

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.1. Закон Кулона

Электростатика – раздел учения об электричестве, в котором изучаются взаимодействия и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно инерциальных систем отсчета (ИСО).

Существуют два рода электрических зарядов – *положительные* и *отрицательные*. Силы взаимодействия неподвижных тел или частиц, обусловленные электрическими зарядами этих тел или частиц называются *электростатическими силами*. Разноименно заряженные тела притягиваются, а одноименно заряженные тела отталкиваются друг друга.

Точечный заряд – заряженное тело, форма и размеры которого несущественны в условиях данной задачи.

В 1914 г. Милликен экспериментально доказал, что электрический заряд любой системы тел состоит из целого числа N элементарных зарядов, приблизительно равных $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $q = \pm Ne$. Единица заряда в СИ – кулон (Кл).

Для электрически изолированной системы справедлив *закон сохранения электрического заряда*: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов, был установлен Кулоном в 1785 г.

Закон Кулона в системе СИ может быть выражен следующей формулой:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (1.1)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности; r – расстояние между зарядами; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м (фарад на метр) – электрическая постоянная. Полезно помнить, что коэффициент пропорциональности $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Формула (1.1) может быть записана в векторном виде:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.2)$$

где \vec{r} - вектор, направленный к тому из зарядов, к которому приложена сила (рис. 1.1).

Следует отметить, что закон Кулона справедлив для точечных зарядов, а также для заряженных шаров и сфер. В остальных случаях сила взаимодействия тел находится с помощью интегрирования.

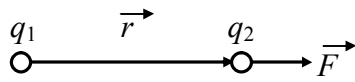


Рис. 1.1. Закон Кулона

Для характеристики непрерывного распределения зарядов вдоль некоторой линии, по некоторой поверхности или по некоторому объему вводится понятие о плотности заряда.

Линейная плотность заряда – это величина, показывающая какой заряд приходится на единицу длины заряженного тела $[\tau] = \text{Кл/м}$:

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (1.3)$$

Поверхностная плотность заряда – это величина, показывающая какой заряд приходится на единицу площади заряженного тела $[\sigma] = \text{Кл/м}^2$:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (1.4)$$

Объемная плотность заряда – это величина, показывающая какой заряд приходится на единицу объема заряженного тела $[\rho] = \text{Кл/м}^3$:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.5)$$

Если заряды распределены равномерно, то формулы (1.3) – (1.5) записывают в виде: $\tau = \frac{q}{l}$, $\sigma = \frac{q}{S}$, $\rho = \frac{q}{V}$.

1.2. Электростатическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между зарядами осуществляется через *электростатическое поле*, которое является частным случаем *электрического поля*. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем электростатическое поле. Это поле проявляет себя в том, что на заряд, помещенный в

какую-либо точку поля, действует сила. Чтобы выяснить, имеется ли в данной точке электростатическое поле, нужно поместить туда заряженное тело (пробный заряд) и установить, действует ли на него сила.

Пробный заряд обладает следующими свойствами: 1) это положительный точечный заряд; 2) это настолько малый заряд, что его величина не изменяет положение окружающих зарядов.

Помещая в точку пространства различные по величине пробные заряды, мы обнаружим, что отношение силы, действующей на заряд со стороны поля, к величине заряда есть величина постоянная, не зависящая от заряда, вносимого в

поле: $\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \text{const}$. Эта величина принимается в качестве основной силовой

характеристики электростатического поля.

Напряженностью электростатического поля \vec{E} называется физическая величина, равная отношению силы действующей на заряд, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.6)$$

Напряженность поля – вектор, направление которого совпадает с направлением силы, действующей на единичный положительный заряд, а модуль равен величине этой силы.

Единицей напряженности в системе СИ является ньютон на кулон (Н/Кл) или вольт на метр (В/м). Как следует из формул (1.2) и (1.6), напряженность поля точечного заряда равна

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где q – заряд, создающий электростатическое поле.

Для модуля напряженности справедлива формула

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (1.7)$$

1.3. Линии напряженности электростатического поля

Электростатическое поле можно изобразить графически с помощью силовых линий.

Силовой линией (линией напряженности) электростатического поля называется линия, касательная к которой в данной точке совпадает с направлением вектора напряженности, причем густота линий пропорциональна напряженности поля в данной области. Таким образом, по картине силовых линий можно судить о направлении и величине поля.

Линии напряженности поля точечного заряда – это прямые, начинающиеся на положительном заряде и уходящие в бесконечность (рис. 1.2, а) или начинающиеся в бесконечности и заканчивающиеся на отрицательном заряде (рис. 1.2, б).

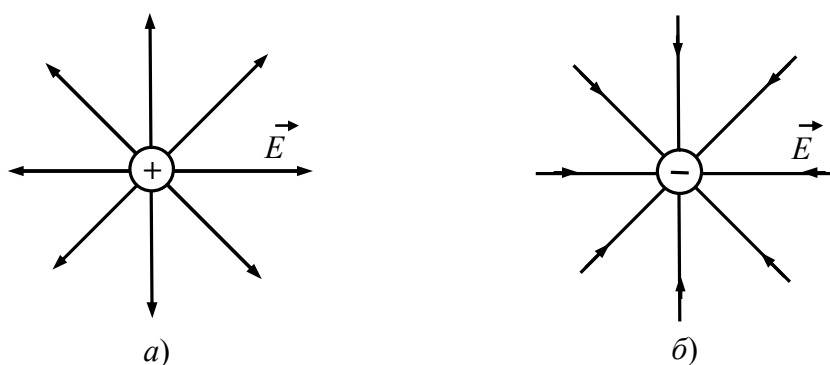


Рис. 1.2. Линии напряженности электростатического поля точечных зарядов

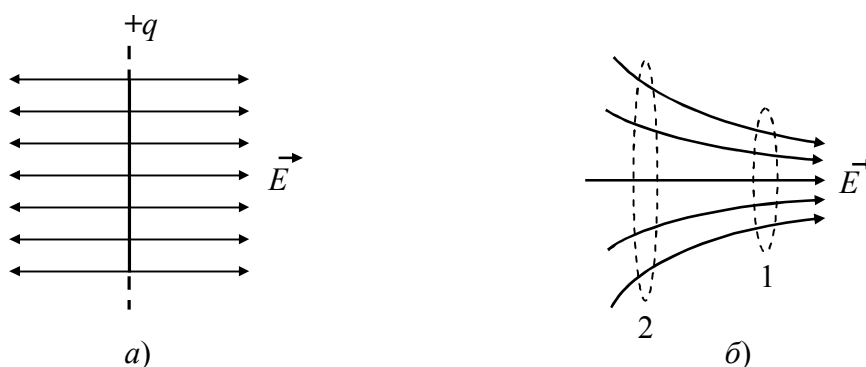


Рис. 1.3. Линии напряженности электростатического поля: а) – однородное поле, б) – неоднородное поле; напряженность в области 1 больше, чем напряженность в области 2

Поле называется *однородным*, если величина и направление вектора напряженности не зависит от координат пространства ($\vec{E} = \text{const}$). Силовые линии однородного поля – эквидистантные параллельные прямые. Например, поле

создаваемое бесконечной заряженной плоскостью (рис. 1.3, а), является однородным, а поле, показанное на рис. 1.3, б таковым не является.

1.4. Принцип суперпозиции для напряженности электростатического поля

Если электростатическое поле создано системой точечных зарядов, то напряженность поля можно определить по *принципу суперпозиции для напряженности: напряженность электростатического поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.*

Математически принцип суперпозиции выражается формулой:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.8)$$

На рис. 1.4 показано, как направлен вектор напряженности электростатического поля в точке A , по принципу суперпозиции, для систем двух одинаковых по величине зарядов.

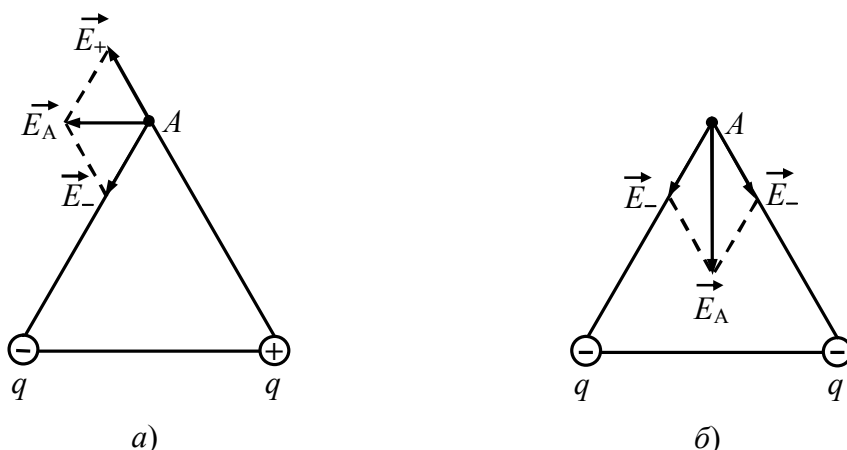


Рис. 1.4. Направление вектора напряженности электростатического поля в точке A . Точка A и заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника: а) система двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов; б) система двух отрицательных зарядов

Если заряды распределены непрерывно, то принцип суперпозиции (1.8) записывают в интегральном виде:

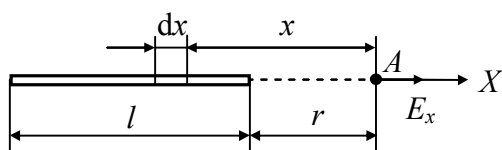
$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (1.9)$$

где $d\vec{E}$ – напряженность поля, создаваемого малым зарядом dq . Интегрирование производится по всем непрерывно распределенным зарядам.

Принцип суперпозиции, записанный в интегральном виде, позволяет найти силу взаимодействия или напряженность поля произвольного распределения зарядов.

В качестве примера определим напряженность электростатического поля на оси тонкого равномерно заряженного стержня.

Пусть стержень длиной l несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью τ . Найдем напряженность E , создаваемую этим зарядом в



точке, удаленной от ближайшего конца стержня на расстояние r .

Рис. 1.5. Напряженность поля на оси тонкого заряженного стержня

Заряд, равномерно распределенный по стержню, не является точечным, поэтому непосредственно вычислить напряженность

поля по формуле (1.7) невозможно. Разобьем стержень на столь малые элементы, чтобы каждый из них можно было принять за материальную точку, и рассмотрим один такой элемент длины dx (рис. 1.5). Заряд $dq = \tau dx$, находящийся на рассматриваемом элементе, можно считать точечным, и по формуле (1.7) найдем напряженность в точке A , создаваемую зарядом dq :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

где x – расстояние от элемента dx до точки A .

Напряженность поля в точке A представляет собой геометрическую сумму полей, создаваемых бесконечно малыми элементами dx стержня. Так как все векторы dE направлены вдоль оси стержня X , то векторное сложение заменяется алгебраическим суммированием. Согласно принципу суперпозиции (1.9)

$$E = \int dE = \int_r^{r+l} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_r^{r+l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{l}{r(r+l)} \right). \quad (1.10)$$

Если расстояние $r \gg l$, то формулу (1.10) можно записать в виде

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

где $q = \tau l$.

Мы пришли к формуле напряженности поля точечного заряда (1.7). Итак, если расстояние до точки во много раз больше линейных размеров нити, то заряженную нить можно рассматривать как точечный заряд.

1.5. Электрический диполь. Поле диполя

Электрическим диполем называется система двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, расстояние между которыми l много меньше расстояния до точки, в которой исследуется поле (рис. 1.6).

Прямая, проходящая через оба заряда, называется *осью диполя*. Найдем напряженность поля на оси диполя, а также на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярно к его оси. Положение точек на этих прямых будем характеризовать их расстоянием r от центра диполя. В соответствии с определением диполя должно выполняться условие: $r \gg l$.

Поле в каждой точке будет представлять собой суперпозицию полей \vec{E}_+ и \vec{E}_- , создаваемых зарядами q_+ и q_- . На оси диполя векторы \vec{E}_+ и \vec{E}_- направлены в противоположные стороны. Поэтому результирующая напряженность $\vec{E}_{||}$ будет равна по модулю разности модулей \vec{E}_+ и \vec{E}_- :

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{q}{(r+l/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{[r^2 - (l/2)^2]^2}.$$

Пренебрегая в знаменателе $l/2$ по сравнению с r , получаем

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3},$$

где $p = ql$ – электрический момент диполя. Отметим, что электрический момент диполя следует рассматривать как вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному заряду.

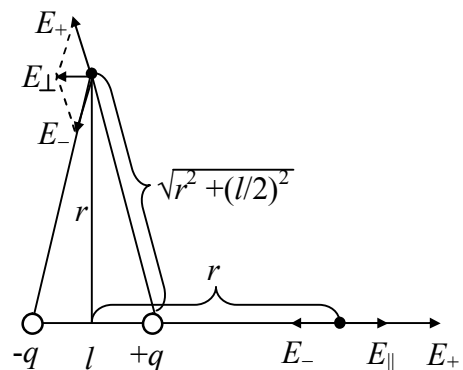


Рис. 1.6. Напряженность поля диполя

Для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной к оси, векторы \vec{E}_+ и \vec{E}_- имеют одинаковые модули, равные

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + (l/2)^2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Из подобия треугольников, опирающихся на отрезок l и на вектор \vec{E}_\perp , следует, что

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} \approx \frac{l}{r},$$

откуда получается формула

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

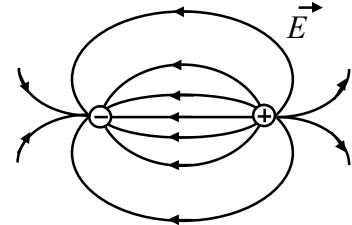


Рис. 1.7. Поле диполя

Характерным для поля диполя является то, что его напряженность определяется не величиной образующих диполь зарядов, а электрическим моментом диполя $p = ql$. С расстоянием от диполя напряженность поля убывает как $1/r^3$, т.е. значительно быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (убывающая как $1/r^2$). Линии напряженности поля диполя показаны на рис. 1.7.

1.6. Работа сил электростатического поля

Пусть электростатическое поле создано положительным точечным зарядом q . В любой точке этого поля на пробный заряд $q_{\text{пр}}$ (рис. 1.8) действует переменная по величине и направлению сила Кулона. Найдем работу, совершаемую силами поля по перемещению заряда $q_{\text{пр}}$ из точки 1 в точку 2.

Работа переменной силы определяется интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F dl \cos \alpha. \quad (1.11)$$

По закону Кулона сила $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, а

$dl \cdot \cos = dr$ (рис. 1.8), тогда формулу (1.11)

можно представить в виде:

$$A_{12} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.12)$$

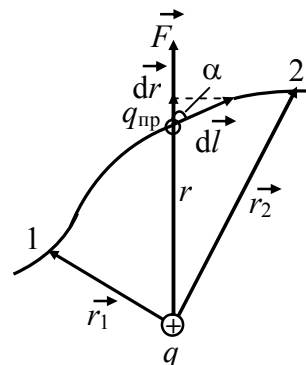


Рис. 1.8. Перемещение заряда $q_{\text{пр}}$ из точки 1 в точку 2 в поле заряда q

Из формулы (1.12) видно, что работа сил электростатического поля не зависит от формы и длины траектории, а определяется начальным r_1 и конечным

r_2 положениями заряда $q_{\text{пр}}$. Силы, производящие такую работу называются *потенциальными* (или *консервативными*). Работа консервативных сил на замкнутом пути всегда равно нулю:

$$\oint_l \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

Поделим обе части этого уравнения на величину заряда q :

$$\oint_l \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l} = 0,$$

или

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) называют *циркуляцией вектора \vec{E} по замкнутому контуру*.

Таким образом, для электростатического поля циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю. Это утверждение называют *теоремой о циркуляции вектора \vec{E}* .

1.7. Потенциал и разность потенциалов

Из механики известно, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r_2}.$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда $q_{\text{пр}}$ в поле заряда q получаем

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r_1} + \text{const}.$$

Значение const вбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r}. \quad (1.14)$$

Если уравнение (1.14) разделить на $q_{\text{пр}}$, то получим физическую величину, которая характеризует только поле и не зависит от величины пробного заряда.

Физическая величина, равная отношению потенциальной энергии заряда к величине заряда, называется *потенциалом поля* в данной точке:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.15)$$

Потенциал является энергетической характеристикой поля и величиной скалярной. Он численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд. *Единицей потенциала* в системе СИ является вольт (В).

Из формул (1.14) и (1.15) следует, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Если поле создается системой точечных зарядов, то потенциал поля можно определить по *принципу суперпозиции для потенциала: потенциал электростатического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:*

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Когда заряды распределены непрерывно, то принцип суперпозиции для потенциала записывают в интегральном виде

$$\varphi = \int d\varphi,$$

где $d\varphi$ – потенциал поля, создаваемого малым зарядом dq . Интегрирование производится по всем непрерывно распределенным зарядам.

Из соотношения (1.15) вытекает, что $W_p = q\varphi$, следовательно, работа сил поля над зарядом $q_{\text{пр}}$ может быть выражена через разность потенциалов

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2) = q_{\text{пр}}\Delta\varphi,$$

откуда следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}}.$$

Таким образом, *разность потенциалов между двумя точками поля, представляет собой физическую величину, равную отношению работы по перемещению заряда между этими точками к величине заряда*. Разность потенциалов, как и потенциал в системе СИ измеряется в вольтах. 1 В – это разность потенциалов между такими точками поля, при перемещении между которыми заряда в 1 Кл силы поля совершают работу в 1 Дж.

1.8. Связь между напряженностью поля и разностью потенциалов.

Эквипотенциальные поверхности

Между разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и напряженностью E электростатического поля существует зависимость

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_1 - W_2}{q} = \frac{\Delta W}{q} = -\frac{A_{12}}{q} = -\frac{F\Delta l}{q},$$

откуда следует, что

$$\Delta\varphi = -E\Delta l \quad (1.16)$$

и

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}, \quad (1.17)$$

где Δl – расстояние между точками 1 и 2, не зависящее от пути перемещения заряда из одной точки в другую.

Формулы (1.16) и (1.17) позволяют рассчитать разность потенциалов и напряженность в однородном электростатическом поле. В случае неоднородного поля эти формулы записываются в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl$$

и

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (1.18)$$

соответственно, где E_x, E_y, E_z – проекции вектора напряженности на оси координат.

Представим вектор \vec{E} через компоненты

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = - \text{grad } \varphi. \quad (1.19)$$

Выражение в скобках называют *градиентом потенциала*. Согласно формуле (1.19) *напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала, взятому со знаком минус*. Эта формула позволяет рассчитать напряженность поля в данной точке, если известен потенциал поля как функция координат.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\varphi(x, y, z) = a(xy^2 + z^3)$, где постоянная $a = 2 \text{ В/м}^3$. Требуется найти модуль вектора напряженности электрического поля E в точке с координатами $x_1 = 1 \text{ м}$, $y_1 = 2 \text{ м}$, $z_1 = 3 \text{ м}$.

Решение.

По формулам (1.18) найдем значения проекций вектора \vec{E} на оси координат:

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ay^2, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2axy, \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -3az^2.$$

Модуль вектора \vec{E} в данной точке равен

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = a\sqrt{(y^2)^2 + (2xy)^2 + (3z^2)^2} = 2\sqrt{16 + 16} = 729 \approx 55 \text{ В/м}.$$

В электрическом поле, в разных его точках потенциалы, как правило, имеют разные значения. Однако можно выделить

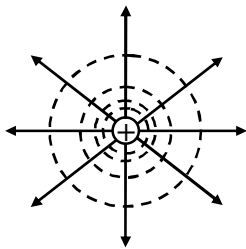


Рис. 1.9. Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда (пунктирные линии)

точки с одинаковыми потенциалами. Поверхность, проходящая через эти точки, называется *эквипотенциальной*. Эквипотенциальная поверхность любой конфигурации (сферическая, цилиндрическая, плоская) всегда перпендикулярна к линиям напряженности электростатического поля в точке

их пересечения. Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Обычно их проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота

эквипотенциальных поверхностей характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, потенциал изменяется быстрее при перемещении вдоль нормали к поверхности. Следовательно, тем больше в данном месте напряженность поля.

На рис. 1.9 показаны сечения эквипотенциальных поверхностей поля положительного точечного заряда (пунктирные линии). Линии напряженности (сплошные линии) пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом.

1.9. Электростатическая теорема Гаусса.

Выделим в однородном электростатическом поле площадку S , которую пронизывают линии вектора \vec{E} . *Потоком вектора напряженности* через пло-

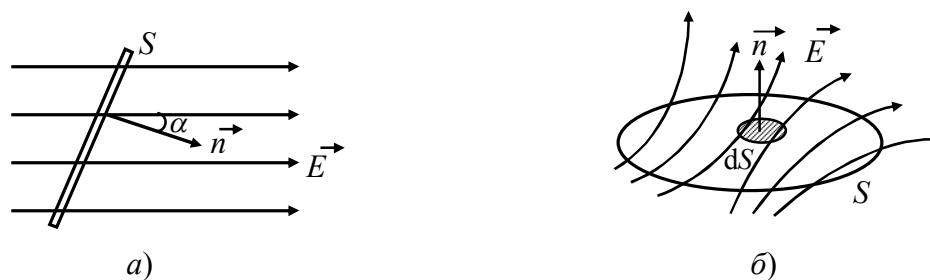


Рис. 1.10. Поток вектора \vec{E} через площадку S : а) однородное поле; б) неоднородное поле
 щадку S называется физическая величина Φ , равная произведению модуля вектора напряженности электростатического поля E на величину площадки и на косинус угла α между нормалью к площадке \vec{n} и вектором \vec{E} (рис. 1.10, а).

В соответствии с этим определением

$$\Phi = ES \cos \alpha = E_n S,$$

где E_n – перпендикулярная площадке S составляющая напряженности электростатического поля.

Для неоднородного электрического поля (рис. 1.10 б) площадку S делят на элементарные бесконечно малые площадки dS , для каждой из которых поле можно считать однородным. Тогда элементарный поток вектора напряженности $d\Phi$ равен

$$d\Phi = E_n dS.$$

Для определения полного потока вектора напряженности сквозь всю площадку элементарные потоки суммируют (интегрируют) по всей площади:

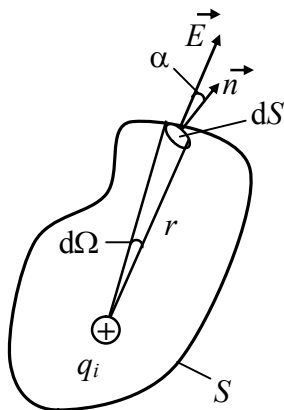


Рис.1.11. Поток вектора напряженности для поля точечного заряда через произвольную замкнутую поверхность S

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.20)$$

Здесь $\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E \cos \alpha dS$ – скалярное произведение вектора \vec{E} и вектора площади $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Если поверхность, сквозь которую протекает поток, является замкнутой, (например, сферической), то выражения для потока (1.20) записывают

в виде

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S E_n dS. \quad (1.21)$$

Кружок у интеграла (1.21) означает, что интегрирование производят по замкнутой поверхности.

Поток вектора напряженности Φ – скалярная алгебраическая величина. Знак потока зависит от выбора нормали к поверхности. Если поток направлен в сторону нормали, то он считается положительным, если поток направлен против нормали, то он берется со знаком минус. Когда линии напряженности скользят по поверхности, не пронизывая ее, поток равен нулю. В системе СИ поток вектора напряженности измеряется в вольт-метрах (В·м).

Подсчитаем поток вектора напряженности \vec{E} для поля одного точечного заряда q_i , находящегося внутри произвольной замкнутой поверхности S (рис. 1.11). Выделим на поверхности элемент dS , находящийся на расстоянии r от заряда. Пусть заряд q_i положительный. Тогда поток вектора \vec{E} сквозь элемент dS :

$$d\Phi = E_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

где $d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \alpha$ – малый телесный угол, опирающийся на элемент dS .

Интегрируя полученное выражение по всему телесному углу (в пределах от 0 до 4π), получим

$$\Phi = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q_i}{\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

Если электрическое поле создается системой m точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_m , находящихся внутри замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности можно записать следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S (E_{1n} + E_{2n} + \dots + E_{mn}) dS = \oint_S E_{1n} dS + \oint_S E_{2n} dS + \dots + \oint_S E_{mn} dS.$$

Согласно (1.22), $\oint_S E_{1n} dS = \frac{q_1}{\epsilon_0}$, $\oint_S E_{2n} dS = \frac{q_2}{\epsilon_0}$, $\oint_S E_{mn} dS = \frac{q_m}{\epsilon_0}$. Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_m}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^m q_i}{\epsilon_0}, \quad (1.23)$$

где m – число точечных зарядов.

Формула (1.23) представляет собой теорему Гаусса. *Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .*

Если заряды расположены по объему тела с объемной плотностью заряда ρ , то теорема Гаусса (1.23) принимает вид

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0}. \quad (1.24)$$

Когда заряд q находится вне замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности электростатического поля через нее равен нулю.

1.10. Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей

Пользуясь теоремой Гаусса можно рассчитать поля различных электростатических систем, обладающих симметрией.

Поле бесконечной заряженной плоскости. Пусть поле создается бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ .

Из условия симметрии следует, что силовые линии вектора напряженности параллельны друг другу и перпендикулярны заряженной пластине.

Выделим цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями ΔS , расположенными симметрично относительно плоскости (рис. 1.12, а). Поток вектора \vec{E} сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, а поток через его основания будет $E \cdot 2\Delta S$, т.е.

$$\oint_S E_n dS = E \cdot 2\Delta S.$$

Заряд, заключенный внутри цилиндра, равен $\sigma\Delta S$. В соответствии с формулой (1.23):

$$E \cdot 2\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0},$$

отсюда

$$E_{пл} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра. Таким образом, на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине.

Поле бесконечной заряженной плоскости является однородным полем.

Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, лишь направление вектора \vec{E} и линий напряженности изменится на обратное.

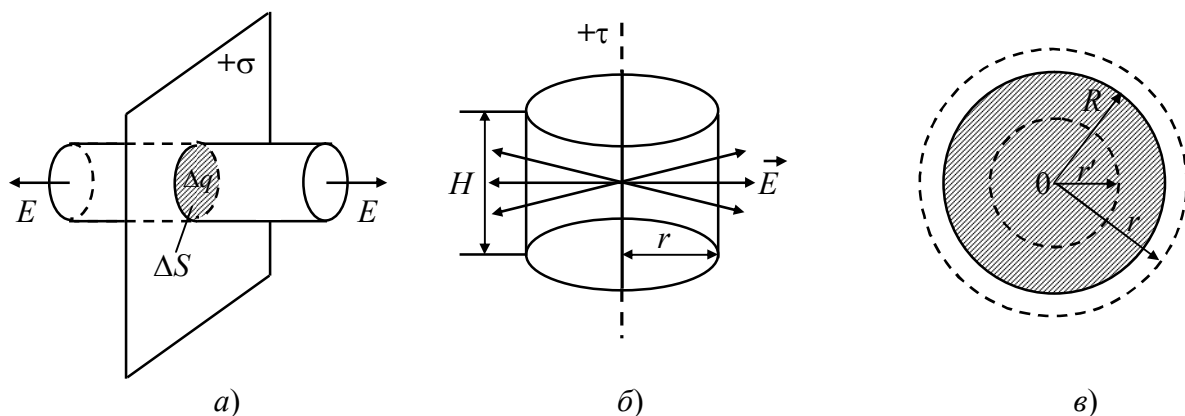


Рис. 1.12. (а) Поле бесконечной заряженной плоскости; (б) поле бесконечной заряженной нити; (в) шар, заряженный с объемной плотностью заряда ρ

Поле бесконечной заряженной нити. Рассмотрим поле, создаваемое бесконечной нитью, заряженной с линейной плотностью заряда τ . Напряженность поля в любой точке направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к проводу (рис. 1.12, б).

Выделим соосную с заряженной нитью замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты H . Поток через основания этого цилиндра равен нулю, т.к. линии вектора напряженности основания не пересекают. Следовательно, поток вектора напряженности через цилиндрическую поверхность равен потоку вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра:

$$\oint_S E_n dS = E \cdot 2\pi r H .$$

Внутри цилиндрической поверхности заключен заряд $\Delta q = \tau \cdot H$. По теореме Гаусса должно выполняться условие

$$E \cdot 2\pi r H = \frac{\tau H}{\epsilon_0} ,$$

откуда следует, что

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} . \quad (1.25)$$

Согласно формуле (1.25) напряженность поля бесконечно длинной заряженной нити обратно пропорциональна расстоянию от нити до точки, где требуется найти напряженность.

Поле равномерно заряженного шара. Пусть заряд распределен равномерно в вакууме по объему шара радиуса R с объемной плотностью заряда ρ . Проведем концентрическую с заряженным шаром замкнутую сферическую поверхность произвольного радиуса r , где r – текущая координата (рис. 1.12, в).

Пусть $r \geq R$ (точка расположена на поверхности шара или вне шара). Поток вектора напряженности равен

$$\oint_S E_n dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 .$$

По теореме Гаусса (1.24) должно выполняться равенство

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3\epsilon_0},$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем шара. Откуда следует, что

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}. \quad (1.26)$$

В соответствии с формулой (1.26) напряженность поля вне заряженного шара подобна полю точечного заряда, т.е. убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r .

Для точек на поверхности шара $r = R$ и

$$E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}. \quad (1.27)$$

Потенциал поля равен

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + c.$$

Так как потенциал на бесконечности $\varphi = 0$, то $c = 0$ и

$$\varphi = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (1.28)$$

На поверхности шара потенциал равен

$$\varphi(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}. \quad (1.29)$$

Пусть $r < R$ (точка расположена внутри шара). Концентрическая сферическая поверхность в этом случае проведена внутри шара. Поток вектора напряженности равен

$$\oint_S E_n dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2,$$

где r – радиус сферической поверхности (штрих у r мы опустили).

Найдем заряд q' , заключенный внутри сферической поверхности. В данном случае это будет заряд, находящийся в объеме части шара V' , который ограничен сферической поверхностью:

$$q' = \int_V \rho dV' = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

По теореме Гаусса должно выполняться равенство $E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$,

или

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \quad (1.30)$$

Из формулы (1.30) видно, что напряженность поля равномерно заряженного шара растет с увеличением расстояния от центра по линейному закону.

Найдем потенциал поля внутри шара:

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + c_1.$$

Постоянную c_1 определим из условия, что потенциал на поверхности шара равен (1.29):

$$c_1 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0},$$

тогда потенциал внутри шара равен

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (R^2 - r^2). \quad (1.31)$$

Графики зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$, построенные на основании формул (1.26), (1.27), (1.30) и (1.28), (1.29), (1.31) показаны на рис. 1.13 а, б.

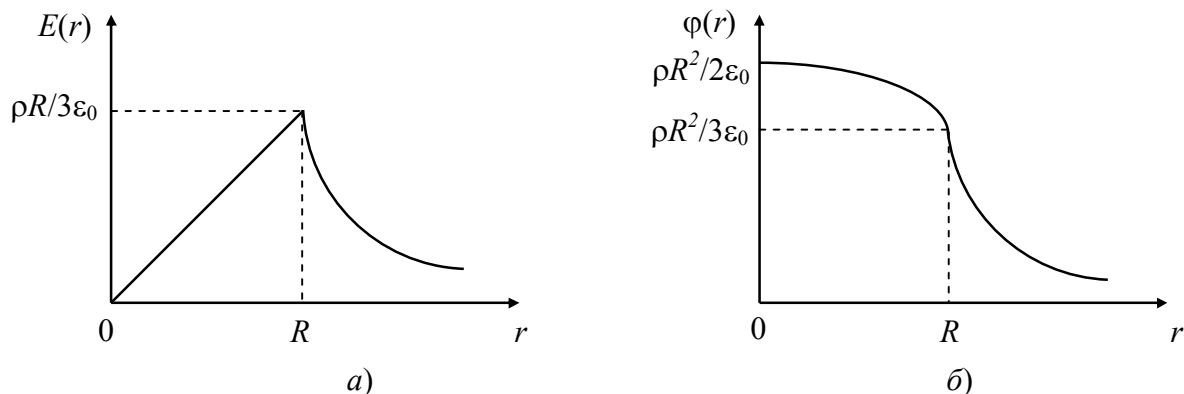


Рис. 1.13. Зависимости напряженности поля (а) и потенциала (б) от расстояния r от центра заряженного шара

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

2.1. Полярные и неполярные диэлектрики

Диэлектрики это вещества, не проводящие электрический ток. Диэлектрики состоят из нейтральных в целом атомов или молекул. Электрические заряды атомов или молекул в диэлектрике не могут свободно перемещаться под действием электрического поля по всему объему вещества.

Электрическое поле может существовать внутри диэлектрика и при этом диэлектрик оказывает на него определенное влияние, т.е. создает свое собственное электрическое поле.

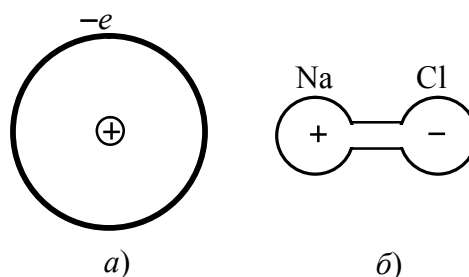


Рис. 2.1. Атом водорода (а), молекула NaCl (б)

Диэлектрики бывают двух видов: *полярные* и *неполярные*.

Рассмотрим, например, строение атома водорода (рис. 2.1). Положительный заряд ядра атома находится в центре атома. Электрон движется с большой скоростью и один оборот делает за время $\approx 10^{-15}$ с. Поэтому заряд электрона как бы «размазывается» по орбите и центр его распределения приходится на середину атома, т.е. совпадает с положительным зарядом ядра.

Диэлектрики, состоящие из молекул, у которых центры положительных и отрицательных зарядов совпадают, называются *неполярными диэлектриками*.

К неполярным диэлектрикам относятся инертные газы, кислород, водород, полиэтилен и др.

Под действием внешнего электрического поля центры распределения положительных и отрицательных зарядов смещаются, и молекула становится подобной электрическому диполью с упругой связью между зарядами.

Рассмотрим теперь молекулу NaCl. Атом натрия имеет один валентный электрон. У хлора семь валентных электронов. При образовании молекулы валентный электрон натрия захватывается хлором. Оба нейтральных атома превращаются в систему из двух ионов с зарядами противоположных знаков и не

совпадающими центрами распределения положительных и отрицательных зарядов (рис. 2.2).

Диэлектрики, состоящие из молекул, у которых центры положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга, называются *полярными диэлектриками*.

К полярным диэлектрикам относятся спирты, вода, NaCl и др.

Полярные диэлектрики подобны электрическим диполям с жесткой связью между зарядами.

Поскольку молекулы по электрическим свойствам эквивалентны диполям, рассмотрим, как ведет себя диполь во внешнем электрическом поле.

2.2. Диполь в электрическом поле

В однородном электрическом поле (рис. 2.2) диполь находится под действием момента сил, равного

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha, \quad (2.1)$$

где $p = ql$ – электрический момент диполя.

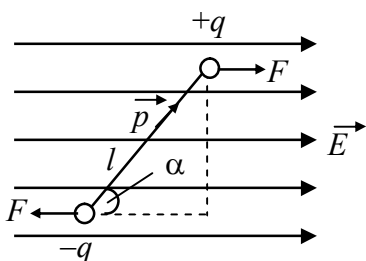


Рис. 2.2 Диполь в однородном электрическом поле

Формула (2.1) может быть написана в виде векторного произведения

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.2)$$

Момент (2.2) стремится установить диполь так, чтобы его момент \vec{p} был направлен по направлению поля. Это будет равновесное положение диполя.

Чтобы увеличить угол между векторами \vec{p} и \vec{E} на малую величину $d\alpha$, нужно совершить работу, против сил поля, действующих на диполь:

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha.$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии W диполя

$$dW = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (2.3)$$

Интегрирование выражения (2.3) дает для энергии диполя в электрическом поле выражение

$$W = \int pE \sin \alpha d\alpha = -pE \cos \alpha + \text{const}.$$

Полагая $\text{const} = 0$, получаем

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p}\vec{E}.$$

Выбрав, таким образом, значение произвольной постоянной, мы полагаем энергию диполя $W_0 = 0$ в том случае, когда диполь устанавливается перпендикулярно к полю. Наименьшее значение энергии $W_{\min} = -pE$ получается при ориентации диполя по полю, наибольшее значение $W_{\max} = pE$ будет при ориентации диполя против вектора \vec{E} .

В неоднородном поле силы, действующие на заряды диполя не одинаковы по величине (рис. 2.3). Пусть поле быстрее всего изменяется в направлении оси X . Положительный заряд диполя смещен относительно отрицательного заряда в направлении X на величину $l \cdot \cos \alpha$. Поэтому напряженность поля в точках, где помещаются заряды, отличается на $\Delta E = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial E}{\partial x} l \cdot \cos \alpha$.

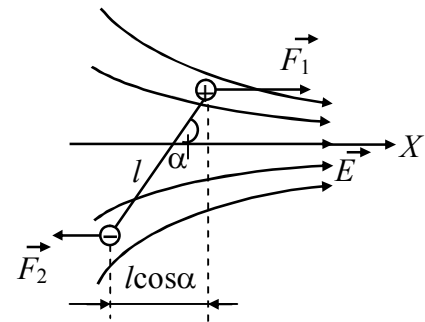


Рис. 2.3. Диполь в неоднородном электрическом поле

Следовательно, результирующая сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, действующих на диполь, не равна нулю. Проекция этой результирующей сил на ось X равна

$$F = q\Delta E = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cdot \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha. \quad (2.4)$$

Таким образом, в неоднородном электрическом поле на диполь кроме вращательного момента (2.2) действует сила (2.4). Под действием этой силы диполь будет либо втягиваться в область сильного поля (когда $\alpha < 90^\circ$), либо выталкиваться из нее (когда $\alpha > 90^\circ$).

2.3. Поляризация диэлектриков

Если диэлектрик поместить в электростатическое поле, то в нем происходит *поляризация атомов* (молекул), смещение разноименных зарядов в пределах атома или молекулы (рис. 2.4).

Поляризованный атом (молекула) представляет собой электрический диполь, в котором заряженные частицы сдвинуты относительно друг друга и оказываются связанными друг с другом. Смещение положительных зарядов происходит вдоль направления электрического поля, а отрицательных зарядов – в противоположном направлении. Внутри диэлектрика заряды компенсируются, а на поверхности возникает связанный поляризационный заряд. Напряженность поля, создаваемого внешними пластинами равна $E_1 = \sigma/\epsilon_0$; поле, обусловленное поляризационным зарядом $E_2 = \sigma'/\epsilon_0$, где σ' – поверхностная плотность поляризационного заряда ($\sigma' < \sigma$). Поскольку поля антипараллельны, то суммарное поле $E = E_1 - E_2$. Опыт показывает, что суммарное поле ослабляется в диэлектрике в ϵ раз, т.е. $E_1/E = \epsilon$. Величина, показывающая во сколько раз напряженность поля в вакууме больше напряженности поля в диэлектрике, называется *диэлектрической проницаемостью* ϵ . Итак,

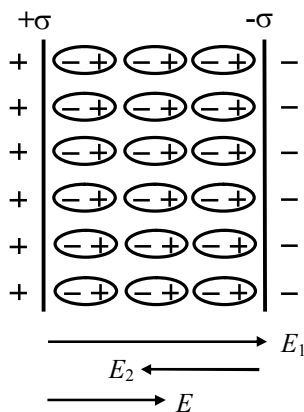


Рис. 2.4. Явление поляризации диэлектриков

Внутри диэлектрика заряды компенсируются, а на поверхности возникает связанный поляризационный заряд. Напряженность поля, создаваемого внешними пластинами равна $E_1 = \sigma/\epsilon_0$; поле, обусловленное поляризационным зарядом $E_2 = \sigma'/\epsilon_0$, где σ' – поверхностная плотность поляризационного заряда ($\sigma' < \sigma$). Поскольку поля антипараллельны, то суммарное поле $E = E_1 - E_2$. Опыт показывает, что суммарное поле ослабляется в диэлектрике в ϵ раз, т.е. $E_1/E = \epsilon$. Величина, показывающая во сколько раз напряженность поля в вакууме больше напряженности поля в диэлектрике, называется *диэлектрической проницаемостью* ϵ . Итак,

$$\frac{E_1}{E} = \frac{E + E_2}{E} = 1 + \frac{E_2}{E} = \epsilon.$$

Отношение напряженности поля поляризационного заряда E_2 к напряженности суммарного поля E называется диэлектрической восприимчивостью κ : $\kappa = E_2/E$. Следовательно, $\kappa = \epsilon - 1$. При расчете поля в среде, нужно в соответствующие формулы, определяющие поле в вакууме, ввести значение ϵ . Например:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{\epsilon r^2}, E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{\epsilon r^2}, \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}, E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}, E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Найдем связь между величинами σ и σ' :

$E = E_1 - E_2$. Так как $E_1 = \sigma/\epsilon_0$, $E_2 = \sigma'/\epsilon_0$ и $E = E_1/\epsilon = \sigma/\epsilon\epsilon_0$, то $\sigma/\epsilon\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 - \sigma'/\epsilon_0$.

Откуда следует, что

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma.$$

Поляризованность (или вектор поляризации) характеризует поляризацию единицы объема диэлектрика V :

$$\vec{P} = \frac{\sum_V \vec{p}_e}{V}, \quad (2.5)$$

где $\vec{p}_e = q\vec{l}$ – дипольный момент отдельной молекулы диэлектрика. $[\vec{P}] = \text{Кл/м}^2$.

Найдем связь между модулем вектора поляризации и поверхностной плотностью поляризационного заряда. Пусть расстояние между металлическими пластинами на рис. 2.4 равно d . Тогда объем диэлектрика, находящегося между пластинами, будет равен $V = d \cdot S$, где S – площадь пластины. Сумма всех дипольных моментов молекул диэлектрика (числитель формулы 2.5) будет определять поверхностную плотность поляризационного заряда σ' и складываться в суммарный дипольный момент $(\sigma' S) \cdot d$ т.е.

$$\left| \sum_V \vec{p}_e \right| = q \cdot d = \sigma' \cdot S \cdot d = \sigma' V \Rightarrow |\vec{P}| = \frac{\left| \sum_V \vec{p}_e \right|}{V} = \frac{\sigma' V}{V} = \sigma', \text{ т.е.}$$

$$|\vec{P}| = \sigma'. \quad (2.6)$$

Учитывая, что $\sigma' = \epsilon_0 E_2 = \epsilon_0 \kappa E$ формулу (2.6) можно записать в виде

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}. \quad (2.7)$$

Формула (2.6) дает связь между величиной поляризационного заряда и вектором поляризации \vec{P} , а формула (2.7) связывает вектор поляризации и напряженность электрического поля в диэлектрике.

2.4. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для потока вектора электрического смещения

Описание поля в диэлектриках упрощается, если ввести в рассмотрение физическую величину, называемую вектором электрического смещения. Вектор электрического смещения равен

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (2.8)$$

Единица электрического смещения в СИ $[\vec{D}] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.

Преобразуем формулу (2.8):

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \kappa)\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\kappa\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},$$

т.е.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) дает связь между вектором напряженности поля в диэлектрике и вектором поляризации.

Следует отметить, что линии вектора \vec{E} могут начинаться или оканчиваться как на зарядах, создающих внешнее поле (свободных зарядах), так и на связанных поляризационных зарядах. Линии же вектора \vec{D} начинаются и оканчиваются только на свободных зарядах. По этой причине *густота линий вектора \vec{D} не изменяется при переходе из одной среды в другую.*

Теорема Гаусса для потока вектора D . Теорема Гаусса для потока вектора \vec{E} в диэлектрике может быть записана в виде

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (2.10)$$

где $\sum_{i=1}^n q_i$ – алгебраическая сумма свободных зарядов. Пользуясь соотношением

(2.8) преобразуем формулу (2.10) к виду

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2.11)$$

где $\sum_{i=1}^n q_i$ – алгебраическая сумма свободных (не поляризационных) зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности и создающих поле в диэлектрике.

Если свободные заряды распределены внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью заряда ρ то формула (2.11) видоизменяется следующим образом:

$$\oint_S D_n dS = \int \rho dV. \quad (2.12)$$

Формулы (2.11) и (2.12) выражают теорему Гаусса для вектора электрического смещения: поток вектора электрического смещения через замкнутую

поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.

2.5. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим условия, которым удовлетворяют векторы напряженности электрического поля \vec{E} и электрического смещения \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков.

Пусть диэлектрическая проницаемость первого диэлектрика ϵ_1 , второго диэлектрика ϵ_2 . Обозначим E_1 – напряженность поля и D_1 – электрическое смещение в первом диэлектрике, E_2 и D_2 – напряженность поля и электрическое смещение соответственно во втором диэлектрике.

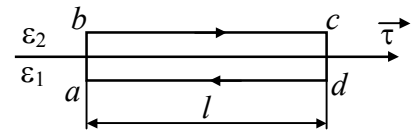


Рис. 2.5. Контур $abcd$. Стрелки показывают направление обхода

Выделим на границе раздела диэлектриков небольшой прямоугольный контур $abcd$ (рис. 2.5), в котором стороны ab и cd пренебрежимо малы по сравнению с l . Применим теорему о циркуляции вектора \vec{E} (1.13), считая вклад в циркуляцию на участках ab и cd пренебрежимо малыми:

$$-E_{\tau_1}l + E_{\tau_2}l = 0.$$

Поэтому

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}. \quad (2.13)$$

где E_{τ_1} и E_{τ_2} – проекции вектора \vec{E} на направление обхода контура $\vec{\tau}$, показанное на рис. 2.5 стрелками (по часовой стрелке).

Из уравнения (2.13) следует, что тангенциальные составляющие векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 одинаковы по обе границы раздела диэлектриков.

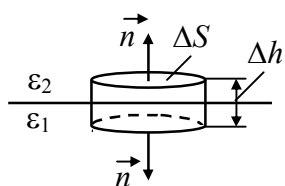
Заменив, согласно (2.8) проекции E_{τ_1} и E_{τ_2} проекциями вектора \vec{D} , деленными на $\epsilon\epsilon_0$, получим

$$\frac{D_{\tau_1}}{D_{\tau_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (2.14)$$

Выделим на границе раздела диэлектриков замкнутую цилиндрическую поверхность с малой высотой Δh и площадью основания ΔS (рис. 2.6).

Применим теорему Гаусса для потока вектора \vec{D} (2.11), считая, что сторонние заряды в выделенном объеме отсутствуют:

$$-D_{n1}\Delta S + D_{n2}\Delta S = 0.$$



Поэтому

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (2.15)$$

где D_{n1} и D_{n2} – проекции вектора \vec{D} на внешнюю нормаль \vec{n} . Поток вектора \vec{D} через боковую поверхность цилиндра ввиду малости пренебрегаем.

Рис. 2.6. Прямоугольный цилиндр малой высоты

Из уравнения (2.15) следует, что нормальные составляющие векторов \vec{D}_1 и \vec{D}_2 одинаковы.

Заменив, согласно (2.8) проекции D_{n1} и D_{n2} проекциями вектора \vec{E} , умноженными на $\epsilon\epsilon_0$, получим

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (2.16)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектриков тангенциальная составляющая вектора \vec{E} (E_τ) и нормальная составляющая вектора \vec{D} (D_n) непрерывны (не претерпевают скачок), а нормальная составляющая вектора \vec{E} (E_n) и тангенциальная составляющая вектора \vec{D} (D_τ) претерпевают скачок.

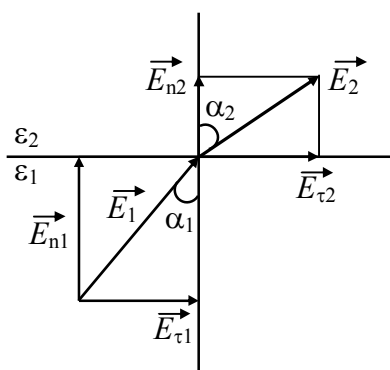


Рис. 2.7. Преломление линий вектора напряженности на границе раздела двух диэлектриков ($\epsilon_2 > \epsilon_1$)

Из условий (2.13) – (2.16) для составляющих векторов \vec{E} и \vec{D} следует, что линии этих векторов преломляются. Найдем связь между углами α_1 и α_2 (рис. 2.7). Согласно (2.13) и (2.16), $E_{\tau 2} = E_{\tau 1}$ и $\epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1}$. Разложим векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 у границы раздела

на тангенциальные и нормальные составляющие.

Из рис. 2.7 следует, что

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{\tau_2} / E_{n_2}}{E_{\tau_1} / E_{n_1}}.$$

Учитывая записанные выше условия, получим закон преломления линий напряженности \vec{E} (а значит, и линий смещения \vec{D}):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.17)$$

Формула (2.17) показывает, что, входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии \vec{E} и \vec{D} удаляются от нормали.

2.6. Теорема Гаусса в дифференциальном виде. Уравнения Пуассона и Лапласа

Поделим обе части уравнения (2.12) на величину объема V и устремим объем к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \rho dV. \quad (2.18)$$

Предел в левой части уравнения (2.18) представляет собой объемную производную, которая называется *дивергенцией вектора \vec{D}* ($\operatorname{div} \vec{D}$). Дивергенция показывает, какой поток вытекает из единичного объема, при условии, что объем стремится к нулю. Левую часть уравнения (2.18) можно представить в следующем виде

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{D} d\vec{S}$$

Предел в правой части уравнения (2.18) равен

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \rho dV = \rho \frac{V}{V} = \rho.$$

Следовательно, можно написать

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.19)$$

т.е. *дивергенция вектора \vec{D} равна объемной плотности заряда в окрестности данной точки поля.*

Формула (2.19) представляет собой теорему Гаусса в дифференциальной форме. Она позволяет рассчитать объемную плотность заряда по известному распределению в пространстве электрического смещения или напряженности электрического поля.

Чтобы произвести расчеты по формуле (2.19), ее следует представить в развернутом виде и выбрать подходящую (удобную) систему координат.

Например, в декартовых координатах дивергенция вектора \vec{D} определяется соотношением

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z},$$

где D_x, D_y, D_z – проекции вектора \vec{D} на соответствующие оси координат.

Тогда формулу (2.19) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (2.20)$$

В физике часто используется операторная форма записи уравнений. *Оператор* – это правило, которое позволяет одной функции сопоставить другую. Простейшими операторами являются, например, арифметические действия.

Рассмотрим один из операторов – *дифференциальный векторный оператор набла* (в переводе с греческого языка набла – это арфа).

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) координатных осей.

Действие этого оператора на функцию заключается в дифференцировании функции по координатам с последующим суммированием.

Используя операторную форму записи, формулу, связывающую напряженность поля и потенциал $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, можно представить в виде

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (2.21)$$

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{\nabla}$ и \vec{D} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Следовательно, формулу (2.20) можно записать в операторном виде:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (2.22)$$

Учитывая, что $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, представим формулу (2.22) в виде:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Принимая во внимание формулу (2.21), получим

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (2.23)$$

где $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – скалярное произведение операторов набла.

Это скалярное произведение обозначают символом Δ и называют *оператором Лапласа*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.24)$$

Используя оператор Лапласа (2.24) запишем уравнение (2.23) в виде

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) называют *уравнением Пуассона*. Если свободный заряд отсутствует ($\rho = 0$), то

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) называют *уравнением Лапласа*.

Рассмотрим следующий пример. Требуется найти распределение потенциала внутри плоского конденсатора, если расстояние между его обкладками d , а разность потенциалов равна $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение: Направим ось X так, как показано на рис. 2.8, начало координат свяжем с левой пластиной конденсатора.

Так как внутри конденсатора свободных зарядов нет, то применим уравнение Лапласа (2.26). Учтем, что потенциал изменяется только в направлении оси X . Тогда уравнение Лапласа преобразуется к виду $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$.

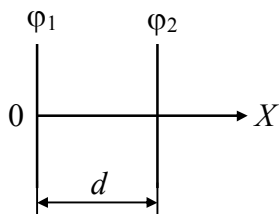


Рис. 2.8. К выводу формулы распределения потенциала

Чтобы найти распределение потенциала внутри конденсатора, дважды проинтегрируем уравнение Лапласа:

$$\varphi = \iint dx^2 = \int c_1 dx = c_1 x + c_2,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Пусть при $x = 0$, $\varphi = \varphi_1$, а при $x = d$, $\varphi = \varphi_2$. Тогда $c_2 = \varphi_1$ и $\varphi_2 = c_1 \cdot d + \varphi_1$, откуда $c_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$. Следовательно, закон распределения потенциала внутри конденсатора имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \cdot x + \varphi_1.$$

2.7. Виды поляризации диэлектриков. Сегнетоэлектрики

Различают следующие виды поляризации диэлектрика:

- Упругая электронная поляризация – внешнее поле смещает электронную оболочку атомов относительно ядра. Эта поляризация характерна для всех диэлектриков.
- Ионная поляризация – смещение в кристаллической решетке разноименно заряженных ионов в противоположных направлениях. Поляризация наблюдается в кристаллах.
- Дипольная (ориентационная) поляризация – если молекулы имеют собственный электрический момент, то внешнее поле ориентирует их. Этот вид поляризации присущ полярным диэлектрикам.
- Спонтанная (самопроизвольная поляризация) – у диэлектриков, имеющих в объеме большие поляризованные области (домены). Под действием электрического поля произвольно ориентированные электрические моменты

доменов ориентируются в направлении внешнего поля. Спонтанная поляризация наблюдается в сегнетоэлектриках.

Существует группа веществ, которые могут обладать поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля. Эти вещества называются *сегнетоэлектриками*. К таким веществам относятся сегнетова соль, титанат бария и др.

Перечислим свойства сегнетоэлектриков:

- обладают поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля;
- имеют нелинейную зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности внешнего электрического поля;
- наличие *гистерезиса*.

При циклических изменениях внешнего поля зависимость $P = f(E)$ следует изображенной на рис. 2.9 кривой, называемой *петлей гистерезиса*. При первоначальном включении электрического поля поляризация P растет с ростом напряженности поля E в соответствии с кривой 1. Уменьшение поляризации происходит по ветви 2. При обращении напряженности внешнего поля в нуль вещество сохраняет значение поляризации P_0 , называемое остаточной поляризацией. Только под действием противоположно направленного поля E_c , поляризация становится равной нулю. Это значение напряженности поля называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем изменении E получается ветвь 3 и т.д.

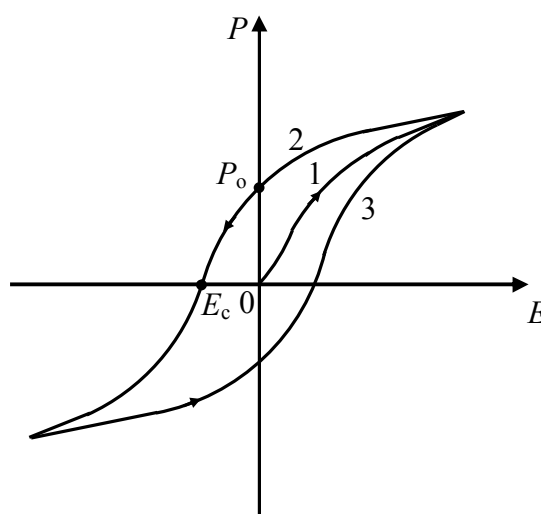


Рис. 2.9. Петля гистерезиса

Свойства сегнетоэлектриков объясняются их доменной структурой. *Домены* — это области самопроизвольной поляризации. В пределах такой области дипольные моменты молекул отличны от нуля, однако, направления дипольных моментов разных областей различны и результирующий дипольный момент может быть равен нулю. Под действием внешнего поля моменты всех доменов устанавливаются по направлению поля, и сегнетоэлектрик поляризуется.

Для каждого сегнетоэлектрика существует температура, выше которой он утрачивает свои свойства и становится обычным диэлектриком. Эта температура называется *точкой Кюри*. Например, для титаната бария точка Кюри составляет 125°C .

2.8. Прямой и обратный пьезоэффект

Если на сегнетоэлектрик надавить, то на его поверхности возникает поляризационный заряд. Это явление называется *прямым пьезоэффектом*. Величина поляризации пропорциональна деформации кристалла. При изменении знака деформации знак поляризации меняется также на обратный. Важнейшими пьезоэлектриками являются кварц, сегнетова соль, титанат бария.

Если вырезать из кристалла кварца пластинку, перпендикулярную к кристаллографической оси a (рис. 2.10, a), и сжать ее вдоль этой оси, то на гранях пластинки появятся связанные заряды (на рисунке пластинка расположена так, что кристаллографическая ось c направлена на нас). То же самое происходит, если пластинку растянуть вдоль оси oo , перпендикулярной к кристаллографическим направлениям a и c .

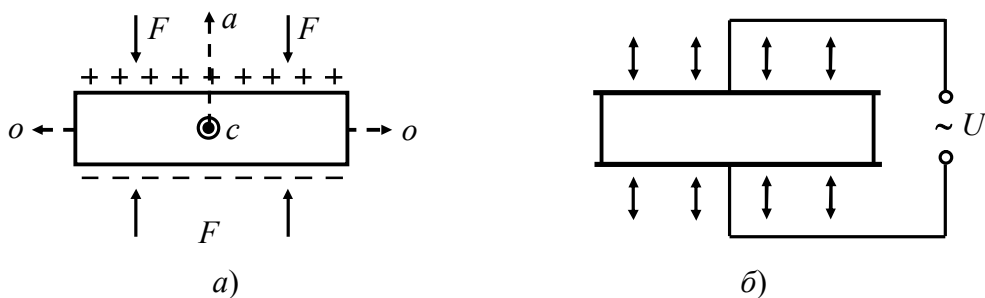


Рис. 2.10. Прямой пьезоэффект (a); обратный пьезоэффект (b)

При изменении знака деформации (т.е. при растяжении вдоль оси a или сжатии вдоль oo) на гранях пластинки появляются поляризационные заряды другого знака.

Для практического использования пьезоэффекта на грани пластинки накладываются металлические обкладки. Если эти обкладки включить в электрическую цепь, то при изменениях деформации кристалла в цепи будут возникать

импульсы напряжения. Такие процессы протекают, например, в пьезоэлектрическом микрофоне. Знакопеременная деформация пластинки под действием звуковой волны преобразуется в переменное напряжение той же частоты.

Пьезоэффект имеет следующее объяснение. Решетку всякого кристалла можно представить в виде нескольких образованных разными атомами или группами атомов более простых решеток, вставленных друг в друга. Если кристалл не имеет центра симметрии, то при деформации происходит сдвиг простых решеток друг относительно друга, который может вызвать появление у кристалла поляризационного заряда.

У пьезоэлектриков наблюдается и *обратный пьезоэффект*, заключающийся в том, что при подаче на кристалл переменного напряжения, пьезоэлектрик начинает вибрировать с частотой этого напряжения, т.е. в кристалле возникают механические колебания (рис. 2.10, б). Эти колебания будут особенно интенсивными при резонансе. Такие настроенные в резонанс пластинки используются для получения ультразвуковых колебаний, для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний и др.

ГЛАВА 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

3.1. Равновесие зарядов на проводнике

Если проводнику сообщить некоторый заряд q , то он распределится таким образом, что будет находиться в положении равновесия. Так как носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы, то равновесие зарядов на проводнике может наблюдаться лишь при выполнении следующих условий:

- Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю:

$$E = 0.$$

В соответствии с выражением $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ это означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным, т.е. $\varphi = \text{const}$.

- Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности

$$E = E_n.$$

Следовательно, в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Поместим незаряженный металлический проводник в виде пластины в электрическое поле плоского конденсатора напряженностью E (рис. 3.1, а). Под действием сил поля свободные электроны проводника перемещаются к положительно заряженной пластине конденсатора и накапливаются на краю исследуемого проводника. На другом краю проводника возникают положительные заряды. Явление разделения электрических зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля с напряженностью E_1 называется *электростатической индукцией*.

Заряды электростатической индукции, называемые *индуцированными зарядами*, создают в проводнике внутреннее электрическое поле с напряженностью E_2 , которое направлено против внешнего электрического поля. При равенстве зарядов внешнего и внутреннего полей равны и напряженности.

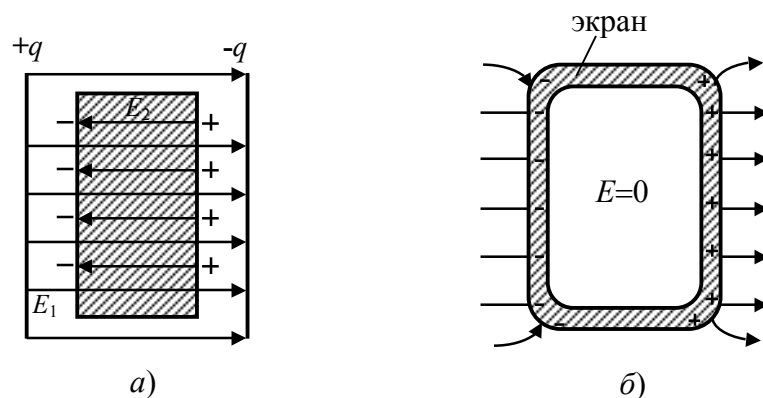


Рис. 3.1. Металлическая пластина в электрическом поле конденсатора (а); применение экрана (б)

Напряженность результирующего поля внутри проводника равна нулю $E = E_1 - E_2 = 0$. В связи с отсутствием электрического поля внутри проводника все его точки имеют одинаковый потенциал, а поверхность является эквипотенциальной.

Электрическое поле отсутствует не только в сплошном проводнике, но и в проводящей оболочке (рис. 3.1, б). Это свойство используется для защиты приборов от действия электрических полей путем их экранирования.

3.2. Электроемкость

Потенциал проводника пропорционален находящемуся на нем заряду т.к. при увеличении заряда в несколько раз, во столько же раз увеличивается напряженность поля в каждой точке пространства вокруг проводника и в такое же число раз возрастает работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т.е. потенциал проводника.

Таким образом

$$q = C\varphi, \quad (3.1)$$

где C – коэффициент пропорциональности между потенциалом и зарядом. Этот коэффициент пропорциональности называется электроемкостью (емкостью) проводника. Из (3.1) следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.2)$$

Емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

В СИ за единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Эта единица емкости называется фарад (Ф), т.е. $[C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}$.

Фарад – это очень большая единица емкости. На практике пользуются более мелкими единицами: $1\text{пФ} = 1 \cdot 10^{-12} \text{Ф}$; $1\text{нФ} = 1 \cdot 10^{-9} \text{Ф}$; $1\text{мкФ} = 1 \cdot 10^{-6} \text{Ф}$.

Вычислим емкость шара радиуса R по формуле (3.2):

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R, \quad (3.3)$$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$ – потенциал шара. Подставим в формулу (3.3) $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ – ради-

ус Земли, тогда $C \approx 711 \text{ мкФ}$.

Расчет показал, что даже такое огромное тело, как земной шар имеет небольшую емкость.

3.3. Конденсаторы

Конденсаторы – это устройства для накапливания электрических зарядов. Конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называются его *обкладками*. Чтобы внешние тела не оказывали воздействие на емкость конденсатора, обкладки располагают так, чтобы поле было полностью сосредоточено внутри конденсатора.

Конденсаторы бывают плоские, цилиндрические и сферические. Емкостью конденсатора называется величина, равная

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (3.4)$$

где q – заряд конденсатора, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между его обкладками.

Вычислим емкость плоского, цилиндрического и сферического конденсатора.

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных близкорасположенных пластин (обкладок), между которыми находится диэлектрик с проницаемостью ϵ . Пусть площадь одной обкладки S , а расстояние между обкладками равно d . Как видно из рис. 3.2, поля положительно и отрицательно заряженных обкладок внутри конденсатора складываются, поле будет однородным, а вне конденсатора компенсируют друг друга.

Напряженность поля внутри конденсатора равна

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S},$$

где q – заряд конденсатора. Но $\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$.

Тогда, в соответствии с формулой (3.4), емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (3.5)$$

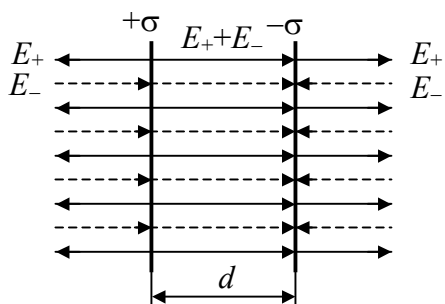


Рис. 3.2. Плоский конденсатор

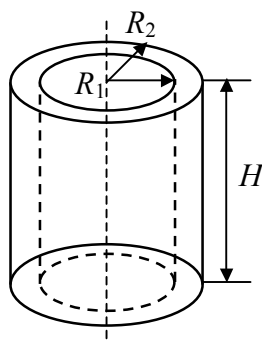


Рис. 3.3. Цилиндрический конденсатор

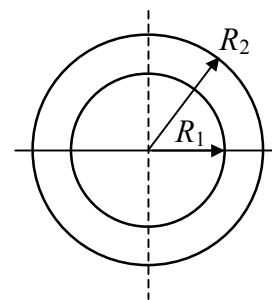


Рис. 3.4. Сферический конденсатор

Из формулы (3.5) видно, что емкость плоского конденсатора пропорциональна площади его обкладки и обратно пропорциональна расстоянию между обкладками.

Цилиндрический конденсатор состоит из двух коаксиальных металлических цилиндров, с радиусами оснований R_1 и R_2 и высотой H (рис. 3.3). Между обкладками конденсатора находится диэлектрик с проницаемостью ϵ .

Электрическое поле внутри цилиндрического конденсатора подобно полю длинной заряженной нити:

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{Hr},$$

где τ - заряд, приходящийся на единицу длины цилиндров, r – расстояние от оси цилиндра до точки, находящейся в промежутке между обкладками конденсатора ($R_1 < r < R_2$).

Так как поле внутри цилиндрического конденсатора неоднородное, то разность потенциалов между его обкладками найдем по формуле:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

откуда получается формула емкости цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.6)$$

Как следует из формулы (3.6), емкость цилиндрического конденсатора зависит от величины его обкладок и расстояния между ними.

Сферический конденсатор состоит из двух концентрических металлических сфер радиусами R_1 и R_2 , между которыми находится диэлектрик (рис. 3.4). Поле внутри сферического конденсатора подобно полю точечного заряда или заряженного шара и сферы:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

где q – заряд конденсатора, r – расстояние от центра сферического конденсатора до точки, находящейся в промежутке между сферами ($R_1 < r < R_2$).

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

откуда получается формула емкости сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.7) видно, что емкость сферического конденсатора, также как плоского и цилиндрического, зависит от размера его обкладок и расстояния между ними.

Отметим, что емкости конденсаторов, в зависимости от их назначения и конструкции, лежат в пределах 1 пФ – 10000 мкФ.

3.4. Соединения конденсаторов

Располагая набором конденсаторов, можно расширить число возможных значений емкости и рабочего напряжения, если применить соединение конденсаторов в батарее.

Параллельное соединение конденсаторов (рис. 3.5). При параллельном

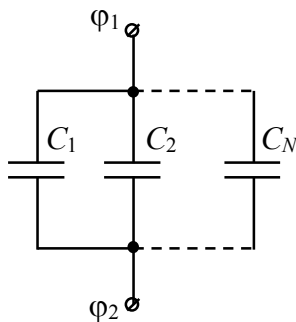


Рис. 3.5. Параллельное соединение конденсаторов

соединении одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал φ_1 , а другая φ_2 . Следовательно, суммарный заряд конденсаторов

$$q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N C_i (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{i=1}^N C_i.$$

Так как $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$, то емкость батареи конденсаторов равна

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^N C_i.$$

Следовательно, при параллельном соединении конденсаторов емкости складываются. Предельное напряжение батареи равно наименьшему из значений U_{max} для конденсаторов, включенных в батарею.

Последовательное соединение конденсаторов (рис. 3.6). При последовательном соединении все конденсаторы имеют одинаковый заряд q . Поэтому напряжение на каждом из конденсаторов

$$U_i = \frac{q}{C_i}.$$

Сумма напряжений на конденсаторах равна разности потенциалов, приложенной к батарее

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N \frac{q}{C_i} = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i},$$

откуда получается, что

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

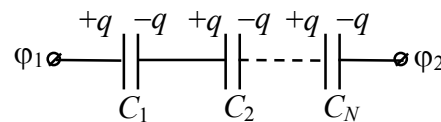


Рис. 3.6. Последовательное соединение конденсаторов

При последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные емкостям. Напряжение на каждом конденсаторе не должно превышать указанное для него U_{max} . Если $C_1 = C_2 = C_N$, то емкость батареи равна $C = C_1/N$, а максимальное допустимое напряжение, которое можно подать на батарею равно $(U_{\text{max}})_{\text{бат}} = NU_{\text{max}}$.

Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

4.1. Энергия системы зарядов

Найдем выражение для потенциальной энергии системы точечных зарядов. Рассмотрим два заряда q_1 и q_2 . Обозначим φ_{12} – потенциал, создаваемый зарядом q_1 в точке, где находится заряд q_2 ; φ_{21} – потенциал, создаваемый зарядом q_2 в точке, где находится заряд q_1 .

Потенциальная энергия заряда q_1 равна $W_1 = q_1\varphi_{21} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}}$, потенциальная энергия заряда q_2 равна $W_2 = q_2\varphi_{12} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}}$, где r_{12} – расстояние между зарядами.

Тогда энергия системы двух зарядов будет

$$W_1 + W_2 = q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12},$$

или

$$2W = q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12},$$

откуда следует

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}).$$

Для трех зарядов путем аналогичных рассуждений, получается формула

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}[(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}) + (q_1\varphi_{31} + q_2\varphi_{13}) + (q_2\varphi_{32} + q_3\varphi_{23})] = \\ &= \frac{1}{2}[q_1(\varphi_{21} + \varphi_{31}) + q_2(\varphi_{12} + \varphi_{32}) + q_3(\varphi_{13} + \varphi_{23})]. \end{aligned}$$

Обозначим потенциалы в тех точках, где находятся заряды q_1, q_2, q_3 через $\varphi_1 = \varphi_{21} + \varphi_{31}$, $\varphi_2 = \varphi_{12} + \varphi_{32}$, $\varphi_3 = \varphi_{13} + \varphi_{23}$ соответственно.

Тогда получим формулу для энергии трех зарядов:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3).$$

Для системы n зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (4.1)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i всеми зарядами, кроме q_i .

4.2. Энергия заряженного проводника

Заряд q , находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов Δq . Поверхность проводника является эквипотенциальной, поэтому потенциалы тех точек, в которых находятся точечные заряды Δq , одинаковы и равны потенциалу φ проводника. Применяя к системе зарядов Δq формулу (4.1), находим

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi \Delta q = \frac{1}{2} \varphi \sum \Delta q = \frac{1}{2} q \varphi. \quad (4.2)$$

4.3. Энергия заряженного конденсатора

Каждый из элементарных зарядов, на которые можно мысленно разделить заряд положительно заряженной обкладки конденсатора ($+q$), находится в точке с потенциалом φ_1 , а каждый из зарядов, на которые можно разделить заряд отрицательно заряженной обкладки ($-q$) – в точке с потенциалом φ_2 . Согласно (4.1) энергия такой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} [(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad (4.4)$$

где C – емкость конденсатора, U – напряжение между его обкладками.

4.4. Энергия электрического поля

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками.

Подставим в формулу (4.4) выражение для емкости плоского конденсатора, тогда

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 S d E^2.$$

Произведение Sd представляет собой объем V , занимаемый полем. Таким образом, можно написать

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

Объемной плотностью энергии ω электрического поля называется энергия, приходящаяся на единицу объема, занимаемого полем. Единица объемной плотности энергии в СИ $[\omega] = \text{Дж/м}^3$.

Следовательно, для объемной плотности энергии поля плоского конденсатора получим формулу

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (4.5)$$

Отметим, что формула (4.5) дает энергию электрического поля и в общем случае, независимо от того, где сосредоточено поле.

Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, формулу (4.5) можно представить в виде

$$\omega = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Ранее мы показали, что $D = (\varepsilon_0 E + P)$, поэтому

$$\omega = \frac{E(\varepsilon_0 E + P)}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2}. \quad (4.6)$$

Первое слагаемое в формуле (4.6) представляет собой объемную плотность энергии электрического поля в вакууме, а второе представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика.

Таким образом, объемная плотность энергии поля определяется плотностью энергии поля в вакууме и плотностью энергии, затрачиваемой на поляризацию диэлектрика.

Глава 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

5.1. Основные характеристики постоянного тока

Электрический ток – направленное движение заряженных частиц под действием электрического поля.

Носители тока в проводниках – электроны. В проводящих растворах ток образуют ионы, в газах – ионы и электроны.

За направление тока принимают направление движения положительных зарядов, поэтому направление тока в металлах противоположно движению электронов. *Линиями тока* называют линии, вдоль которых движутся заряды.

Сила тока – величина, равная заряду, переносимому носителями тока через поперечное сечение проводника в единицу времени.

Единица силы тока в СИ – ампер [А].

Ток, не меняющийся со временем по направлению и величине, называется *постоянным током*. Сила постоянного тока I равна

$$I = \frac{q}{t}.$$

Если сила тока зависит от времени, то мгновенное значение силы тока i определяют по формуле:

$$i = \frac{dq}{dt},$$

где dq – бесконечно малый заряд, проходящий через проводник за бесконечно малый промежуток времени dt .

Плотностью тока j называется отношение силы тока через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей площадку S_{\perp} к величине этой площадки

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Плотность тока – векторная величина. За направление вектора плотности тока принимают направление движения положительных зарядов.

Единицей плотности тока в СИ является A/m^2 . На практике плотность тока чаще измеряют в A/mm^2 .

Зная вектор плотности тока в каждой точке проводника, можно найти силу тока I через любую поверхность S (рис. 5.1):

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cos \alpha \, dS = \int_S j_n \, dS,$$

где α - угол между вектором \vec{j} и нормалью \vec{n} к dS , j_n – составляющая вектора \vec{j} по направлению нормали к dS .

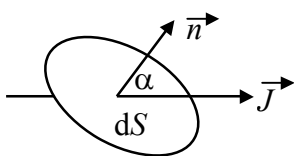


Рис. 5.1. Вектор плотности тока

Если проводники имеют различное сечение, то плотность тока по всей длине проводника будет различной, а сила тока на всем протяжении проводника будет одинакова.

5.2. Электродвижущая сила и напряжение

Если к заряженному конденсатору подключить лампочку, то она через небольшой промежуток времени погаснет. Это произойдет потому, что за счет движения зарядов во внешней цепи потенциалы обкладок сравняются, и разность потенциалов между обкладками будет равна нулю.

Чтобы в цепи длительное время существовал ток, необходимо на определенном участке цепи поддерживать разность потенциалов, т.е. совершать работу против сил электрического поля. Так как работа электростатических сил на замкнутом пути равна нулю, то необходимы сторонние силы. Роль сторонних сил могут играть силы любой природы, кроме электростатических сил. Например, в гальваническом элементе роль сторонней силы играет энергия химической реакции.

Электродвижущей силой (ЭДС) ε называется работа сторонних сил $A_{ст}$ по перемещению единичного положительного заряда q вдоль замкнутой цепи:

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q}.$$

Единицей ЭДС является вольт:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Работа сторонних сил по перемещению заряда q вдоль замкнутой цепи равна

$$A_{\text{ст}} = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l},$$

где $\vec{F}_{\text{ст}}$ – сторонняя сила, $d\vec{l}$ – перемещение заряда, $\vec{E}_{\text{ст}}$ – напряженность поля сторонних сил.

ЭДС, действующая в цепи:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}.$$

Иными словами, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

Участок 1 – 2 электрической цепи (рис. 5.2), содержащий ЭДС, называется *неоднородным участком цепи*.

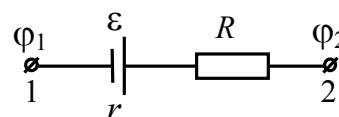


Рис. 5.2

На заряд q на данном участке цепи действуют как сторонние силы $F_{\text{ст}}$, так и силы электростатического поля F_e :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_e = q(\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}).$$

Работа результирующей силы \vec{F} на участке 1–2 равна

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q\varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

где ε_{12} – ЭДС, действующая на участке 1–2.

Напряжением (падением напряжения) U_{12} на участке цепи 1–2 называется физическая величина, численно равная сумме работ электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (5.1)$$

Итак, ЭДС представляет собой работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, разность потенциалов равна работе электростатических сил, а напряжение является их суммой.

Однородным называется участок цепи, на котором не действует ЭДС. Напряжение U_{12} на однородном участке цепи совпадает с разностью потенциалов на концах участка:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

5.3. Закон Ома для однородного участка цепи

Согласно закону, установленному Омом, *сила тока, текущего по проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике и обратно пропорциональна сопротивлению проводника R :*

$$I = \frac{U}{R}. \quad (5.2)$$

Сопротивление измеряется в омах (Ом). Сопротивление 1 Ом имеет такой проводник, в котором при напряжении 1 В течет ток силой 1 А.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и материала, из которого он изготовлен:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения; ρ – удельное сопротивление.

Удельное сопротивление – это сопротивление проводника единичной длины и единичного сечения. Удельное сопротивление зависит от материала проводника и его температуры. Единицей удельного сопротивления проводника в СИ является (Ом·м).

Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при 0°C , t – температура по шкале Цельсия, $\alpha \approx 1/273 \text{ K}^{-1}$ – температурный коэффициент сопротивления. Переходя к абсолютной температуре, получаем

$$\rho = \rho_0 \alpha T.$$

У ряда металлов и сплавов при температуре несколько кельвин, сопротивление скачком обращается в нуль (рис. 5.3). Это явление называют *сверхпроводимостью*. Сверхпроводимость была обнаружена в 1911 г. Камерлинг-Оннесом для ртути. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца, олова, цинка, алюминия и других металлов и сплавов. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура T_k , при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. Сверхпроводимость объясняется тем, что при низких температурах тепловая энергия электрона меньше кванта энергии, и она уже не может перейти в тепло.

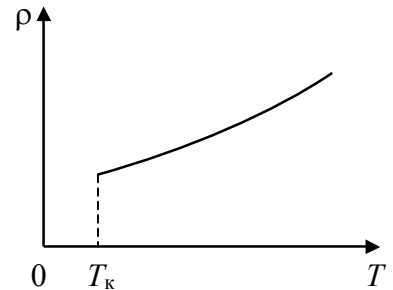


Рис. 5.3. Зависимость удельного сопротивления металлического проводника от температуры

5.4. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома можно написать в дифференциальной форме, т.е. для малой части проводника. Выделим в окрестности данной точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем с образующими параллельными вектору плотности тока \vec{j} в данной точке. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой $j dS$. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно $E dl$, где E – напряженность поля в данном месте. Сопротивление цилиндра равно $R = \rho \frac{dl}{dS}$. Подставим эти значения в формулу закона Ома, тогда

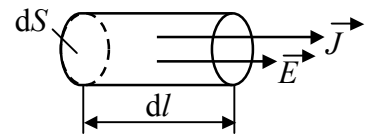


Рис. 5.4. Элементарный цилиндрический объем

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} \cdot E dl.$$

Носители заряда в каждой точке движутся в направлении вектора \vec{E} . Поэтому, направления векторов \vec{E} и \vec{j} совпадают. Следовательно,

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (5.3)$$

где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ – удельная проводимость.

Формула (5.3) выражает закон Ома в дифференциальной форме.

5.5. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока

При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество выделяющегося в проводнике тепла Q пропорционально квадрату силы тока I , его сопротивлению R и времени t :

$$Q = I^2 R t. \quad (5.4)$$

Если сила тока изменяется во времени, то

$$Q = \int_0^t i^2 R dt. \quad (5.5)$$

Закон Джоуля – Ленца имеет следующее объяснение. Рассмотрим проводник, к которому приложено напряжение U . За время dt из одного конца проводника в другой конец переносится заряд $dq = idt$. При этом силы поля совершают работу $dA = Udq = Uidt$. Но $U = iR$ (в соответствии с законом Ома), следовательно,

$$dA = iU dt = i^2 R dt, \quad (5.6)$$

откуда следует, что

$$A = \int_0^t i^2 R dt. \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) совпадает с формулой закона Джоуля – Ленца. Таким образом, нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами электрического поля над носителями заряда.

Работа тока, изменяющегося со временем, определяется по формуле (5.7).

Для постоянного тока работа равна:

$$A = I^2 R t = I U t.$$

Единица работы электрического тока – джоуль (Дж).

Работа, совершаемая источником ЭДС, равна

$$A = \varepsilon It.$$

Мощность P постоянного тока – это физическая величина, равная отношению работы, совершаемой током за время dt , к этому интервалу времени:

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (5.8)$$

Подставив формулу (5.6) в (5.8) и заменив i на I , получим

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

На практике для измерения работы и энергии электрического тока часто используют единицу - киловатт-час (кВт·час); $1 \text{ кВт}\cdot\text{час} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

5.6. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

Формулы (5.4) и (5.5) позволяют определить количество тепла, выделяющееся во всем проводнике.

Получим выражение, характеризующее выделение тепла в различных местах проводника. Рассмотрим элементарный объем внутри проводника (рис. 5.4). Согласно закону Джоуля – Ленца за время dt в этом объеме выделится тепло

$$dQ = Ri^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} \cdot (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt,$$

где $dV = dS dl$ – величина элементарного объема.

Количество тепла dQ , отнесенное к единице времени и единице объема называется удельной тепловой мощностью тока w . С учетом этого определения получаем

$$w = \rho j^2. \quad (5.9)$$

Воспользовавшись соотношением (5.3), формуле (5.9) можно придать вид

$$w = jE. \quad (5.10)$$

Формулы (5.9) и (5.10) выражают закон Джоуля – Ленца в дифференциальном виде. Чтобы, исходя из них, найти количество тепла, выделяющееся во всем проводнике за время t , нужно произвести интегрирование выражения

$$Q = \iint w dV dt.$$

5.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Ранее мы получили формулу для напряжения на участке цепи 1–2 (5.1). В соответствии с законом Ома для однородного участка цепи $U_{12} = IR$, следовательно

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}, \quad (5.11)$$

то есть *произведение силы тока на сопротивление равно сумме разности потенциалов и ЭДС, действующей на данном участке цепи*. Это утверждение выражает закон Ома для неоднородного участка цепи.

Формула (5.11) может быть записана в виде

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}. \quad (5.12)$$

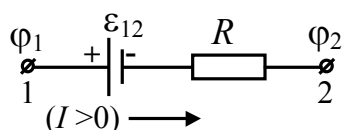


Рис. 5.5

На рис. 5.5 показан неоднородный участок цепи. Условимся считать ток положительным, если он течет в направлении, показанном стрелкой. ЭДС будем считать положительной, если ток внутри источника

течет от отрицательного полюса источника к положительному полюсу. На рис. 5.5 ЭДС имеет отрицательный знак. Пусть $\varphi_1 = 20$ В; $\varphi_2 = 15$ В; $\varepsilon_{12} = -10$ В; $R = 5$ Ом. Подставим заданные значения в формулу (5.12):

$$I = \frac{20 - 15 - 10}{5} = -1 \text{ А}.$$

Для тока получилось отрицательное значение. Это означает, что ток течет в направлении 2–1. Из формулы (5.12) следует закон Ома для однородного участка цепи и закон Ома для замкнутой цепи.

Для однородного участка цепи $\varepsilon_{12} = 0$,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Для замкнутой (полной) цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$,

$$I = \frac{\varepsilon_{12}}{R},$$

где $R = r_0 + R_n$ – суммарное сопротивление цепи (r_0 – внутреннее сопротивление источника, R_n – сопротивление нагрузки).

5.8. Правила Кирхгофа

С помощью правил Кирхгофа можно рассчитывать сложные разветвленные цепи.

Первое правило Кирхгофа относится к узлу цепи. Узлом цепи называется точка, в которой сходится более двух проводников (рис. 5.6).

Первое правило Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле цепи, равна нулю.*

Это правило является следствием того, что при протекании тока по проводнику, в проводнике не накапливается электрический заряд, проводник остается электрически нейтральным.

Формула, выражающая первое правило Кирхгофа, записывается следующим образом:

$$\sum I_k = 0.$$

Чтобы применить первое правило Кирхгофа, нужно задать произвольно направления токов, текущих к данному узлу и от узла. Ток, текущий к узлу, считается положительным, а ток, текущий от узла – отрицательным.

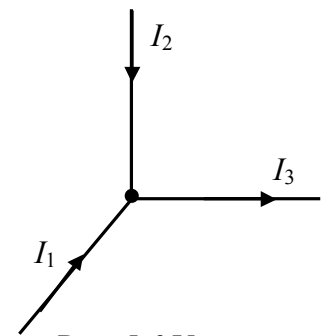


Рис. 5.6 Узел цепи

Второе правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма падений напряжений на элементах контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в контуре:*

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k.$$

Контуром называется замкнутый фрагмент цепи. Чтобы написать уравнение по второму правилу Кирхгофа, нужно задать произвольно направление обхода контура и учесть направления токов, текущих в ветвях контура к узлам (направления токов мы задаем при составлении уравнения по первому правилу Кирхгофа). Если направление обхода контура совпадает с направлением тока, то падение напряжения IR берут со знаком плюс, в противном случае падение напряжения имеет отрицательный знак. ЭДС имеет положительный знак, если

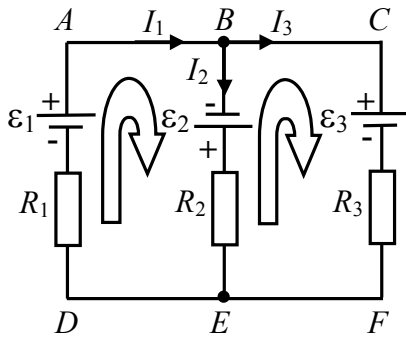


Рис. 5.7. Схема цепи

она действует по направлению обхода контура и отрицательный знак в противном случае.

Напишем уравнения в соответствии с правилами Кирхгофа, для электрической цепи, показанной на рис. 5.7. Цепь содержит два узла B и E и три контура: $ABED$, $BCFE$, $ACFD$. ЭДС источников

и сопротивления ветвей заданы. Требуется рассчитать токи I_1 , I_2 , I_3 , текущие в ветвях цепи.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Решив систему уравнений (5.13), например, методом определителей, найдем значения токов, текущих в ветвях цепи. Если ток имеет отрицательное значение, то это означает, что в действительности ток будет течь противоположном направлении.

5.9. Распределение мощности в цепи постоянного тока

Электрическая цепь состоит, как правило, из источника ЭДС, соединительных проводов и потребителя тока (нагрузки).

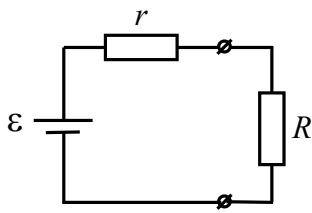


Рис. 5.7. Замкнутая электрическая цепь

Рассмотрим, как распределяется мощность тока между элементами цепи. Если пренебречь сопротивлением соединительных проводов, то закон Ома для замкнутой цепи, показанной на рис. 5.7, можно записать в виде:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

где r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление нагрузки.

Напряжение на нагрузке равно

$$U = IR = \varepsilon \frac{R}{r + R}.$$

Поскольку работа, совершаемая над переносимым вдоль цепи зарядом dq , равна $dA = \varepsilon dq$, то мощность P , развиваемая источником ЭДС равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I.$$

Подставив в эту формулу значение $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$, получим *полную мощность*, выделяемую во всей цепи

$$P = \frac{\varepsilon^2}{r + R}. \quad (5.14)$$

В нагрузку выделяется только часть этой мощности $P_{\text{н}}$:

$$P_{\text{н}} = IU = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R, \quad (5.15)$$

которая называется *полезной мощностью*.

Отношение полезной мощности $P_{\text{н}}$ к полной мощности P определяет коэффициент полезного действия (КПД) η цепи:

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P} = \frac{R}{r + R}. \quad (5.16)$$

Из формулы (5.16) следует, что КПД будет тем больше, чем больше сопротивление нагрузки R по сравнению с сопротивлением источника r . Поэтому внутреннее сопротивление источника стремятся делать как можно меньше.

Мощность, развиваемая данным источником ЭДС, зависит от сопротивления нагрузки R . Она максимальна в режиме короткого замыкания цепи ($R=0$), но в этом случае вся мощность выделяется в самом источнике и оказывается бесполезной. С ростом сопротивления нагрузки R полная мощность убывает, стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Режим цепи, при котором $R \rightarrow \infty$, называется *режимом холостого хода*.

Найдем соотношение между R и r , при котором полезная мощность будет наибольшей. Для этого найдем производную $\frac{dP_{\text{н}}}{dR}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dP_{\text{н}}}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r - R}{(r + R)^3},$$

$$\varepsilon^2 \frac{r - R}{(r + R)^3} = 0 \Rightarrow R = r.$$

Следовательно, чтобы отобрать от источника ЭДС наибольшую полезную мощность, нужно взять сопротивление нагрузки R равное внутреннему сопротивлению источника r . Режим работы электрической цепи, при котором сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника, называют режимом согласования источника и нагрузки. Согласно формуле (1.9) КПД в режиме согласования источника и нагрузки составляет 0,5. На рис.5.8 приведены графики зависимости функций (5.14), (5.15) и (5.16) от отношения сопротивлений R/r .

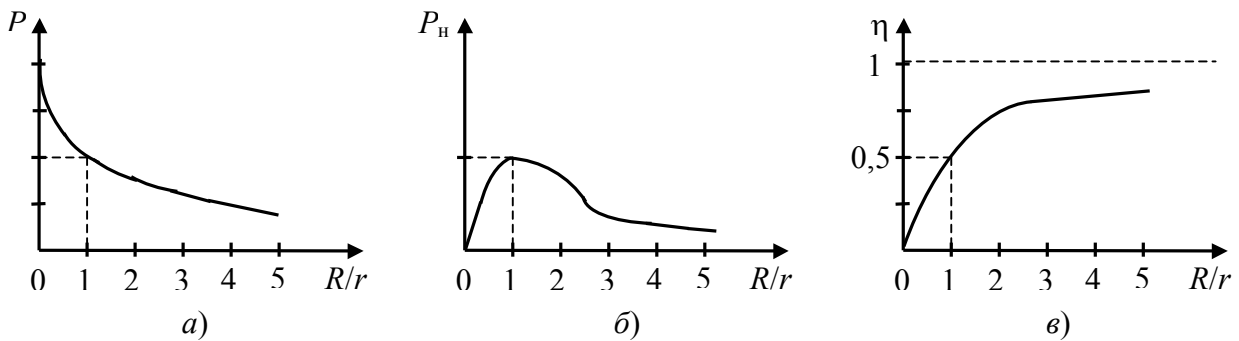


Рис. 5.8 Зависимости полной мощности (а), полезной мощности (б) и КПД цепи (в) от отношения сопротивлений нагрузки R и внутреннего сопротивления r источника

Глава 6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

6.1. Магнитное поле тока. Индукция магнитного поля

В 1820 г. Эрстед обнаружил, что магнитная стрелка, расположенная рядом с проводником отклоняется, когда по проводнику течет ток (рис. 6.1). Магнитная стрелка, как известно, отклоняется в магнитном поле. Следовательно, вокруг проводника с током образуется магнитное поле.

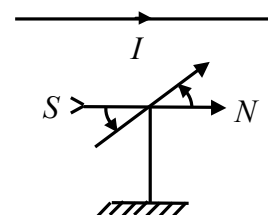


Рис. 6.1. Влияние проводника с током на магнитную стрелку

Магнитное поле – это форма материи, которая создается движущимися зарядами или токами.

Силовой характеристикой магнитного поля является векторная величина – *магнитная индукция* \vec{B} .

Индукция магнитного поля \vec{B} определяется по действию поля на контур с током (рис. 6.2). За направление вектора магнитной индукции принимается направление положительной нормали \vec{n} к плоскости контура с током, находящегося в равновесии в магнитном поле. Контур должен быть достаточно малых размеров, чтобы поле в его пределах можно было считать однородным.

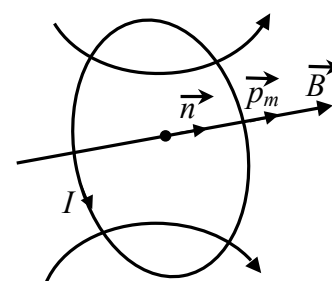


Рис. 6.2. Контур с током в магнитном поле

Положительной нормалью \vec{n} контура называется перпендикуляр, проведенный к его плоскости так, чтобы направление тока в контуре было связано с направлением нормали правилом правого винта.

Произведение силы тока I и площади контура S называется *магнитным моментом контура* p_m . Направление вектора \vec{p}_m связано с направлением тока в контуре правилом правого винта, т.е. совпадает с направлением положительной нормали контура (рис. 3.2). Единицей магнитного момента является ампер-квадратный метр ($A \cdot m^2$).

Если контур отклонить от положения равновесия, то на него будет действовать вращающий момент M , стремящийся вернуть контур в положение равновесия. Вращающий момент максимален, когда нормаль к плоскости контура

перпендикулярна вектору индукции. Модуль индукции магнитного поля определяют как отношение максимального вращающего момента к магнитному моменту контура:

$$|\vec{B}| = \frac{M_{\max}}{IS} = \frac{M_{\max}}{|\vec{p}_m|}.$$

Итак, магнитная индукция – это векторная величина, численно равная отношению максимального механического момента, действующего на контур с током в магнитном поле, к его магнитному моменту. Единицей магнитной индукции в СИ является тесла (Тл). 1 Тл – это магнитная индукция такого поля, в котором на контур малых размеров с магнитным моментом $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ действует максимальный вращающий момент 1 Н·м.

Магнитное поле можно изобразить графически с помощью линий магнитной индукции. *Линией магнитной индукции* (силовой линией магнитного поля) называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции \vec{B} . Линии магнитной индукции всегда замкнуты.

6.2. Закон Био-Савара-Лапласа. Поле прямого и кругового токов

Согласно закону Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля $d\vec{B}$, созданная элементом тока $d\vec{l}$, в точке A , радиус-вектор которой \vec{r} , равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (6.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная.

Направлен вектор $d\vec{B}$ перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} , причем так, что вращение вокруг $d\vec{l}$ в направлении $d\vec{B}$ связано с $d\vec{l}$ правилом правого винта (рис. 6.3).

Полную индукцию в точке A можно найти по принципу суперпозиции – векторным суммированием по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

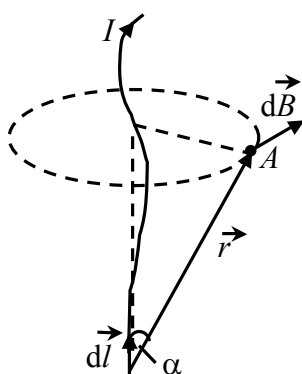


Рис. 6.3. Закон Био-Савара-Лапласа

Для модуля $d\vec{B}$, в соответствии с формулой (6.1), получим выражение

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (6.2)$$

Применим формулу (6.2) для вычисления полей простейших токов. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим по бесконечному прямому проводу (рис. 6.4, а). Точка, в которой мы вычисляем магнитную индукцию, находится на расстоянии b от провода. Из рис. 6.4, а видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставим эти значения в формулу (6.2):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол α для всех элементов бесконечного прямого тока изменяется в пределах от 0 до π . Все $d\vec{B}$ в данной точке имеют одинаковое направление (в нашем случае за чертеж). Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей. Следовательно,

$$B = \int_0^\pi dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \mu_0 \frac{I}{2\pi b}.$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi b}. \quad (6.3)$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей, охватывающих провод (рис. 6.4, б).

Рассмотрим поле, создаваемое током, текущему по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (круговой ток). Найдем магнитную индукцию в центре тока (рис. 6.5). Каждый элемент тока создает в центре ин-

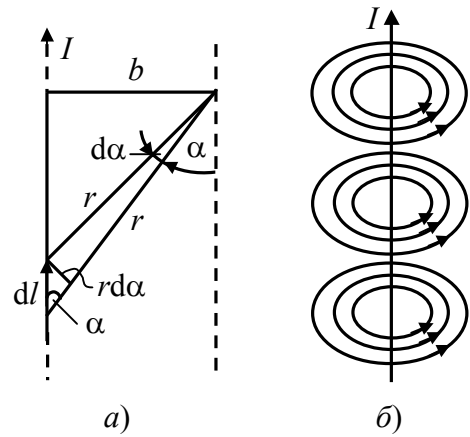


Рис. 6.4. Магнитное поле прямого проводника с током: а) вычисление индукции; б) линии вектора B

дукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. По формуле (6.2)

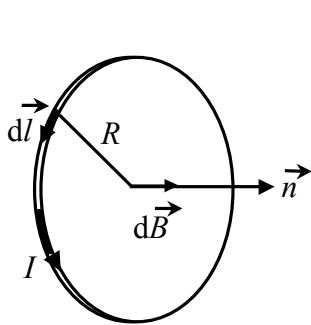


Рис. 6.5. Магнитное поле кругового тока

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$$

($\alpha = \pi/2$). Проинтегрируем это выражение по всему контуру:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Итак, магнитная индукция в центре кругового тока равна

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

6.3. Магнитное поле движущегося заряда

Чтобы найти магнитную индукцию поля, создаваемого одним движущимся зарядом, преобразуем формулу (6.1), заменив силу тока произведением плотности тока на площадь сечения проводника, т.е. $I = jS$. Векторы \vec{j} и $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление. Поэтому можно написать, что

$$I d\vec{l} = S \vec{j} dl, \tag{6.4}$$

Вектор плотности тока можно представить в виде

$$\vec{j} = e' n \vec{v}, \tag{6.5}$$

где n – число носителей в единице объема, \vec{v} – скорость упорядоченного движения носителей, e' – положительный заряд.

Подставим в формулу (6.1) выражение (6.4) и заменим в нем \vec{j} согласно (6.5):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 S dl \cdot ne' \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \tag{6.6}$$

Произведение $Sdl \cdot n$ – это число носителей заряда, заключенных в элементе провода dl . Разделив (6.6) на это число получим магнитную индукцию поля, создаваемого одним зарядом, движущимся со скоростью \vec{v}

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e' \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) справедлива при условии, что $v \ll c$.

Вывод формулы (6.5). Пусть проводник имеет поперечное сечение площадью S (рис.6.6). Заряд каждой частицы равен e' . В объеме проводника, ограниченном сечениями 1 и 2 содержится $nSdl$ частиц, где n – концентрация частиц. Их общий заряд равен $dq = e'nSdl$. Если частицы движутся слева направо со средней скоростью v , то за время $dt = dl/v$ все частицы заключенные в рассматриваемом объеме, пройдут через сечение 2. Поэтому сила тока равна

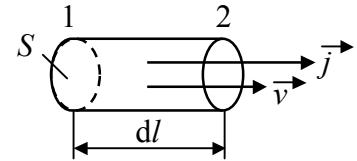


Рис. 6.6. К выводу формулы (6.5)

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e'nSdl}{dt} = e'nvS,$$

откуда следует, что $j = \frac{I}{S} = e'nv$. Для положительно заряженных частиц

$$\vec{j} = e'n\vec{v},$$

т.к. направление вектора плотности тока \vec{j} совпадает с направлением вектора скорости \vec{v} . Таким образом, мы пришли к формуле (6.5).

6.4. Закон полного тока (теорема о циркуляции вектора B)

Магнитное поле создается электрическим током. Следовательно, параметры магнитного поля зависят от тока.

Циркуляцией вектора индукции магнитного поля по замкнутому контуру l называется выражение, определяемое формулой

$$\oint B_l dl,$$

где dl – малый участок контура, B_l – проекция вектора \vec{B} на направление dl .

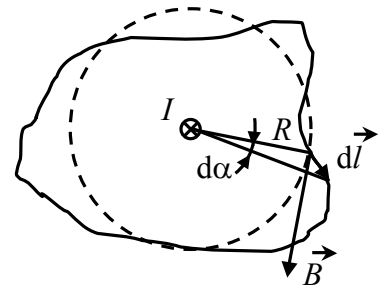


Рис. 6.7. Закон полного тока

Возьмем контур, охватывающий прямой ток, и вычислим для него циркуляцию. Рассмотрим случай, когда контур перпендикулярен к току (рис. 6.7). Ток перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен за чертеж. Пунктирной линией показана линия

индукции магнитного поля. В каждой точке контура вектор \vec{B} направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Заменяем $B_l dl$ на $B dl_B$, где dl_B – проекция перемещения $d\vec{l}$ на направление \vec{B} . Но dl_B можно представить в виде $Rd\alpha$, где R – расстояние от прямого тока до $d\vec{l}$, $d\alpha$ – угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок $d\vec{l}$. Поэтому, учтя выражение (6.3), можно написать

$$B_l dl = B dl_B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} R d\alpha = \mu_0 \frac{I}{2\pi} d\alpha.$$

Таким образом, выражение для циркуляции имеет вид

$$\oint B_l dl = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \oint d\alpha.$$

При обходе по контуру, охватывающему ток, радиальная прямая все время поворачивается в одном направлении, поэтому $\oint d\alpha = 2\pi$. Если ток не охватывается контуром, то при обходе по контуру радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении, а затем в противоположном. Поэтому $\oint d\alpha = 0$. Учитывая этот результат, можно написать

$$\oint B_l dl = \mu_0 I, \quad (6.8)$$

где I – ток, охватываемый контуром. Если контур тока не охватывает, то циркуляция вектора \vec{B} равна нулю. Формула (6.8) справедлива и для тока, текущего по проводнику произвольной формы. При этом контур не обязательно должен лежать в плоскости, перпендикулярной к току.

Если контур охватывает несколько токов, то циркуляция вектора \vec{B} равна их алгебраической сумме:

$$\oint B_l dl = \mu_0 \sum I. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) является математическим выражением закона полного тока, который читается: *циркуляция вектора индукции магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную.*

Вычисляя сумму токов, положительным нужно считать такой ток, направление которого связано с направлением обхода контура правилом правого винта; ток противоположного направления будет отрицательным.

6.5. Магнитное поле соленоида и тороида

Соленоид представляет собой провод, навитый на цилиндрический каркас. Если длина соленоида намного больше его диаметра, то соленоид называют длинным (в пределе – бесконечно длинным).

В отношении создаваемого им магнитного поля соленоид эквивалентен системе одинаковых круговых токов с общей осью. Витки соленоида создают поле, индукция которого в каждой точке внутри соленоида направлена параллельно его оси.

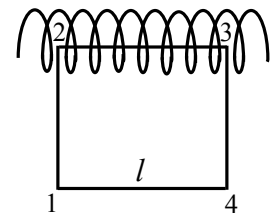


Рис. 6.8. Соленоид

Применим закон полного тока для расчета индукции поля бесконечно длинного соленоида (рис. 6.8).

В качестве замкнутого контура возьмем прямоугольник 1–2–3–4. По формуле (6.9) запишем:

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl = \mu_0 NI,$$

где I – ток в витке, N – число витков, охватываемых контуром. Из четырех интегралов первый и третий равны нулю, так как вектор \vec{B} перпендикулярен к участкам контура, по которым они берутся. Четвертым интегралом также можно пренебречь, поскольку индукция магнитного поля вне соленоида очень мала. Таким образом,

$$\oint B_l dl = \int_2^3 B_l dl = Bl = \mu_0 NI.$$

Если обозначить $n = N/l$ число витков, приходящееся на единицу длины, то индукция магнитного поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 nI. \quad (6.10)$$

Полученный нами результат не зависит от того, на каком расстоянии от оси (но внутри соленоида) находится отрезок 2–3. Если этот отрезок находится

вне соленоида, то охватываемый контуром ток равен нулю, откуда $B = 0$. Таким образом, вне бесконечно длинного соленоида индукция магнитного поля равна нулю, а внутри соленоида поле однородное и имеет величину, определяемую формулой (6.10).

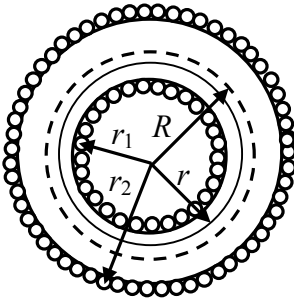


Рис. 6.9. Торойд

Торойд (кольцевая катушка с током) представляет собой соленоид, свернутый в кольцо (рис. 6.9). Пусть $R=(r_1+r_2)/2$ – радиус средней линии тороида, а r – радиус произвольного замкнутого контура, охватывающего витки тороида. Вектор \vec{B} направлен в каждой точке по касательной к контуру. В соответствии с формулой (6.9) можно написать:

$$\oint B_l dl = B \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 \sum I.$$

Сумма токов, охватываемых контуром $\sum I = 2\pi R n I$, тогда

$$\oint B_l dl = 2\pi r B = \mu_0 2\pi R n I,$$

откуда находим индукция магнитного поля внутри тороида:

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}.$$

Если радиус средней линии тороида много больше радиуса его витка, то $R/r \cong 1$ и получается формула, совпадающая с (6.10):

$$B = \mu_0 n I. \tag{6.11}$$

В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений тороида. В разных сечениях поле имеет различное направление, поэтому поле в пределах всего тороида можно считать однородным только условно, имея ввиду модуль вектора \vec{B} .

Глава 7. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТОКИ И ЗАРЯДЫ

7.1. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Закон Ампера

Согласно закону, установленному Ампером, на элемент тока $d\vec{l}$ действует в магнитном поле сила

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (7.1)$$

где \vec{B} – магнитная индукция в том месте, где находится элемент $d\vec{l}$.

Величина силы (7.1) вычисляется по формуле

$$dF = I dl B \sin \alpha, \quad (7.2)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} (рис. 7.1). Направлена сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Направление силы, действующей на ток, удобно определять с помощью *правила левой руки*. Если расположить левую руку так, чтобы вектор \vec{B} «вонзался» в ладонь, а четыре сложенные вместе пальца были направлены вдоль тока, то отставленный в сторону большой палец покажет направление силы.

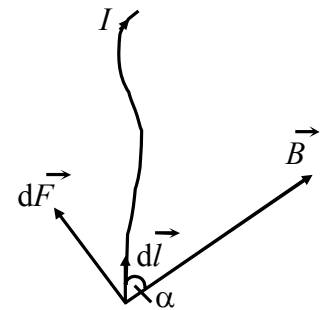


Рис. 7.1. Закон Ампера

Пользуясь законом Ампера, найдем силу взаимодействия двух бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами b (рис. 7.2), то каждый элемент тока I_2 будет находиться в магнитном поле, индукция которого, в соответствии с формулой (6.3), равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}.$$

Угол α между элементами тока I_2 и вектором \vec{B}_1 равен 90° . Следовательно, согласно (7.2) на единицу длины тока I_2 действует сила

$$f_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (7.3)$$

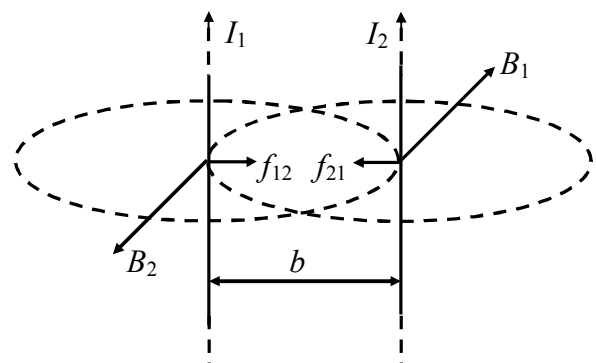


Рис. 7.2. Взаимодействие бесконечно длинных проводников с током

Для силы f_{12} , действующей на единицу длины тока I_1 , получается аналогичное выражение. С помощью правила левой руки можно установить, что при

одинаковом направлении токов проводники притягивают друг друга, а при различном – отталкивают.

На основании закона взаимодействия токов (7.3) устанавливается единица силы тока в СИ – ампер. *Ампер – сила тока, который, проходя по двум длинным прямолинейным параллельным проводникам, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает силу взаимодействия между этими проводниками, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на каждый метр длины.*

7.2. Сила Лоренца

Электрический ток представляет собой совокупность упорядоченного движения заряженных частиц. Поэтому действие магнитного поля на проводник с током есть результат действия поля на движущиеся заряженные частицы внутри проводника.

Силу, действующую на заряженную частицу со стороны магнитного поля, называют *силой Лоренца*. Эту силу можно найти с помощью закона Ампера. Заменив в формуле (7.1) произведение $I d\vec{l}$ на $S\vec{j}dl$, выражению закона Ампера можно придать вид

$$d\vec{F} = Sdl\vec{j} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV,$$

где dV – объем проводника, к которому приложена сила $d\vec{F}$.

Сила, действующая на единицу объема проводника, равна

$$\vec{F}_{\text{ед.об}} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

Учитывая, что $\vec{j} = e'n\vec{v}$, где e' – положительный заряд, получим

$$\vec{F}_{\text{ед.об}} = e'n\vec{v} \times \vec{B}.$$

Эта сила равна сумме сил, приложенных к носителям заряда, заключенным в единице объема. Таких носителей n , следовательно, на один заряд действует сила

$$\vec{F}_{\text{л}} = e'\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.4)$$

Сила (7.4) и есть сила Лоренца. Направлена сила Лоренца перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{B} . Для положительного

заряда e' направление силы Лоренца совпадает с направлением векторного произведения $\vec{v} \times \vec{B}$. В случае отрицательного заряда направления векторов \vec{F}_L и $\vec{v} \times \vec{B}$ противоположны (рис. 7.3).

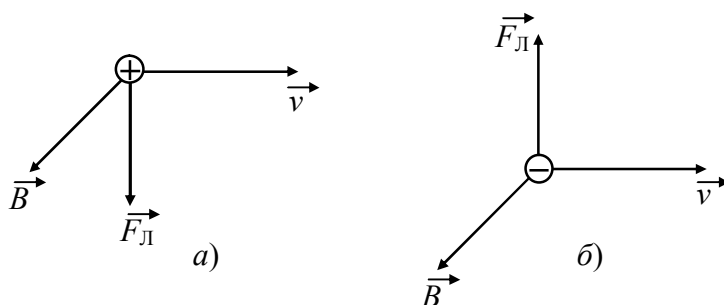


Рис. 7.3. Направление силы Лоренца:
а) положительный заряд; б) отрицательный заряд

Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = e'vB \cdot \sin \alpha, \quad (7.5)$$

где α - угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Поскольку сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости частицы, она *работы над заряженной частицей не совершает*. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

Если на заряженную частицу кроме магнитной силы действует и электрическая сила, то сумма сил будет равна

$$\vec{F}_L = e'\vec{E} + e'\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.6)$$

Силу, определяемую уравнением (7.6), называют *обобщенной силой Лоренца*.

7.3. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Рассмотрим движение частицы с зарядом e' в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленном перпендикулярно начальной скорости частицы (рис. 7.4, а). Сила Лоренца, согласно формуле (7.5) равна $F_L = e'vB$. Эта сила направлена перпендикулярно к скорости частицы и сообщает ей центростремительное ускорение $a = v^2/R$, где R – радиус окружности, по которой движется частица. Согласно 2 закону Ньютона $m \frac{v^2}{R} = e'vB$, откуда следует, что

$$R = \frac{mv}{e'B}, \quad (7.7)$$

где m – масса частицы.

Итак, в случае, когда вектор скорости \vec{v} перпендикулярен вектору магнитной индукции \vec{B} , заряженная частица движется по окружности, радиус которой зависит от скорости частицы, индукции магнитного поля и отношения заряда частицы к ее массе. Отношение заряда частицы к ее массе $\left(\frac{e'}{m}\right)$ называют *удельным зарядом частицы*.

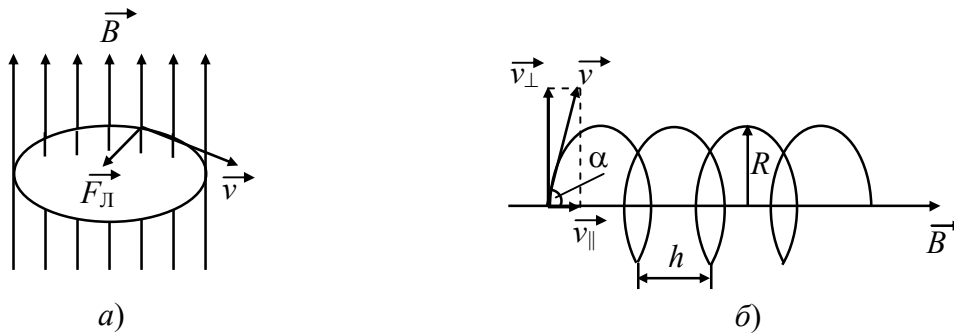


Рис. 7.4. Движение заряженной частицы в магнитном поле:
 а) вектор скорости перпендикулярен вектору индукции,
 б) вектор скорости составляет угол α с вектором индукции

Чтобы найти период обращения частицы T по окружности, разделим длину окружности $l = 2\pi R$ на скорость частицы $v = \frac{e'BR}{m}$:

$$T = 2\pi \frac{m}{e' B}. \quad (7.8)$$

Как видно из формулы (7.8), период обращения частицы не зависит от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и величиной индукции магнитного поля.

Выясним характер движения частицы в том случае, когда ее скорость образует с направлением магнитного поля угол $\alpha \neq 90^\circ$. Разложим вектор скорости \vec{v} на две составляющие: составляющую, перпендикулярную линиям вектора магнитной индукции $v_\perp = v \cdot \sin \alpha$ и составляющую, параллельную линиям индукции $v_\parallel = v \cdot \cos \alpha$.

Сила Лоренца перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{B} , следовательно, ее составляющая в направлении вектора \vec{B} равна нулю и поэтому составляющая скорости v_{\parallel} не изменяется. Таким образом, движение частицы можно представить как наложение двух движений: 1) перемещения вдоль линий вектора \vec{B} с постоянной скоростью $v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha$ и 2) вращения в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} .

Радиус вращения равен

$$R = \frac{mv \cdot \sin \alpha}{e' B}. \quad (7.9)$$

Траектория движения представляет собой спираль, ось которой совпадает с направлением вектора \vec{B} (рис. 7.4, б). Шаг спирали равен $h = v_{\parallel} T$, т.е.

$$h = 2\pi \frac{m}{e' B} \cdot v \cos \alpha. \quad (7.10)$$

Формулы (7.9) и (7.10) описывают параметры спирали: радиус витка спирали R и ее шаг h .

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы. Если $e' > 0$, то спираль закручивается против часовой стрелки, если заряд отрицательный, то спираль закручивается по часовой стрелки. Предполагается, что мы смотрим на спираль вдоль направления вектора \vec{B} ; частица при этом летит от нас, если $\alpha < 90^\circ$, и на нас, если $\alpha > 90^\circ$.

7.4. Эффект Холла

Эффектом Холла называется возникновение поперечного электрического поля в проводнике (или полупроводнике) с током при помещении его в магнитное поле. Это явление было обнаружено Холлом в 1880 г. для металлической пластины.

Пусть носителями тока являются положительные заряды (рис. 7.5). Под действием силы Ампера у задней грани пластины будут скапливаться положительные носители, а у передней грани – отрицательные носители. Перераспре-

деление зарядов будет происходить до тех пор, пока сила со стороны возникшего электрического поля F_e не уравнивает силу Лоренца, т.е. $F_e = F_L$, или

$$e'E = e'vB \Rightarrow E = v \cdot B.$$

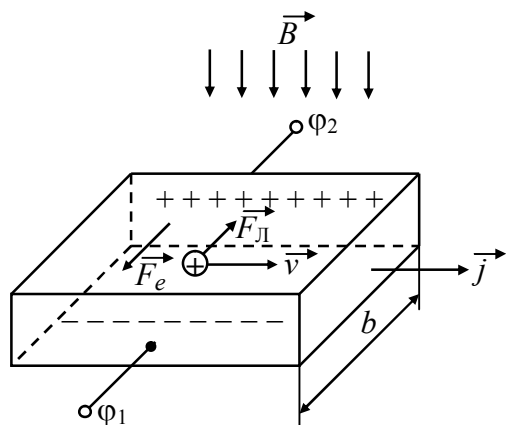


Рис. 7.5. Эффект Холла

Холловская разность потенциалов равна $\Delta\varphi = v \cdot B \cdot b$. Из соотношения для плотности тока $j = e'nv$ выразим скорость носителей:

$$v = \frac{j}{e'n},$$

тогда получим выражение для холловской разности потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{j}{e'n} bB = RbjB, \quad (7.11)$$

где $R = \frac{1}{e'n}$ – постоянная Холла.

Как видно из формулы (7.11) холловская разность потенциалов пропорциональна магнитной индукции, что позволяет на основе эффекта Холла создавать датчики для измерения магнитного поля.

Если носители заряда имеют отрицательный знак, то направление силы Лоренца не изменится т.к. одновременно меняются направление вектора скорости \vec{v} и знак заряда. Поэтому у задней грани будут скапливаться отрицательные заряды, а у передней – положительные заряды. Таким образом, по знаку эффекта Холла можно определять знак носителей тока.

7.5. Рамка с током в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольную рамку со сторонами a и b , по которой течет ток I . Рамка находится в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции \vec{B} которого составляет угол α с нормалью \vec{n} к плоскости рамки. Рамка может вращаться относительно вертикальной оси OO (рис. 7.6). Силы Ампера, действующие на горизонтальные стороны рамки, равны по величине, противоположны по направлению и уравниваются:

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = IBb.$$

Силы, действующие на вертикальные стороны рамки, также по модулю равны друг другу

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = IBa,$$

противоположно направлены и образуют пару сил. Как известно из механики, пара сил создает вращающий момент

$$M = IaBb \sin \alpha = IB S \sin \alpha = p_m B \sin \alpha, \quad (7.12)$$

где $S = ab$ – площадь рамки, $p_m = IS$ – магнитный момент рамки.

Формулу (7.12) можно записать в векторной форме:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (7.13)$$

Под действием момента (7.13) рамка будет поворачиваться относительно оси OO и установится в положение равновесия. При этом магнитный момент рамки будет ориентирован в направлении магнитного поля, т.е. в направлении вектора \vec{B} . В положении равновесия на стороны рамки будут действовать силы Ампера, стремящиеся растянуть или сжать рамку.

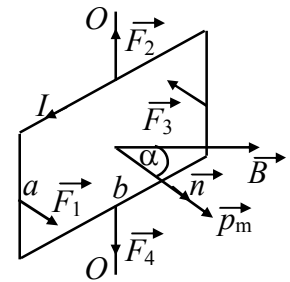


Рис. 7.6. Рамка с током в магнитном поле

Вычислим потенциальную энергию, которой обладает рамка с током в однородном магнитном поле. Для этого найдем работу, которую нужно совершить против сил поля, чтобы увеличить угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} на $d\alpha$:

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Поскольку работа dA идет на увеличение потенциальной энергии рамки, то можно написать

$$dW = p_m B \sin \alpha d\alpha,$$

или

$$W = \int dW = -p_m B \cos \alpha + \text{const}.$$

Если $\text{const} = 0$, то потенциальная энергия рамки равна

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (7.14)$$

Согласно (7.14) потенциальная энергия рамки с током минимальна и равна $W_{\min} = -p_m B$ тогда, когда ее магнитный момент рамки направлен по направлению поля, $W_{\min} = -p_m B$. Максимальной энергией, равной $W_{\max} = p_m B$, рамка обладает тогда, когда ее магнитный момент направлен против направления поля. Когда угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} равен 90° , рамка имеет нулевое значение потенциальной энергии.

В неоднородном магнитном поле силы, действующие на стороны рамки попарно не равны друг другу. Кроме вращательного момента возникает результирующая сила, способная сообщить ей поступательное движение. Рамка будет либо втягиваться в область более сильного поля (если векторы \vec{p}_m и \vec{B} направлены в одну сторону), либо выталкиваться из поля (если векторы \vec{p}_m и \vec{B} направлены в противоположные стороны).

7.6. Работа, совершаемая при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле

Элементарным магнитным потоком через площадку dS называется физическая величина $d\Phi$, равная

$$d\Phi = B dS \cos \alpha,$$

где α – угол между нормалью к площадке \vec{n} и вектором \vec{B} (рис. 7.7).

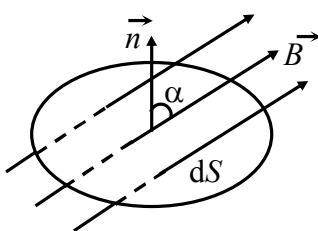


Рис. 7.7. Элементарный магнитный поток

Магнитный поток Φ через всю поверхность S определяется суммированием (интегрированием) элементарных потоков:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B \cos \alpha dS = \int_S B_n dS,$$

где B_n – нормальная составляющая вектора \vec{B} .

В системе СИ магнитный поток измеряется в веберах (Вб). 1 Вб – это магнитный поток в однородном поле с индукцией 1 Тл через площадку 1 м^2 , перпендикулярную вектору индукции поля.

Пусть проводник с током перемещается в однородном магнитном поле, линии которого перпендикулярны проводнику (рис. 7.8, а). На проводник действует сила Ампера

$$F = IBl,$$

где l – длина проводника. На пути dx эта сила совершит работу

$$dA = F dx = IBldx = IBdS = I d\Phi,$$

где $dS = ldx$, $d\Phi = BdS$ – поток магнитной индукции, пересекаемый проводником при его движении.

Следовательно,

$$A = I \int d\Phi = I\Phi_{\text{пересеч.}} \quad (7.15)$$

т.е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

Формула (7.15) будет справедливой и в том случае, когда линии магнитной индукции не перпендикулярны проводнику, а также при движении проводника в неоднородном магнитном поле.

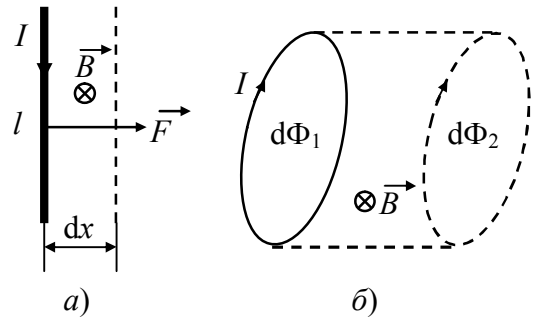


Рис. 7.8. Проводник (а) и контур (б) с током в магнитном поле

Вычислим работу по перемещению замкнутого контура с током I в магнитном поле. Предположим, что контур перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение, изображенное на рис. 7.8, б пунктирной линией. Элементарная работа при этом будет равна

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

где $d\Phi_1$ и $d\Phi_2$ – магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положении соответственно. Обозначим $d\Phi' = d\Phi_2 - d\Phi_1$ – изменение магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром с током. Таким образом,

$$dA = Id\Phi'. \quad (7.16)$$

Проинтегрировав выражение (7.16), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi' = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi, \quad (7.17)$$

т.е. работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром. Формула (7.17) остается справедливой для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

Отметим, что работа (7.17) совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля (это поле остается неизменным), а за счет источника тока, поддерживающего постоянной силу тока I .

7.7. Теорема Гаусса для магнитного поля

Как показывает опыт, линии вектора \vec{B} не имеют начала или конца, они всегда замкнуты.

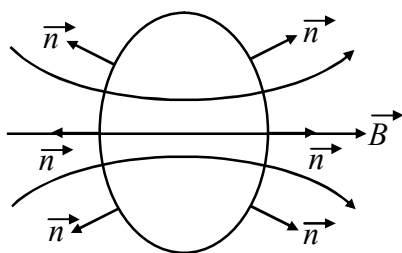


Рис. 7.9. Магнитный поток через замкнутую поверхность

Если мы рассмотрим поток вектора \vec{B} через произвольную замкнутую поверхность, то заметим, что сколько раз линии вектора \vec{B} входят в поверхность, то столько же раз и выходят из нее (рис. 7.9). Поэтому

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (7.18)$$

Соотношение (7.18) выражает теорему Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Глава 8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

8.1. Магнитные свойства вещества

Всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют молекулярные токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает магнитное поле. Если плоскости, в которых циркулируют эти токи, расположены хаотично (вследствие теплового движения молекул), то результирующее магнитное поле

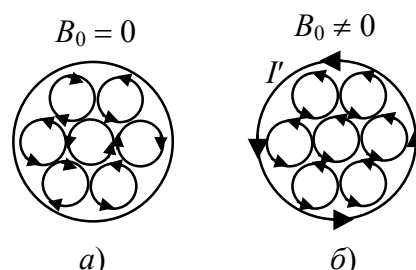


Рис. 8.1. Молекулярные токи:
а) при отсутствии внешнего поля,
б) при наличии внешнего поля

равно нулю (рис. 8.1, а) и магнитные свойства не проявляются. Под действием внешнего поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, и вещество намагничивается – его суммарный магнитный момент не равен нулю (рис. 8.1, б).

Намагниченность магнетика характеризуют векторной величиной, которая называется *вектором намагничивания* или *намагниченностью*:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V},$$

где V – малый объем в окрестности рассматриваемой точки, \vec{p}_m – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме V . Единица намагниченности в СИ $[\vec{J}] = \text{А/м}$.

Если обозначить через \vec{B}' магнитное поле, создаваемое намагниченным веществом, а \vec{B}_0 – магнитное поле, создаваемое внешними токами, то результирующее поле в магнетике \vec{B} равно:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Напряженностью магнитного поля \vec{H} называется физическая величина, определяемая соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (8.1)$$

Единица напряженности магнитного поля в СИ $[\vec{H}] = \text{А/м}$.

Вектор намагничивания \vec{J} связан с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (8.2)$$

где χ – безразмерная физическая величина, которая называется *магнитной восприимчивостью*.

Подставив в формулу (8.1) выражение (8.2), получим

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

откуда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (8.3)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi, \quad (8.4)$$

называется *магнитной проницаемостью вещества*.

Магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

В отличие от диэлектрической проницаемости ϵ , магнитная проницаемость может быть как больше единицы, так и меньше единицы.

Подставив (8.4) в (8.3), приходим к соотношению

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) дает связь между векторами \vec{B} и \vec{H} .

При расчете магнитного поля в среде, нужно в соответствующие формулы, определяющие магнитное поле в вакууме, ввести магнитную проницаемость μ . Например, закон Био-Савара-Лапласа приобретет вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

а закон полного тока (теорема о циркуляции вектора \vec{H}) запишется так:

$$\oint H_i dl = \sum I. \quad (8.6)$$

8.2. Магнитные моменты электронов и атомов

Согласно теории, развитой в 1913 г. Нильсом Бором, электроны в атомах движутся по круговым орбитам. Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона (рис. 8.2) переносится в единицу времени заряд $e\nu$, где ν – число оборотов электрона в секунду. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток $I = e\nu$.

Магнитный момент тока равен $p_m = IS = e\nu\pi r^2$, где r – радиус орбиты электрона. Так как скорость электрона на орбите равна $v = 2\pi r\nu$, то можно написать, что

$$p_m = \frac{evr}{2}. \quad (8.7)$$

Момент (8.7) называют *орбитальным магнитным моментом электрона*. Направление вектора \vec{p}_m образует с направлением движения электрона левовинтовую систему.

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = mvr, \quad (8.8)$$

где m – масса электрона. Вектор \vec{L} называют *орбитальным механическим моментом электрона*. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов \vec{p}_m и \vec{L} противоположны.

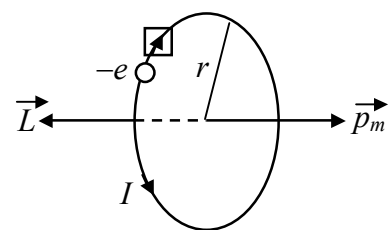


Рис. 8.2. Движение электрона по круговой орбите

Отношение p_m/L называют *гиромагнитным отношением*. Для электрона оно равно

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}. \quad (8.9)$$

Знак минус в формуле (8.9) означает, что векторы \vec{p}_m и \vec{L} направлены в противоположные стороны.

Вследствие вращения электрона вокруг ядра наблюдаются так называемые *магнитомеханические явления*, заключающиеся в том, что намагничивание магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничивание. Существование первого явления было доказано Эйнштейном и де Гаазом, второго – Барнеттом.

Полученное в результате опытов гиромагнитное отношение оказалось равно e/m , т.е. в 2 раза больше ожидаемого.

Это объясняется тем, что кроме орбитальных моментов (8.7) и (8.8) электрон обладает собственным механическим L_s и магнитным p_{ms} моментами, для которых гиромагнитное отношение равно

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}, \quad (8.10)$$

т.е. совпадает с экспериментальным. Собственный механический момент электрона получил название *спин*. В настоящее время принимается, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются свойствами электрона (как заряд и масса).

Спином обладает не только электрон, но и другие частицы. Спин элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным величины

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

В частности, для электрона $L_s = \frac{1}{2}\hbar$, т.е. спин электрона равен $\frac{1}{2}$.

В соответствии с (8.10) собственный магнитный момент электрона равен

$$p_{ms} = -\frac{e}{m}L_s = -\frac{e\hbar}{2m}.$$

Величину

$$\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл},$$

называют *магнетон Бора*. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых магнитных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра. Однако, магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов и ими пренебрегают, считая, что магнитный момент атома (молекулы) \vec{p}_a равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}.$$

Экспериментальное определение магнитных моментов атомов и молекул было осуществлено Штерном и Герлахом. Опыт показал, что углы, под которыми магнитные моменты ориентируются по отношению к магнитному полю, могут иметь лишь дискретные значения, т.е. проекции магнитного момента на направление поля квантуются. Для магнитных моментов измерения дали значения порядка нескольких магнетонов Бора. У некоторых атомов магнитный момент отсутствовал.

8.3. Диамагнетики и парамагнетики

Пусть электрон в атоме движется по круговой орбите. Если орбита электрона ориентирована относительно вектора магнитной индукции внешнего поля \vec{B} произвольным образом, составляя с ним угол α (рис. 8.3), то она приходит в такое движение вокруг вектора \vec{B} , при котором вектор магнитного момента \vec{p}_m , сохраняя постоянным угол α , вращается вокруг вектора \vec{B} с некоторой угловой скоростью. Такое движение называется *прецессией*. Прецессию вокруг вертикальной оси, проходящей через точку

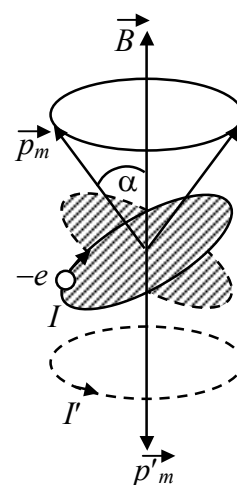


Рис. 8.3. Прецессия электронной орбиты

опоры, совершает, например, волчок при замедлении движения.

Таким образом, электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля \vec{p}'_m , направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название *диамагнитного эффекта*, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются *диамагнетиками*.

В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетик немагнитен, поскольку в данном случае магнитные моменты электронов компенсируются, и суммарный магнитный момент атома (он равен векторной сумме магнитных моментов составляющих атом электронов) равен нулю.

К диамагнетикам относятся золото, цинк, висмут, ртуть, медь, большинство органических соединений, смолы, углерод и т.д. Магнитная восприимчивость χ диамагнетиков имеет малые отрицательные значения и не зависит от температуры. Стержень из диамагнетика, помещенный между полюсами постоянного магнита, выталкивается из магнитного поля.

Парамагнетики – это вещества, которые намагничиваются во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнетиков при отсутствии внешнего поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов атомов *по полю*. Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. При вы-

ключении внешнего поля парамагнетик размагничивается, т.к. за счет теплового движения нарушается ориентация магнитных моментов.

К парамагнетикам относятся платина, алюминий, калий, натрий, литий и т. д. Магнитная восприимчивость χ парамагнетиков имеет очень малые, но положительные значения.

8.4. Ферромагнетики

Особый класс магнетиков образуют вещества, обладающие намагниченностью даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Эти магнетики получили название *ферромагнетиков*. К их числу принадлежат железо (от него и идет название «ферромагнетизм»), никель, кобальт, гадолиний, а также сплавы и соединения марганца.

Ферромагнетики – сильномагнитные вещества. Их намагниченность значительно превосходит намагниченность диамагнетиков и парамагнетиков.

Если намагниченность слабомагнитных веществ изменяется с напряженностью поля линейно, то намагниченность J ферромагнетиков зависит от напряженности H внешнего поля сложным образом. На рис. 8.4. приведена кривая намагничивания железа, магнитный момент которого первоначально был равен нулю (основная кривая намагничивания). Кривая намагничивания железа была впервые исследована А. Г. Столетовым.

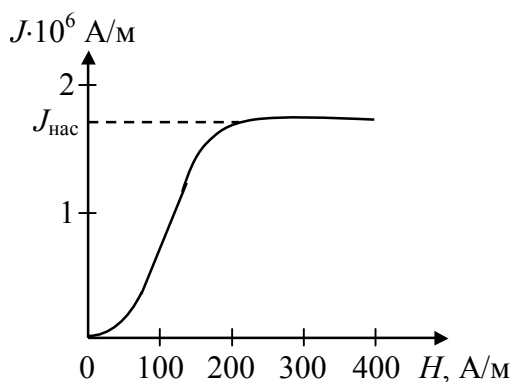


Рис. 8.4. Основная кривая намагничивания железа

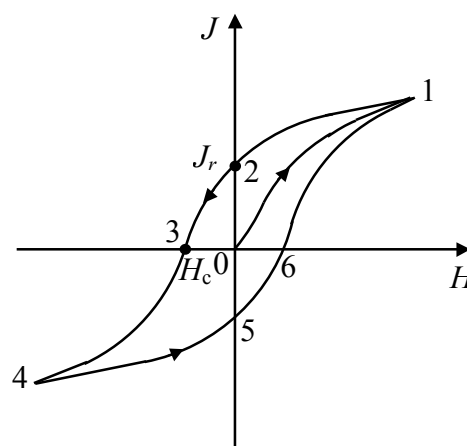


Рис. 8.5. Магнитный гистерезис

Характерная особенность ферромагнетика состоит в том, что зависимость намагниченности J от напряженности внешнего магнитного поля H (следова-

тельно, и зависимость индукции магнитного поля B от напряженности H) определяется предысторией намагничивания. Это явление получило название *магнитного гистерезиса*. Отметим, что магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость ферромагнетиков зависит от напряженности внешнего поля.

Если ненамагниченный ферромагнетик поместить во внешнее магнитное поле, то зависимость намагниченности J от напряженности внешнего поля H будет иметь следующий вид (рис.8.5). При увеличении напряженности H от нуля намагниченность J сначала быстро растет, а затем наблюдается насыщение (кривая 0-1), если после достижения насыщения уменьшать поле до нуля (кривая 1-2), то намагниченность уменьшится до значения J_r , называемого *остаточной намагниченностью* (магнетик в этом состоянии является постоянным магнитом). Если затем включить поле противоположного направления и начать его увеличивать, то при значении напряженности H_c , которое называется *коэрцитивной силой*, намагниченность исчезнет (кривая 2-3). При дальнейшем увеличении поля будет наблюдаться насыщение (кривая 3-4), если после достижения насыщения уменьшить поле до нуля (кривая 4-5), то ферромагнетик превратится в постоянный магнит противоположного направления. Если вновь изменить направление поля и начать поле увеличивать, то ферромагнетик сначала размагнитится (кривая 5-6), а затем намагнитится до насыщения (кривая 6-1). В циклически изменяющихся полях описанные процессы будут периодически повторяться.

По величине коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на жесткие (большая коэрцитивная сила) и мягкие (малая коэрцитивная сила). Жесткие ферромагнетики используются для изготовления постоянных магнитов, а из мягких ферромагнетиков делают сердечники электромагнитов.

Ферромагнетики обладают еще одной особенностью: для каждого ферромагнетика существует определенная температура, называемая точкой Кюри, при нагревании выше которой ферромагнетик утрачивает остаточную намагниченность и становится обычным парамагнетиком.

Процесс намагничивания ферромагнетика сопровождается изменением его линейных размеров и объема. Это явление называется *магнитострикцией*. Величина и знак эффекта зависят от напряженности магнитного поля, от природы ферромагнетика и от ориентации его кристаллографических осей относительно внешнего поля.

Свойства ферромагнетиков объясняют их доменной структурой. Домены – это малые области внутри ферромагнетика, в пределах которых он обладает спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью. В пределах домена ферромагнетик намагничен до насыщения. В ненамагниченном ферромагнетике магнитные моменты доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому ферромагнетик не проявляет магнитных свойств. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты доменов ориентируются в направлении этого поля и ферромагнетик приобретает магнитный момент – намагничивается. При уменьшении поля до нуля ферромагнетики сохраняют остаточную намагниченность т.к. тепловое движение молекул, при температурах ниже точки Кюри, не может дезориентировать магнитные моменты доменов. При нагревании ферромагнетика выше точки Кюри, интенсивное тепловое движение молекул дезориентирует магнитные моменты доменов, и ферромагнетик утрачивает намагниченность. Существование доменов было доказано экспериментально, линейные размеры доменов составляют $10^{-6} - 10^{-4}$ м.

8.5. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим условия, которым удовлетворяют векторы магнитной индукции \vec{B} и напряженности магнитного поля \vec{H} на границе раздела двух магнетиков.

Пусть магнитная проницаемость первого магнетика μ_1 , второго магнетика μ_2 . Обозначим B_1 – индукция и H_1 – напряженность магнитного поля в первом магнетике, B_2 и H_2 – индукция и напряженность магнитного поля соответственно во втором магнетике.

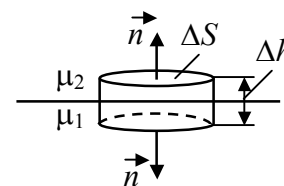


Рис. 8.6. Прямоугольный цилиндр малой высоты

Выделим на границе раздела магнетиков замкнутую цилиндрическую поверхность с малой высотой Δh и площадью основания ΔS (рис. 8.6).

Применим теорему Гаусса для потока вектора \vec{B} (7.18):

$$B_{n2}\Delta S - B_{n1}\Delta S = 0,$$

или

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (8.11)$$

где B_{n1} и B_{n2} – проекции вектора \vec{B} на внешнюю нормаль \vec{n} . Поток вектора \vec{B} через боковую поверхность цилиндра ввиду малости пренебрегаем.

Из уравнения (8.11) следует, что нормальные составляющие векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 одинаковы.

Заменив, согласно $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ проекции B_{n1} и B_{n2} проекциями вектора \vec{H} , умноженными на $\mu\mu_0$, получим

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (8.12)$$

Выделим на границе раздела магнетиков небольшой прямоугольный контур $abcd$ (рис. 8.7), в котором стороны ab и cd пренебрежимо малы по сравнению с l . Применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} (8.6), считая вклад в циркуляцию на участках ab и cd пренебрежимо малыми:

$$-H_{\tau1}l + H_{\tau2}l = 0.$$

Поэтому

$$H_{\tau1} = H_{\tau2}. \quad (8.13)$$

где $H_{\tau1}$ и $H_{\tau2}$ – проекции вектора \vec{H} на направление обхода контура $\vec{\tau}$, показанное на рис. 8.7 стрелками (по часовой стрелке).

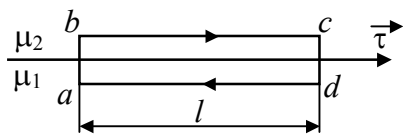


Рис. 8.7. Контур $abcd$. Стрелки показывают направление обхода

Из уравнения (8.13) следует, что тангенциальные составляющие векторов \vec{H}_1 и \vec{H}_2 одинаковы по обе границы раздела магнетиков.

Заменив, согласно (8.5) проекции $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$ проекциями вектора \vec{B} , деленными на $\mu\mu_0$, получим

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (8.14)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} (B_n) и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} (H_τ) изменяются непрерывно (без скачка), а тангенциальная составляющая вектора \vec{B} (B_τ) и нормальная составляющая вектора \vec{H} (H_n) претерпевают скачок.

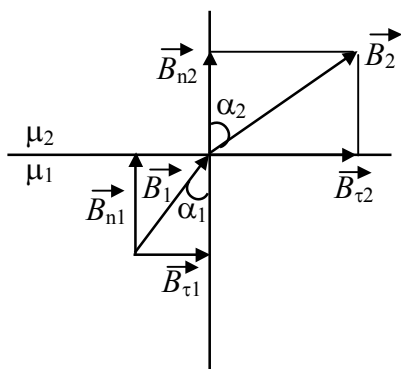


Рис. 8.8. Преломление линий вектора индукции на границе раздела двух магнетиков ($\mu_2 > \mu_1$)

вают скачок.

Из условий (8.11) – (8.14) для составляющих векторов \vec{B} и \vec{H} следует, что линии этих векторов преломляются.

Найдем связь между углами α_1 и α_2 (рис. 8.8). Согласно (8.11) и (8.14) $B_{n1} = B_{n2}$ и $\mu_1 B_{\tau 2} = \mu_2 B_{\tau 1}$. Разложим векторы \vec{B}_1 и \vec{B}_2 у границы раздела на тангенциальные и нормальные составляющие. Из рис. 8.8 следует, что

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{\tau 2} / B_{n2}}{B_{\tau 1} / B_{n1}}.$$

Учитывая записанные выше условия, получим закон преломления линий индукции \vec{B} (а значит, и линий напряженности \vec{H}):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (8.15)$$

Формула (8.15) показывает, что, входя в магнетик с большей магнитной проницаемостью, линии \vec{B} и \vec{H} удаляются от нормали.

Глава 9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

9.1. Закон электромагнитной индукции Фарадея

В 1831 г. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, возникает электрический ток. Это явление назвали электромагнитной индукцией.

Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение магнитного потока Φ , и определяется лишь скоростью изменения потока Φ , т.е. значением $d\Phi/dt$.

Рассмотрим один из опытов Фарадея, позволяющих понять явление электромагнитной индукции.

Концы металлической проволоки, навитой на катушку, подключались к гальванометру (рис. 9.1). При движении магнита в сторону катушки стрелка гальванометра G отклонялась. Это значит, что в витках катушки возбуждалась ЭДС и возникал ток, названный Фарадеем *индукционным током*. Если магнит выводить из катушки, то стрелка гальванометра отклонялась в противоположную сторону. При остановке магнита стрелка возвращалась в нулевое положение.

Тот же эффект можно наблюдать, если магнит держать неподвижно, а катушку двигать. При движении магнита или катушки изменяется магнитный поток, пронизывающий витки катушки. Явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, называется *электромагнитной индукцией*.

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.1)$$

ЭДС электромагнитной индукции, возникающая в замкнутом проводящем контуре, прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур.

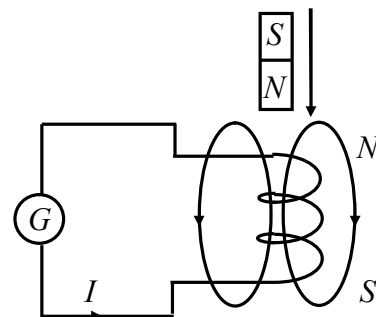


Рис. 9.1. Опыт Фарадея

Явление электромагнитной индукции наблюдается и при движении проводника в магнитном поле или в неподвижном проводнике при изменении магнитного поля.

Знак минус в формуле (9.1) обусловлен правилом Ленца: *индукционный ток направлен так, чтобы своим магнитным полем противодействовать изменению магнитного потока, вызвавшего индукционный ток.*

При определении направления индукционного тока в проводнике удобно пользоваться *правилом правой руки*: если силовые линии магнитного поля входят в ладонь, а отогнутый большой палец показывает направление движения проводника, то четыре вытянутые в той же плоскости пальца показывают направление индукционного тока.

Индукционные токи возникают не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти токи оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются *вихревыми токами*. Их также называют *токами Фуко* – по имени первого исследователя.

Вихревые токи вызывают нагревание проводников. Поэтому для уменьшения потерь на нагревание сердечники трансформаторов и якоря генераторов делают не сплошными, а изготавливают из тонких пластин, отделенных одна от другой слоями изолятора и устанавливают их так, чтобы вихревые токи были направлены поперек пластин.

Теплота, выделяемая токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах. В переменном высокочастотном магнитном поле в металле возникают интенсивные вихревые токи, способные разогреть его до температуры плавления. Такой способ позволяет плавить металлы в вакууме, в результате чего получают сверхчистые материалы.

9.2. Явление самоиндукции. Индуктивность

Самоиндукцией называется возникновение ЭДС индукции в катушке или контуре вследствие изменения в них электрического тока. Эта ЭДС называется *электродвижущей силой самоиндукции*.

Ток и создаваемый им магнитный поток пропорциональны друг другу:

$$\Phi = Li, \quad (9.2)$$

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура* (катушки, проводника). Индуктивность контура зависит от его размеров, формы и магнитной проницаемости среды, в которой он находится.

В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн). 1 Гн – это индуктивность такой катушки (контура), в которой при равномерном изменении тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В.

Определение индуктивности как коэффициента пропорциональности между током и магнитным потоком называется *статическим* определением индуктивности.

Подставив выражение (9.2) в (9.1) и считая $L = \text{const}$, получим

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (9.3)$$

Формула (9.3) дает возможность определить индуктивность как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей ЭДС. Такое определение индуктивности называется *динамическим* определением.

В качестве примера определим индуктивность длинного соленоида.

Если по соленоиду течет ток i , то полный магнитный поток сквозь соленоид (потокосцепление) Ψ равен

$$\Psi = Li, \quad (9.4)$$

где $\Psi = N\Phi$, N – число витков соленоида. С другой стороны,

$$\Psi = N\Phi = NBS, \quad (9.5)$$

где N – число витков соленоида; $\Phi = BS$ – магнитный поток, пронизывающий каждый виток; S – площадь поперечного сечения соленоида.

Магнитная индукция длинного соленоида

$$B = \mu\mu_0 ni, \quad (9.6)$$

где $n = N/l$ – число витков на единицу длины соленоида, μ – магнитная проницаемость сердечника соленоида.

Из уравнений (9.4) – (9.6) получим

$$L = \mu\mu_0 NnS = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (9.7)$$

где $V = Sl$ – объем соленоида.

В соответствии с формулой (9.7) индуктивность соленоида зависит от его объема V , числа витков n и магнитной проницаемости сердечника μ .

9.3. Ток при замыкании и размыкании цепи

Ток самоиндукции возникает в электрической цепи, содержащей сопротивление R , индуктивность L и источник тока с ЭДС ε (рис.9.2). Такой ток называется *экстратокком самоиндукции*.

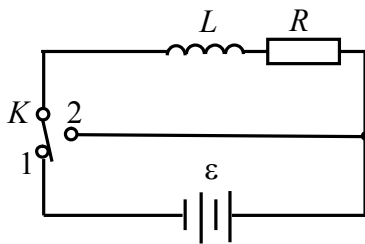


Рис. 9.2. Электрическая цепь с элементами L , R , ε

В случае, когда ключ K занимает положение 1, по цепи протекает постоянный ток I_0 . В соответствии с законом Ома для замкнутой цепи

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Разомкнем цепь, переведя ключ в положение 2. При этом ток начнет уменьшаться. В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея в катушке возникает ЭДС самоиндукции ε_s .

По 2-му правилу Кирхгофа падение напряжения iR равно, в данном случае, ЭДС самоиндукции: $iR = \varepsilon_s$. Так как $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$, то

$$iR = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя это однородное дифференциальное уравнение, получим

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt \Rightarrow \ln i = -\frac{R}{L} t + \ln C,$$

откуда следует закон убывания тока i в цепи при ее размыкании:

$$i = C e^{-t/\tau}.$$

Величина $\tau = L/R$ называется *временем релаксации*, т.е. временем, за которое ток в цепи уменьшается в e раз.

Постоянную интегрирования C определим из начальных условий. Пусть в момент размыкания цепи ($t = 0$), ток был равен I_0 . Тогда $i(0) = I_0$ и $C = I_0$. Тогда

$$i = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (9.8)$$

Таким образом, при отключении источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону (9.8) и определяется кривой 1 на рис. 9.3.

Чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление, тем больше τ и, следовательно, тем медленнее уменьшается ток в цепи при ее размыкании.

Теперь замкнем цепь, переведя ключ K из положения 2 в положение 1. Сила тока в цепи станет возрастать, поэтому в катушке возникнет

ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$. В соответствии со 2-м правилом Кирхгофа падение напряжения в цепи равно

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_s \Rightarrow iR + L \frac{di}{dt} = \varepsilon.$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Общее решение такого уравнения может быть представлено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $i = i_{общ}^{однор} + i_{част}^{неоднор}$. В данном случае частное решение неоднородного уравнения легко установить. Оно равно $I_0 = \varepsilon/R$, где I_0 – установившийся ток (при $t \rightarrow \infty$).

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения мы уже нашли. Оно представляет собой функцию $i = C e^{-t/\tau}$. Таким образом, можно написать

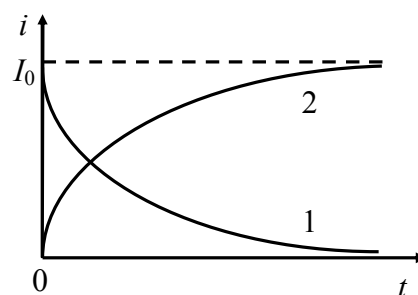


Рис. 9.3. Ток при замыкании (2) и размыкании (1) цепи

$$i = I_0 + C e^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования найдем из начальных условий. Пусть замыкание цепи происходит в момент времени $t = 0$, при этом ток $I(0) = 0$. Тогда

$$I(0) = I_0 + C; 0 = I_0 + C \Rightarrow C = -I_0.$$

Следовательно, при замыкании цепи ток возрастает по закону:

$$i = I_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (9.9)$$

Таким образом, при включении источника тока сила тока возрастает по экспоненциальному закону (9.9) и определяется кривой 2 на рис. 9.3. Сила тока возрастает от начального значения $I = 0$ и асимптотически стремится к установившемуся значению $I_0 = \varepsilon/R$. Скорость нарастания определяется тем же временем релаксации $\tau = L/R$, что и убывание тока.

Следует иметь в виду, что контур, содержащий большую индуктивность, нельзя резко размыкать, так как это приведет к возникновению значительной ЭДС самоиндукции и вызовет пробой изоляции или выведет из строя измерительные приборы. Если в контур вводить сопротивление постепенно, то ЭДС самоиндукции не достигнет больших значений.

9.4. Взаимная индукция

На рис. 9.4 показаны два близко расположенных контура. Сплошными стрелками изображены линии магнитного поля тока i_1 , а пунктирными – тока i_2 .

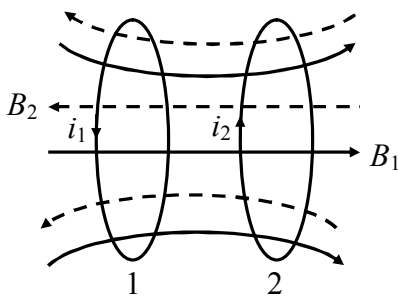


Рис. 9.4. Связанные контуры

Если сила тока в контуре 1 изменяется, то изменяется магнитный поток $\Psi_2 = L_{21}i_1$, пронизывающий контур 2, и в нем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Аналогично, при изменении тока i_2 во втором контуре, изменяется магнитный поток $\Psi_1 = L_{12}i_2$, пронизывающий контур 1, и в нем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Контур 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется *взаимной индукцией*.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются *взаимной индуктивностью*. Расчет показывает, что $L_{12} = L_{21}$. Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей среды.

Найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник (рис. 9.5). Индукция магнитного поля, создаваемого первой катушкой с числом витков N_1 , током i_1 , и магнитной проницаемостью μ сердечника $B = \mu\mu_0 \frac{N_1 i_1}{l}$, где l – длина средней линии сердечника.

Магнитный поток через один виток второй катушки равен $\Phi_2 = BS = \mu\mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} S$.

Тогда полный магнитный поток через вторичную обмотку, содержащую N_2 витков,

$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S i_1$. Поток Ψ создается то-

ком i_1 , поэтому взаимная индуктивность

$$L_{21} = \frac{\Psi}{i_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (9.10)$$

Если вычислить магнитный поток, создаваемый катушкой 2 через катушку 1, то для L_{12} получим выражение в соответствии с формулой (9.10). Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi}{i_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

9.5. Трансформаторы

Трансформаторы – это устройства для повышения или понижения напряжения переменного тока. Их действие основано на явлении взаимной индукции.

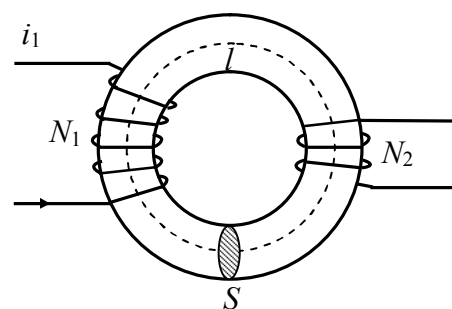


Рис. 9.5. Расчет взаимной индуктивности двух катушек

дукции. Впервые трансформаторы были сконструированы П.Н. Яблочковым и И.Ф. Усагиным.

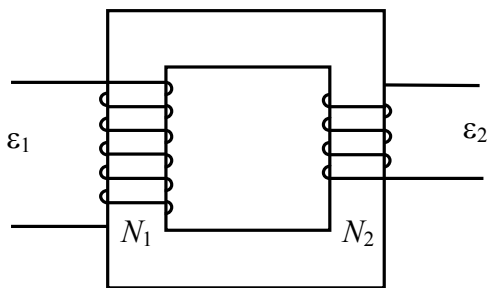


Рис. 9.6. Трансформатор

Устройство трансформатора показано на рис. 9.6. На железном сердечнике закреплены две обмотки, имеющие соответственно N_1 и N_2 витков. Так концы первичной обмотки подключены к источнику переменного напряжения с ЭДС ε_1 , то в ней возникает переменный ток i_1 , создающий в сердечнике

трансформатора магнитный поток Φ , который практически полностью локализован в сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывает витки вторичной обмотки. Изменение этого тока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной – ЭДС самоиндукции.

Ток i_1 определяется по закону Ома:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d}{dt}(N_1\Phi) = i_1 R_1,$$

где R_1 – сопротивление первичной обмотки. Падение напряжения $i_1 R_1$ на сопротивлении R_1 при быстропеременных полях мало по сравнению с каждой из двух ЭДС, поэтому

$$\varepsilon_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.11)$$

ЭДС взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке, равна

$$\varepsilon_2 = \frac{d(N_2\Phi)}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.12)$$

Из формул (9.11) и (9.12) следует, что

$$\varepsilon_2 = -\frac{N_2}{N_1} \cdot \varepsilon_1. \quad (9.13)$$

Знак минус в формуле (9.13) означает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе. Отношение числа витков $\frac{N_2}{N_1}$ называется *коэффициентом трансформации*.

Пренебрегая потерями энергии, которые не превышают 2%, можно записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\varepsilon_1 i_1 \approx \varepsilon_2 i_2,$$

откуда, с учетом соотношения (9.13), найдем

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1},$$

т.е. токи в обмотках трансформатора обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

Если $\frac{N_2}{N_1} > 1$, то имеем дело с *повышающим трансформатором*, увеличивающим переменную ЭДС и понижающую ток.

Повышающие трансформаторы используются, например, для передачи электроэнергии на большие расстояния, так как в данном случае потери на джоулеву теплоту, пропорциональные квадрату силы тока, снижаются.

Если $\frac{N_2}{N_1} < 1$, то имеем дело с *понижающим трансформатором*, уменьшающим ЭДС и повышающим ток.

Понижающие трансформаторы применяются, например, при электросварке, так как для нее требуется большой ток при низком напряжении.

Трансформаторы, используемые в технике, часто имеют 4 – 5 обмоток, в зависимости от их назначения. Разновидностью трансформатора является *автотрансформатор*, т.е. трансформатор, содержащий одну обмотку. В случае повышающего автотрансформатора ЭДС подводится к части обмотки, а вторичная ЭДС снимается со всей обмотки. В понижающем автотрансформаторе напряжение сети подается на всю обмотку, а вторичная ЭДС снимается с части обмотки.

9.6. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, показанную на рис. 9.7. Сначала переведем переключатель K в положение 1, замкнув тем самым соленоид на батарею. По катушке

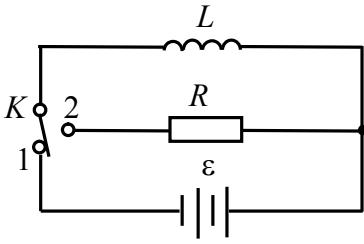


Рис. 9.7. К расчету энергии магнитного поля

потечет электрический ток i и в катушке возникнет магнитное поле. Переведем теперь переключатель в положение 2, отключив соленоид от батареи и замкнув его на сопротивление R . В цепи будет течь убывающий ток. Работа, совершенная этим током за время dt :

$$dA = \varepsilon_s i dt = -\frac{d\Psi}{dt} i dt = -i d\Psi.$$

Но $d\Psi = L di$, поэтому, $dA = -L i di$. Работа по созданию магнитного поля будет

$$A = -\int_i^0 L i di = \frac{L i^2}{2}.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с соленоидом,

$$W = \frac{L i^2}{2}.$$

Выразим энергию магнитного поля через параметры, характеризующие само поле. Так как $L = \mu\mu_0 n^2 V$ и $H = ni$, то $i = H/n$. Здесь V – объем соленоида, H – напряженность магнитного поля, n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Следовательно,

$$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 H^2}{2n^2} V = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V.$$

Тогда объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (9.14)$$

Так как индукция магнитного поля B и напряженность H связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, то формулу (9.14) можно записать в виде

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Энергию магнитного поля находят путем интегрирования:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} dV.$$

Глава 10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

10.1. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения потока магнитной индукции обусловлены изменениями поля. Так как в контуре возникает индукционный ток, то в контуре действуют сторонние сил. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре; они также не могут быть силами Лоренца, т.к. силы Лоренца работы над зарядом не совершают.

Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в контуре электрическим полем.

Обозначим напряженность этого поля \vec{E}_B . ЭДС индукции равна циркуляции вектора \vec{E}_B по контуру:

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_B d\vec{l}. \quad (10.1)$$

Так как циркуляция не равна нулю, то это поле, в отличие от потенциального электростатического поля, называется *вихревым электрическим полем*. Вихревое электрическое поле не имеет истоков и стоков, на которых бы начинались и заканчивались линии напряженности поля.

Согласно закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Так как контур неподвижен, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Следовательно,

$$\oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (10.2)$$

Согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Это поле \vec{E}_B существенно отличается

от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля \vec{E}_q . Электростатическое поле потенциально, его линии начинаются и оканчиваются на зарядах, причем циркуляция вектора напряженности \vec{E}_q равна нулю:

$$\oint_l \vec{E}_q d\vec{l} = 0. \quad (10.3)$$

Циркуляция вихревого поля отлична от нуля (10.1). Линии напряженности \vec{E}_B замкнуты.

В общем случае электрическое поле представляет собой векторную сумму (суперпозицию) двух полей: $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$. Сложив вместе уравнения (10.2) и (10.3) получим первое основное уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (10.4)$$

Первое уравнение Максвелла (10.4) представляет собой обобщенный на случай вихревого электрического поля закон электромагнитной индукции Фарадея.

10.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Для установления количественных соотношений между изменяющимися электрическими и возникающими магнитными полями Максвелл ввел в рассмотрение так называемый *ток смещения*.

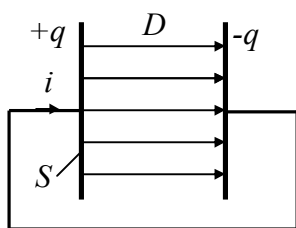


Рис. 10.1 Конденсатор в цепи переменного тока

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 10.1). Движение электронов т.е. ток проводимости имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Следовательно, линии тока проводимости терпят на границе обкладок разрыв. Зато в пространстве между обкладками конденсатора имеется переменное электрическое поле, которое характеризуется вектором электрического смещения \vec{D} . Напомним, что $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$.

Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока смещения.

Плотность тока проводимости определяется выражением

$$j = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{S} \right) = \dot{\sigma},$$

где S – площадь обкладки, q – распределенный на ней заряд, σ – поверхностная плотность заряда обкладки.

Чтобы линии тока смещения имели такую же густоту, как и линии тока проводимости, должно выполняться равенство: $j_{см} = j = \dot{\sigma}$.

Выразим ток смещения через параметры электрического поля в зазоре конденсатора: $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon\epsilon_0 E = \sigma$.

Так как $D = \epsilon\epsilon_0 E$, то $\sigma = D$. Откуда следует, что $\dot{\sigma} = \dot{D}$. Таким образом $j_{см} = \dot{D}$

Последнее соотношение можно записать в векторном виде

$$\vec{j}_{см} = \dot{\vec{D}}. \quad (10.5)$$

Формулу (10.5) Максвелл распространил на электрические поля любого вида, в том числе и на вихревое электрическое поле. Максвелл приписал току смещения свойство создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Согласно Максвеллу при расчетах магнитных полей в формулы нужно подставлять полную плотность тока:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В частности, циркуляция вектора \vec{H} по любому контуру равна

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) является вторым основным уравнением Максвелла в интегральной форме. Согласно (10.6) переменное электрическое поле порождает магнитное поле. *Второе уравнение Максвелла представляет собой обобщенный на случай тока смещения закон полного тока: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме тока проводимости и тока смещения.*

Электрические и магнитные поля непрерывно связаны друг с другом. Они образуют единое электромагнитное поле.

10.3. Описание свойств векторных полей

Для описания свойств векторных полей используют понятия векторного исчисления, которые мы здесь рассмотрим.

1. Градиент скалярной функции. Эта операция означает дифференцирование функции по координатам с последующим суммированием:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Если использовать оператор набла $\vec{\nabla}$ (см. раздел 2.6), равный

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

то формулу для градиента можно записать в виде

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi.$$

Например, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$.

Таким образом, операция вычисления градиента сводится к умножению вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр.

2. Дивергенция вектора. Как отмечалось в разделе 2.6, дивергенция показывает, какой поток вытекает из единичного объема:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Расчет показывает, что выражение для дивергенции вектора \vec{A} в декартовых координатах принимает вид:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (10.7)$$

где A_x, A_y, A_z – проекции вектора \vec{A} на соответствующие оси.

Умножим скалярно вектор $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Мы пришли к уравнению (10.7). Таким образом, дивергенция представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор \vec{A} :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

3. Ротор вектора. Ротор вектора представляет собой предел, к которому стремится циркуляция вектора по замкнутому контуру, при стягивании контура в точку:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_n = \lim_{S \rightarrow P} \frac{1}{S} \oint_l \vec{A} d\vec{l},$$

где $(\operatorname{rot} \vec{A})_n$ – проекция вектора $\operatorname{rot} \vec{A}$ на положительную нормаль к площадке S , охватываемой контуром, \vec{A} – вектор, характеризующий поле.

Выражение для ротора вектора в декартовых координатах имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Ротор вектора представляет собой векторное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор \vec{A} :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Выражение для ротора можно записать и в виде определителя:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

В векторном исчислении доказывается теорема Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (10.8)$$

и теорема Стокса

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}. \quad (10.9)$$

В качестве вектора \vec{A} в электродинамике принимают векторы, характеризующие электромагнитное поле, например, векторы \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} .

10.4. Полная система уравнений Максвелла

Максвелл создал единую теорию электрических и магнитных явлений. Основным следствием теории был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света.

Основу теории составляют уравнения Максвелла.

Первую пару уравнений образуют уравнения закона электромагнитной индукции Фарадея и теорема Гаусса для потока магнитной индукции:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (10.10)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (10.11)$$

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения закона полного тока и теорема Гаусса для потока электрического смещения:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (10.12)$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV. \quad (10.13)$$

Приведенная система четырех уравнений Максвелла дополняется соотношениями, характеризующими свойства среды. Для изотропных, неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред такими уравнениями являются выражения, устанавливающие связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{j} и \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (10.14)$$

где ϵ , μ , γ – постоянные, характеризующие электрические свойства среды: ϵ – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость, γ – удельная проводимость.

Уравнения (10.10 – 10.13) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме, которые связывают значения \vec{E} или \vec{H} вдоль некоторого контура со значениями производных $\dot{\vec{B}}$ или $\dot{\vec{D}}$ в точках, принадлежащих данному контуру.

От уравнений в интегральной форме легко перейти к уравнениям в дифференциальной форме, которые связывают значения \vec{E} или \vec{H} в некоторой точке со значениями $\dot{\vec{B}}$ или $\dot{\vec{D}}$ в той же точке.

Применив теорему Стокса (10.9) к левой части уравнения (10.10) и преобразовав, получим

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Аналогично,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Применив теорему Остроградского-Гаусса (10.8) к левой части формулы (10.11) и преобразовав, получим

$$\text{div } \vec{D} = \rho.$$

Аналогично,

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Итак, в дифференциальной форме уравнения Максвелла выглядят следующим образом. Первая пара уравнений:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.15)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (10.16)$$

Вторая пара уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (10.17)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (10.18)$$

где

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Совокупность семи уравнений (10.10 – 10.13) (или (10.15 – 10.18)) и (10.14) образует основу электродинамики.

Из уравнений Максвелла следует, что электрические поля создаются либо электрическими зарядами, либо переменными магнитными полями. Магнитные поля возбуждаются либо движущимися электрическими зарядами (токами), либо переменными электрическими полями. Магнитных зарядов в природе нет.

Для стационарных полей ($E = \text{const}$ и $B = \text{const}$) уравнения Максвелла принимают вид

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \quad \oint_s \vec{D} d\vec{S} = q,$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho.$$

Уравнения Максвелла выражают основные законы электромагнетизма. Они также фундаментальны, как законы Ньютона в механике.

10.5. Электромагнитные волны

Из уравнений Максвелла следует, что векторы напряженностей \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля и все их проекции на оси декартовых координат удовлетворяют в однородной, изотропной, непроводящей среде волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

где s – физическая величина, которая характеризует волну, распространяющуюся в среде со скоростью v , а $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – оператор Лапласа.

Для векторов \vec{E} и \vec{H} имеют место соотношения:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$
(10.19)

Таким образом, переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Решая систему уравнений (10.19), можно получить уравнение плоской электромагнитной волны

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - kx), \\ H &= H_0 \cos(\omega t - kx), \end{aligned}$$

где E_0 и H_0 – амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; x – текущая координата пространства; ω – циклическая частота колебаний.

Электромагнитные волны – *поперечные волны*. Векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, т.е. к вектору ее скорости \vec{v} в рассматриваемой точке поля. Причем, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют правую тройку векторов (рис. 10.2, а).

Структура электромагнитной волны показана на рис. 10.2, б. Взаимно перпендикулярные векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются в одной фазе – они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

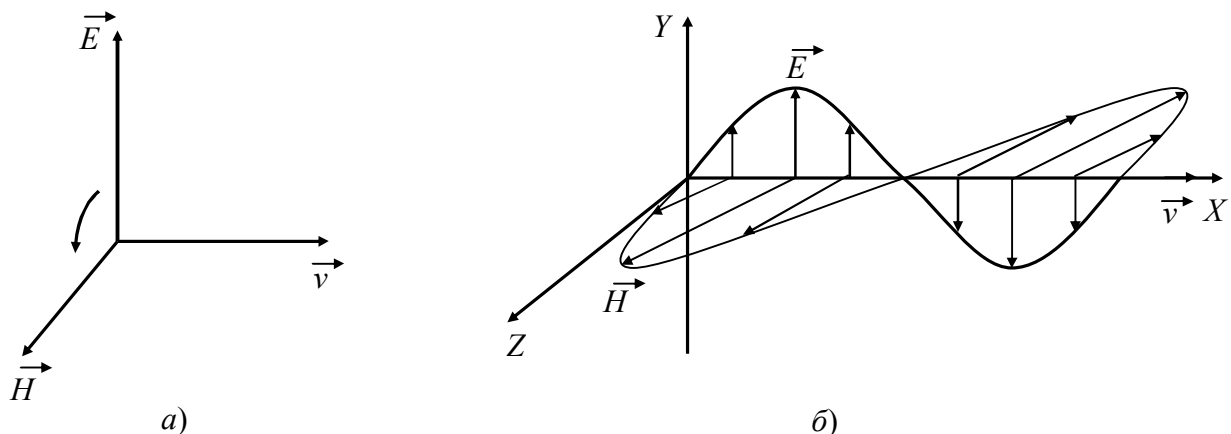


Рис.10.2 Электромагнитная волна: а) взаимное расположение векторов E , H , и v ; б) структура электромагнитной волны

Модули векторов \vec{E} и \vec{H} связаны соотношением

$$E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (10.20)$$

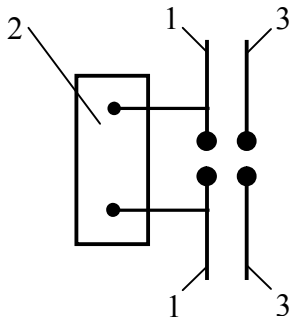


Рис. 10.3 Вибратор Герца

Впервые электромагнитную волну в лабораторных условиях получил Г. Герц в 1888 г. В опытах он применил вибратор, состоящий из двух металлических стержней 1 (рис. 10.3), к которым подводилось переменное напряжение высокой частоты от индуктора 2. В момент образования искры в искровом промежутке вибратора возникали электромагнитные колебания и в окружающее пространство излучались электромагнитные волны.

Аналогичные стержни (резонатор 3) были использованы для приема волн. Герц показал, что электромагнитные волны, подобно свету, отражаются металлическими поверхностями и преломляются на границе раздела двух диэлектрических сред.

При наложении электромагнитных волн двух когерентных источников наблюдается явление интерференции, при прохождении их через малые отверстия или щели – явление дифракции.

С помощью металлического зеркала Герц получил стоячую волну, что позволило рассчитать скорость электромагнитных волн. Она оказалась равной скорости света.

Распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии электромагнитного поля, что позволяет осуществлять радиосвязь. 7 мая 1895 г. А. С. Попов на заседании Русского физико-химического общества продемонстрировал первый в мире радиоприемник, открывший возможность практического использования электромагнитных волн для беспроводной связи. Первая переданная в мире радиограмма содержала лишь два слова: «Генрих Герц».

Изобретение радио Поповым сыграло огромную роль для распространения и развития теории Максвелла.

10.6. Энергия и импульс электромагнитных волн

Объемная плотность энергии электромагнитного поля ω равна

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где первое слагаемое представляет собой объемную плотность энергии электрического поля, а второе слагаемое – объемную плотность энергии магнитного поля.

Из соотношения (10.20) следует, что

$$\omega = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH,$$

отсюда $EH = \omega v$. Здесь v – *фазовая скорость* распространения волны. Фазовая скорость представляет собой скорость распространения данной фазы колебаний, например, скорость перемещения максимума напряженности электрического поля \vec{E} .

Обозначив произведение $\omega v = S$, получим

$$S = EH, \quad (10.21)$$

где S – модуль вектора плотности потока энергии.

Так как векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, то уравнение (10.21) можно записать в виде векторного произведения:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (10.22)$$

Полученное выражение (10.22) называется уравнением Умова-Пойнтинга, а вектор \vec{S} – вектором Умова-Пойнтинга. Вектор \vec{S} совпадает по направлению со скоростью \vec{v} распространения волны и модуль его равен энергии, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную вектору \vec{v} , в единицу времени. Единицей измерения вектора плотности потока энергии в системе СИ является ватт на метр в квадрате ($\text{Вт}/\text{м}^2$).

Если электромагнитные волны отражаются и преломляются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волн должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию силы Лоренца. Однако,

значение этого давления ничтожно мало. Оно приблизительно на 10 порядков меньше атмосферного давления. В экспериментах, ставших классическими, П. Н. Лебедев в 1899 г. доказал существование светового давления на тела.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс, равный

$$p = \frac{W}{c},$$

где W – энергия электромагнитного поля. Выражая импульс как $p = mc$ (поле в вакууме распространяется со скоростью c), получим $p = mc = W/c$, откуда

$$W = mc^2. \quad (10.23)$$

Это соотношение между массой и энергией является универсальным законом природы. Согласно специальной теории относительности, выражение (10.23) имеет общее значение и справедливо для любых тел.

Свойства электромагнитных волн, вытекающие из теории Максвелла, полностью подтверждены опытами Герца, Лебедева и вводами специальной теории относительности, сыгравшими важную роль для признания этой теории.

10.7. Шкала электромагнитных волн

В зависимости от частоты ν (или длины волны в вакууме $\lambda = c/\nu$), а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение и γ - лучи. Условные границы диапазонов электромагнитных волн приведены в таблице 1.

Таблица 1. Шкала электромагнитных волн

Наименование электромагнитных волн	Диапазон длин волн, м	Диапазон частот, Гц
Низкочастотные колебания	$>10^4$	$<3 \cdot 10^4$
Радиоволны	$10^4 - 10^4$	$3,0 \cdot 10^4 - 3,0 \cdot 10^{12}$
Инфракрасное излучение	$10^{-4} - 0,77 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{12} - 3,9 \cdot 10^{14}$
Видимый свет	$0,77 \cdot 10^{-6} - 0,38 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{14} - 7,9 \cdot 10^{14}$
Ультрафиолетовое излучение	$0,38 \cdot 10^{-6} - 10^{-8}$	$7,9 \cdot 10^{14} - 3,0 \cdot 10^{16}$
Рентгеновское излучение	$10^{-8} - 10^{-11}$	$3,0 \cdot 10^{16} - 3,0 \cdot 10^{19}$
γ -лучи	$<10^{-11}$	$>3,0 \cdot 10^{19}$