые части полученных выражений:

$$\vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma + \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt} = \vec{M}^E_{\Gamma C} + \vec{\rho}_C \times \vec{R}^E_\Gamma \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{cr}}{dt} = \vec{M}^E_{\Gamma O}}$$

Таким образом, теорема об изменении кинетического момента механической системы в её относительном движении по отношению к центру масс звучит следующим образом.

Производная по времени от вектора кинетического момента системы относительно центра масс в её относительном движении по отношению к этому центру равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно центра масс.

Из теоремы следует, что при сложном движении, движение механической системы относительно центра масс происходит так же, как если бы последний был неподвижен.

Примерами действия закона сохранения кинетического момента по отношению к подвижному центру масс, являются:

- изменение скорости вращения спортсмена при прыжках в воду, когда он группируется вокруг центра масс;
- поворот туловища космонавта при вращении руками;
- стабилизация вращения и поворот находящегося на орбите космического аппарата с помощью вращающегося маховичка;
- поворот кошки лапами вниз во время падения;
- способность собаки, действуя хвостом, быстро поворачиваться огибая, деревья.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия материальной точки

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, численно равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Единица измерения кинетической энергии – джоуль (1 ДЖ=1 Нм= 1 кг*м^2/с^2.

Кинетическая энергия механической системы

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий составляющих ее точек.

$$T = \sum T_i \quad \text{или} \quad T = \frac{\sum m_i \cdot v_i^2}{2}$$

Так как механические системы состоят из материальных точек и материальных тел определим формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при различных видах его движения.

При поступательном движении тела все его точки движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс и выше приведенная формула для расчета кинетической энергии системы при указанном виде движения примет вид

$$\mathrm{T} = \sum \mathrm{T_i} = \sum \mathrm{m_i} \cdot \frac{\mathrm{v_C^2}}{2} = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{v_C^2}}{2},$$

где $v_C = v_i$ – скорость центра масс твердого тела; $M = \sum m_i$.

Кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

В этом случае кинетическая энергия вычисляется также, как и для одной точки, масса которой равна массе всего тела.

Кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг центра масс.

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}$$

где

ω - угловая скорость плоскопараллельного движения,

v_C - причем скорость центра масс равна.

$\mathrm{J_C}$ - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельной мгновенной оси вращения

Если механическая система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна **сумме кинетических энергий этих тел**.

При движении тела изменяется его кинетическая энергия. Это изменение зависит от характеристик действия силы, называемых мощностью и работой силы. Поэтому ниже будут рассмотрены понятия работы и мощности.

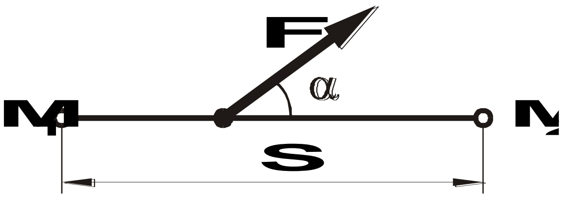
Работа силы

Работа силы характеризует эффект действия силы на перемещении точки ее приложения, вызванном действием этой силы.

Работа A постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$, действующей на прямолинейном перемещении $\vec{s}$ материальной точки, есть произведение модуля F силы, модуля s перемещения и косинуса угла α между векторами силы и перемещения.

Т.е.

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha. \quad A = F \cdot M_1 M_2 \cdot \cos\alpha.$$



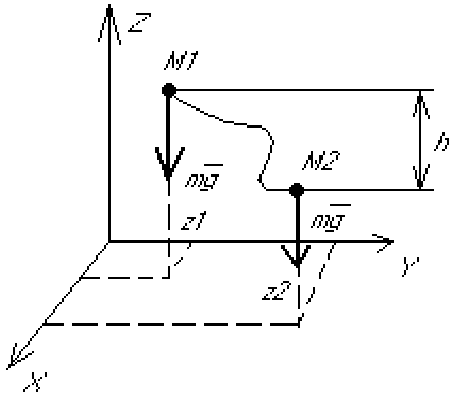
Работа силы положительна, если угол α острый, отрицательна – если угол α тупой и равна нулю – если угол $\alpha=90°$. В последнем случае вектор силы перпендикулярен вектору перемещения.

Единицей измерения работы в системе СИ является 1 Джоуль (1 Дж).

Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

Пусть при движении тела его центр тяжести, перемещаясь по некоторой криволинейной траектории, перешел из положения *M1* в положение *M2*.



Обозначим разность координат z_1-z_2 высотой h:

$A=m\cdot g\cdot h$.

По виду полученной формулы можно сделать следующие выводы:

1) работа силы тяжести не зависит от траектории точки;

2) если под действием силы тяжести материальная точка опускается, то работа силы тяжести положительна, если поднимается – отрицательна.

Работа силы упругости

Если x_1=0, то $A=-\dfrac{c\cdot h^2}{2}$, где h=x_2 – удлинение (укорочение) пружины.

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости пружины на квадрат перемещения ее точки приложения, отсчитываемой от положения точки при недеформированном состоянии указанной пружины.

Работа силы трения скольжения

При скольжении тела по шероховатой поверхности на него действует сила трения $F_{тр}=fN$

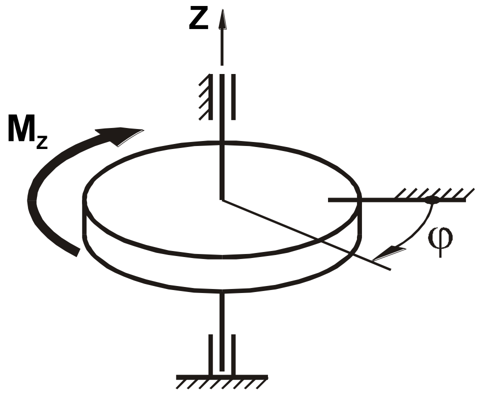
Направления силы трения противоположно перемещению точки, следовательно, угол между силой трения и перемещением точки равен 180^0

Тогда используя выше полученные формулы для определения работы получим

$$A(F_{тр})=-\int_{M1}^{M2} fNds$$

Работа момента силы

Пусть на тело действует вращающий момент M_z



$$A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\cdot d\varphi$$

Если момент имеет постоянное по величине и направлению значение, то последняя формула примет вид

$$A=M_z(\varphi_2-\varphi_1)=M_z\Delta\varphi$$

Работа момента, приложенного к вращающемуся телу определится как произведение этого момента на угол поворота тела, вызванного действием этого момента.

Следует выделить довольно часто встречающийся в задачах случай, это работа момента, возникающего при качении тела по плоскости. В полученную выше формулу для расчета работы момента необходимо подставить значение момента сопротивления качению определяемого следующим образом

$$M_к = \delta N,$$

где δ - коэффициент трения качения, N- нормальная реакция

Если модуль нормальной реакции N постоянен, и учитывая, что $d\varphi = ds_c / R$,то работа сил сопротивления качению определится

$$A = -(\delta / R) N s_c,$$

где *R*- радиус катящегося катка, s_c -перемещение центра катка

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

$$T - T_0 = \sum A_k \ .$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I \ .$$

Изменение кинетической энергии системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил, произведенной ими на перемещениях точек системы за этот промежуток времени.

Если механическая система является неизменяемой, т.е. такая механическая система, в которой расстояние между любыми двумя точками остается во все время постоянным. Для данной системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Тогда выражение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы запишется следующим образом:

$$T - T_0 = \sum A_i^E$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно определить:

1) скорости точек или тел (линейные или угловые) системы в начальном (или конечном положении), если можно вычислить работу всех приложенных к ней сил;

2) работу сил, действующих на точку, когда известны скорости точки в начальном и конечном положениях.