

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный педагогический
Университет имени К. Д. Ушинского

Элементы дискретной математики

Ярославль, 2005

П.А. Корнилов, Н.И. Никулина, Семенова О.Г. Элементы дискретной математики. Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д.Ушинского, 2005, 91 с.

Данная работа предназначена для студентов дневного и заочного отделений педагогических вузов, специализирующихся в области информатики или изучающих курс дискретной математики в рамках математической подготовки. Работа составлена на основе опыта преподавания данного курса на физико-математическом факультете ЯГПУ для студентов специальности «Информатика».

Работа состоит из трех основных частей: краткого изложения основ комбинаторики, задачника по комбинаторике и задачника по теории графов. В первой части работы кратко изложены все основные комбинаторные конфигурации, к каждой из которых приводятся разобранные примеры и задачи, В число изучаемых здесь вопросов вошли также комбинаторика разбиений, биномиальная и полиномиальная формулы, решение рекуррентных соотношений, азы теории вероятностей.

Теоретический материал по изучению теории графов не был включен в данную работу из-за его большого объема. Однако для удобства студентов был составлен и включен в работу «путеводитель» по теории графов, где отмечено, в каких книгах и каких разделах можно ознакомиться с тем или иным вопросом теории графов.

© Ярославский государственный педагогический университет имени К.Д.Ушинского, 2005

© П.А. Корнилов, Н.И. Никулина, О.Г. Семенова, 2005

Введение

Данная работа предназначена для студентов дневного и заочного отделений педагогических вузов, специализирующихся в области информатики или изучающих курс дискретной математики в рамках математической подготовки. Работа составлена на основе опыта преподавания данного курса на физико-математическом факультете ЯГПУ для студентов специальности «Информатика».

Работа состоит из трех основных частей: краткого изложения основ комбинаторики, задачника по комбинаторике и задачника по теории графов. Вопросы теории множеств и основы математической логики, традиционно включаемые в курс дискретной математики, не вошли в данную работу, поскольку они изучаются в других дисциплинах при подготовке студентов специальности «Информатика».

В первой части работы кратко изложены все основные комбинаторные конфигурации, к каждой из которых приводятся разобранные примеры и задачи. В число изучаемых здесь вопросов вошли также комбинаторика разбиений, биномиальная и полиномиальная формулы, решение рекуррентных соотношений, азы теории вероятностей.

Теоретический материал по изучению теории графов не был включен в данную работу из-за его большого объема. Однако для удобства студентов был составлен и включен в работу «путеводитель» по теории графов, где отмечено, в каких книгах и каких разделах можно ознакомиться с тем или иным вопросом теории графов.

Некоторые главы работы носят самостоятельный характер, и их изучение может быть опущено при изучении курса дискретной математики. К их числу могут быть отнесены полиномиальная формула, комбинаторика разбиений, асимптотические формулы, свойства биномиальных коэффициентов и свойства треугольника Паскаля.

Комбинаторика

Предмет комбинаторики.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.

Целью комбинаторики является изучение комбинаторных конфигураций, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление и подсчет количества.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики, таких как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с которыми комбинаторика тесно связана. Некоторые факты комбинаторики были известны еще математикам Древнего Востока.

В XVI веке комбинаторные задачи касались в основном азартных игр – вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три игральные кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре.

Одним из первых занялся изучением вопросов комбинаторики итальянский математик Тарталья. Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами французских ученых Б. Паскаля и П. Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Бернулли, Лейбница и Эйлера.

В 50-х годах XX века интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием вычислительной техники и дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения задач теории планирования и теории информации, а также для установления свойств и выявления применимости используемых алгоритмов.

Правила суммы и произведения.

Большинство комбинаторных задач решаются с помощью двух основных правил: суммы и произведения.

Правило произведения

Задача.

В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюда. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение.

Чашку можно выбрать 5 способами. Для каждого способа выбора чашки существует 3 способа выбора блюда. Таким образом, имеем $5 \cdot 3 = 15$ способов выбора пары предметов.

Если некоторый объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) можно осуществить $m \cdot n$ способами. Это утверждение называют правилом произведения.

Для доказательства правила произведения заметим, что каждый из m способов выбора объекта A можно совместить с n способами выбора объекта B . А это приводит к $m \cdot n$ способам выбора пары (A, B) .

Может возникнуть ситуация, когда необходимо составить комбинацию из большего числа элементов.

Задача

В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюда и ложки?

Решение.

Из решения предыдущей задачи известно, что существует $5 \cdot 3 = 15$ способов выбора пары предметов чашка – блюдо. Для каждого способа выбора этой пары существует 4 способа выбора ложки. Таким образом, по правилу произведения имеем $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ способов выбора комплекта из чашки, блюда и ложки.

Правило суммы

Задача.

Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги, Из города А в город Г – 2 дороги, и из города Г в город В – тоже 2 дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

Решение.

Из города А в город В можно попасть либо через город Б, либо через город Г. По правилу произведения через город Б можно проехать $6 \cdot 4 = 24$ способами, через город Г – $2 \cdot 2 = 4$ способами. Тогда из города А в город В можно попасть $24 + 4 = 28$ способами.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение называют правилом суммы.

Если некоторый объект А можно выбрать t способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то выбор «либо А, либо В» можно осуществить $t+n$ способами.

При использовании правила суммы необходимо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта А не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта В.

В рассмотренной выше задаче число выборов после каждого шага зависит от того, какие элементы были выбраны на предыдущих шагах. Рассмотрим пример ещё одной такой задачи.

Задача.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая по правилам игры комбинация.

Решение.

Шахматное поле имеет 64 клетки, поэтому белого короля можно поставить 64 способами. Как известно, король бьет клетки, расположенные непосредственно рядом с ним. Таким образом, если король находится в углу, то под боем находятся 3 клетки, если у стены, то – 5, если в центре, то – 8. Очевидно, что ставить черного короля нельзя в ту же клетку, где находится белый король и в клетку, которая находится под боем. Так как существует 4 способа поставить короля в угол, 24 способа – у стены и 36 способов – в центре поля, то ответ на вопрос задачи вычисляется следующим образом:
 $4 \cdot (64 - 4) + 24 \cdot (64 - 6) + 36 \cdot (64 - 9) = 3612$

Рассмотрим теперь вопрос, как вычислить количество способов выбора объекта «либо А, либо В», если известно, что некоторые из способов выбора объекта А совпадают с некоторыми способами выбора объекта В?

Формула включения и исключения.

Задача.

Из-за различия программ в школах Ярославской области студенты первого курса физико-математического факультета разделились на следующие группы: 47 человек знают алгоритмический язык, 35 – язык программирования Паскаль и 23 – оба языка программирования. Сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

Решение.

Разобьем всех студентов на группы. Первую из них составят те, кто знает только алгоритмический язык, вторую – те, кто знает только Паскаль, третью – те, кто знает оба языка, четвертую – те, кто не знает ни одного.

Количество студентов, знающих хотя бы один язык программирования, можно записать в виде

$$59=23+24+12=23+(47-23)+(35-23)=47+35-23.$$

Таким образом, к числу студентов, знающих алгоритмический язык необходимо прибавить число знающих язык Паскаль. При этом некоторые студенты попадают в оба списка и оказываются «прибавленными дважды». Это как раз те, которые знают оба языка программирования. Вычитая их число, получаем число студентов, знающих хотя бы один язык.

Запишем формулу в общем виде.

Обозначим через a_1 свойство студента знать алгоритмический язык, через a_2 – свойство студента знать Паскаль, через $N(a_1)$ – количество студентов, знающих алгоритмический язык, через $N(a_2)$ – количество студентов, знающих Паскаль. Тогда

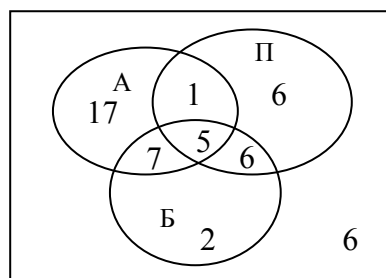
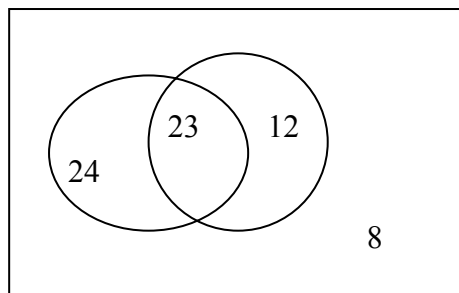
$$N(a_1 \cup a_2) = N(a_1) + N(a_2) - N(a_1 \cap a_2).$$

Эту формулу называют формулой включения и исключения.

Задача.

Теперь усложним задачу. Пусть 47 студентов знают алгоритмический язык, 35 – язык Паскаль, 23 – Паскаль и алгоритмический язык, 20 – знают Бейсик, 12 – алгоритмический язык и Бейсик, 11 – Паскаль и Бейсик, 5 – все три языка. Вопрос тот же: Сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

Решение.



Решая эту задачу аналогично предыдущей, получим: $47+35+20-23-12-11+5=61$.

Используя обозначения, предложенные выше, получаем следующую формулу для трех свойств:

$$N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } a_3) = N(a_1) + N(a_2) + N(a_3) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - N(a_2 \text{ и } a_3) + N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3)$$

Общий вид формулы включения и исключения

Пусть имеется n предметов, некоторые из которых обладают свойствами a_1, a_2, \dots, a_n . Каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами одновременно.

Обозначим $N(a_i \text{ или } a_j \text{ или } \dots \text{ или } a_k)$ количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств a_i, a_j, \dots, a_k .

Для того чтобы определить количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств a_1, a_2, \dots, a_n , используют формулу:

$$N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_n) = N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_n) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - \dots - N(a_1 \text{ и } a_n) - \dots - N(a_{n-1} \text{ и } a_n) + N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3) + \dots + N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1} \text{ и } a_n) + \dots + (-1)^{n-1} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_n).$$

Доказательство.

Доказательство проведем методом математической индукции по числу свойств.

При одном свойстве формула очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает им. $N(a) = N(a)$

Предположим, что формула доказана для случая когда число свойств меньше или равно $n-1$. Тогда:

$$\begin{aligned} N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_{n-1}, \text{ или } a_n) &= N((a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_{n-1}) \text{ или } a_n) = \\ &= N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_{n-1}) + N(a_n) - N((a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_{n-1}) \text{ и } a_n) = \\ &= [N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_{n-1}) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - \dots - N(a_1 \text{ и } a_{n-1}) - \dots - N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1}) + \\ &+ N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3) + \dots + N(a_{n-3} \text{ и } a_{n-2} \text{ и } a_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-2} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_{n-1})] + N(a_n) - \\ &- N((a_1 \text{ и } a_n) \text{ или } (a_2 \text{ и } a_n) \text{ или } \dots \text{ или } (a_{n-1} \text{ и } a_n)) = \\ &= [N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_{n-1}) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - \dots - N(a_1 \text{ и } a_{n-1}) - \dots - N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1}) + \\ &+ N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3) + \dots + N(a_{n-3} \text{ и } a_{n-2} \text{ и } a_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-2} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_{n-1})] + N(a_n) - \\ &- [N(a_1 \text{ и } a_n) + N(a_2 \text{ и } a_n) + \dots + N(a_{n-1} \text{ и } a_n) - N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_n) - \dots - N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1} \text{ и } a_n) + \dots + \\ &+ (-1)^{n-2} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_n)] = \\ &= N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_n) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - \dots - N(a_1 \text{ и } a_n) - \dots - N(a_{n-1} \text{ и } a_n) + \\ &+ N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3) + \dots + N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1} \text{ и } a_n) + \dots + (-1)^{n-1} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_n) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Задача.

Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

Решение/

Обозначим через A свойство опрошенного любить шоколад, через B – свойство опрошенного любить конфеты, через C – свойство опрошенного любить леденцы.

По условию задачи $N(A)=811$, $N(B)=752$, $N(C)=418$, $N(A \text{ и } B)=570$, $N(A \text{ и } C)=356$, $N(B \text{ и } C)=348$, $N(A \text{ и } B \text{ и } C)=297$.

Подсчитаем количество опрошенных людей, которые любят хотя бы один вид сладостей. Воспользуемся формулой включения и исключения.

$N(A \text{ или } B \text{ или } C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A \text{ и } B)-N(A \text{ и } C)-N(B \text{ и } C)+N(A \text{ и } B \text{ и } C)=811+752+418-570-356-348+297=1004$.

Опрошено было всего 1000 человек, следовательно, в предложенной информации содержатся ошибки.

Размещения с повторениями

Конечно, при решении комбинаторных задач можно использовать только приведенные выше правила, но большинство задач являются стандартными, для их решения существуют готовые формулы.

Задача.

Каково число последовательностей длины n , состоящих из 0 и 1?

Решение.

Заметим, что последовательность длины n можно получить из последовательности длины $n - 1$, дописывая в конец последовательности либо 1, либо 0. Значит, из каждой последовательности длины $n - 1$ получается две последовательности длины n . Ответ на вопрос задачи – 2^n .

Данная задача относится к классу задач о размещении с повторениями.

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются всевозможные комбинации по k элементов, составленные из элементов данных n видов. При этом в комбинацию могут входить и предметы одного вида, а две комбинации считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них элементов, или порядком этих элементов.

Количество размещений с повторениями обозначается \bar{A}_n^k и равно n^k .

Доказательство.

Доказательство проведем методом математической индукции по числу элементов k при фиксированном значении n .

1. При $k=1$ каждое размещение с повторениями состоит из одного элемента. Его можно выбрать n способами. Таким образом, $\bar{A}_n^1 = n^1$.
2. Предположим, что верно равенство $\bar{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$. Размещения с повторениями из n элементов по k можно получить из размещений с повторениями из n элементов по $k-1$ элементу добавлением любого из n элементов.

По правилу произведения получаем $\bar{A}_n^k = \bar{A}_n^{k-1} \cdot n = n^{k-1} \cdot n = n^k$

Применим выведенную выше формулу для решения задач.

Задача.

Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9), набираемая на 4 колесиках. Сколько различных комбинаций существует?

Решение.

Из условия задачи следует, что необходимо составить всевозможные комбинации по 4 элемента из данных 10. По формуле размещений с повторением получаем: $\bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ вариантов.

Задача.

Сколько в n -ичной системе счисления натуральных чисел, записываемых ровно k знаками?

Решение.

Если допустить записи чисел, начинающиеся с нуля, то каждое k -значное число в n -ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. Получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k .

Но натуральные числа не могут начинаться с нуля. Поэтому из полученного значения n^k необходимо вычесть количество чисел, запись которых начинается с нуля. Если отбросить от этих чисел первую цифру – ноль, то получим $(k-1)$ -значное число (быть может, начинающиеся с нуля). Таких чисел по формуле для вычисления количества размещений с повторениями существует n^{k-1} . Значит общее количество k -значных чисел в n -ичной системе счисления равно $n^k - n^{k-1} = n^k(n-1)$.

Размещения без повторений

Как изменится решение задачи о камере хранения, если известно, что цифры, набираемые на колесиках, различны.

Решение.

Вариантов выбора первой цифры 10 (от 0 до 9). Так как повторения быть не может, то вариантов выбора второй цифры всего 9. Аналогично для выбора третьей цифры остается 8 вариантов, для выбора четвертой – 7. По правилу произведения получаем, что всего комбинаций, в которых все числа различны, $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Данная задача относится к классу задач о размещении без повторений.

Размещениями без повторений из n элементов по k называются всевозможные комбинации по k элементов, составленные из элементов данных n видов. При этом две комбинации считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Количество размещений без повторений обозначают A_n^k . Общее правило вычисления количества размещений:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство.

Действительно, на первом шаге можно выбрать любой из n имеющихся предметов. Если этот выбор уже сделан, то на втором шаге приходится выбирать из $n-1$ предметов – ведь повторный выбор сделать уже нельзя. Точно так же на третьем шаге для выбора остается $n-2$ предмета и т. д. Используя правило произведения, получим требуемую формулу.

Задача.

В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение.

Переформулируем задачу: Сколько существует комбинаций из 17 элементов по 3, если важны порядок элементов в комбинации, состав элементов и в комбинацию не могут входить элементы одного типа. (Повторения здесь быть не может – одна и та же команда не может получить и золотую и серебряную медаль.)

Эта задача относится к задачам на размещения без повторения. По формуле получаем: медали могут распределиться $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4\,080$ способами.

Задача.

Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и четырех цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если в её алфавите 26 букв?

Решение.

Число комбинаций по 3 буквы из данных 26, при условии, что буквы не могут повторяться, определим с помощью формулы для вычисления количества размещений без повторений: $A_{26}^3 = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

Число комбинаций по 4 цифры из данных 10, если в комбинацию могут входить одинаковые цифры, найдем с помощью формулы для вычисления количества размещений с повторениями: $\bar{A}_{10}^4 = 10^4$.

Тогда по правилу произведения различных автомобильных номеров – $A_{26}^3 \cdot \bar{A}_{10}^4 = 15\,600 \cdot 10^4 = 156 \cdot 10^6$.

Перестановки

При составлении размещений без повторений из n элементов по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют перестановками из n элементов или n -перестановками.

Перестановками из n элементов называют всевозможные комбинации из n элементов, каждая из которых содержит все элементы по одному разу. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число n -перестановок обозначают через P_n . Общее правило вычисления количества перестановок:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Рассмотрим несколько задач, решаемых с применением этой формулы.

Задача

Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

Решение

Так как на полке располагаем все 6 томов, то различные расположения отличаются только порядком, но не составом. По формуле перестановок имеем $6! = 720$.

Задача.

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга.

Решение.

На каждой вертикали и горизонтали должно стоять по одной ладье. Введем обозначения: перестановка (13256487) означает, что на первой горизонтали ладья стоит в первом поле, на второй – в третьем, на третьем – во втором и т.д. Таким образом, число искомых расположений равно количеству перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть $P_8 = 8! = 40320$.

Задача.

Сколько способов разбить 6 мужчин и 6 женщин на пары для танцев?

Решение.

Выстроим мужчин в одну линию в произвольном порядке. Пусть каждая женщина выбирает себе пару. Тогда количество способов разбиения на пары равно количеству способов переставить 6 различных предметов, то есть равно $6!$.

Задача.

Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение.

Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы $7!$ способов. Так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц, необходимо считать одинаковыми. Из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число $7!$ необходимо разделить на 7. Получаем $7! : 7 = 6! = 720$ различных перестановок девушек в хороводе.

Перестановки с повторениями

Рассмотрим, как изменится количество перестановок, если некоторые из переставляемых предметов одинаковы.

Задача.

Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «март»? Сколько слов можно получить, если переставлять буквы слова «мама»?

Переставляя буквы слова «март» получим 24 различные перестановки, так как все переставляемые элементы различны.

Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок – некоторые перестановки совпадают друг с другом.

При перестановке букв слова «мама» имеем две пары одинаковых букв мм и аа. Сделаем их различными, дописав к одинаковым буквам различные индексы: $m_1a_1m_2a_2$. Рассмотрим все возможные перестановки:

$m_1a_1m_2a_2$	$m_1m_2a_1a_2$	$a_1a_2m_1m_2$	$m_1a_1m_2a_2$	$m_1a_1a_2m_2$	$a_1m_1m_2a_2$	$a_1m_1a_2m_2$
$m_2a_1m_1a_2$	$m_2m_1a_1a_2$	$a_2a_1m_1m_2$	$m_2a_1m_1a_2$	$m_2a_1a_2m_1$	$a_1m_2m_1a_2$	$a_1m_2a_2m_1$
$m_1a_2m_2a_1$	$m_1m_2a_2a_1$	$a_1a_2m_2m_1$	$m_1a_2m_2a_1$	$m_1a_2a_1m_2$	$a_2m_1m_2a_1$	$a_2m_1a_1m_2$
$m_2a_2m_1a_1$	$m_2m_1a_1a_1$	$a_2a_1m_2m_1$	$m_2a_2m_1a_1$	$m_2a_2a_1m_1$	$a_2m_2m_1a_1$	$a_2m_2a_1m_1$

Получили 24 различные перестановки, которые разбиваются на четверки одинаковых слов, если убрать индексы при буквах «м» и «а». Значит, всего различных перестановок $\frac{24}{4} = 6$.

Общая задача формулируется следующим образом:

Перестановками с повторениями из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа называются всевозможные комбинации из этих элементов, каждая из которых содержит n_i элементов i -го вида. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок с повторениями обозначают через $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Общее правило вычисления количества перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Доказательство

Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. Возьмем, например, перестановку

aa ... a	bb ... b	...	xx ... x,
n_1	n_2		n_k

в которой сначала выписаны элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы k -го типа. Элементы первого типа можно переставлять $n_1!$ способами, это ничего не меняет. Точно так же ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов второго типа, ..., $n_k!$ перестановок элементов k -го типа. Перестановки элементов первого типа, второго типа и т. д. можно делать независимо друг от друга. По правилу произведения элементы перестановки можно переставлять $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ способами так, что она останется неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому

множество всех $n!$ перестановок распадается на части, состоящие из $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ одинаковых перестановок каждая. Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Задача.

Сколькими способами можно поставить в ряд 3 красных, 4 синих и 5 зеленых кубиков?

Решение.

По формуле перестановок с повторениями получаем: $P(3, 4, 5) = \frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = 27\,720$.

Задача.

Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно составить из слова КАСАТЕЛЬНАЯ, если необходимо использовать все буквы?

Решение.

В слове имеется 3 буквы А и еще 8 различных букв. По формуле перестановок с повторениями получаем: $P(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3) = \frac{11!}{3!} = 6\,652\,800$.

Сочетания

До сих пор при составлении комбинаций из элементов различных типов нас интересовал порядок расположения элементов. Но некоторый класс задач приводит к составлению комбинаций, в которых порядок элементов совершенно не важен.

Задача 1.

Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

Решение.

Это задача на размещения без повторений. Ответ: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов составить флаг.

Задача 2.

Сколькими способами можно выбрать три краски из имеющихся пяти?

Решение.

В данном случае порядок выбора красок не важен. Поэтому количество способов выбора красок, полученное в предыдущей задаче, необходимо разделить на $3!$ –

количество способов переставить выбранные краски. Ответ: $\frac{A_5^3}{3!} = 10$.

Эта задача относится к классу задач о сочетаниях.

Сочетаниями из n элементов по k называют всевозможные комбинации по k элементов, составленные из данных n элементов. Комбинации отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов.

Количество сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k .

Формула для вычисления числа сочетаний получается из формулы для вычисления количества размещений. Составим сначала все k -сочетания из n элементов, а потом переставим входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все k -размещения из n элементов, причем каждое только по одному разу. Элементы каждого k -сочетания можно переставить $k!$ способами, а число этих сочетаний равно C_n^k . Значит, справедлива формула $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Получаем $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача.

Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, у другого – 5. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?

Решение.

Первый филателист должен выбрать 2 марки из 7. Он может это сделать C_7^2 способами.

Второй должен выбрать 2 марки из 5. Он может это сделать C_5^2 способами. По правилу

произведения получаем, $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 210$ способов совершить обмен.

Задача.

Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди них окажется ровно три туза?

Решение.

Необходимо выбрать трех тузов и семь «не тузов». Всего в колоде 4 туза. Поэтому выбрать из них 3 можно C_4^3 способами. «Не тузов» в колоде 48. Выбрать из них 7 можно C_{48}^7 способами. По правилу произведения получаем:

$C_4^3 \cdot C_{48}^7 = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{48!}{7!41!} = \frac{4 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 29\ 451\ 6288$ способов выбрать из

колоды 10 карт так, что среди них будет ровно три туза.

Свойства чисел C_n^k

Числа C_n^k обладают рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. Можно прямо воспользоваться формулой $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений.

1 свойство: $P(k, n-k) = C_n^k$

Доказательство.

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Комбинаторное доказательство.

Поставим по порядку все n элементов, из которых составляют сочетания, и зашифруем каждое сочетание комбинацией из n нулей и единиц. Каждому k -сочетанию соответствует комбинация из k единиц и $n-k$ нулей, и наоборот. Отсюда и следует, что число сочетаний из n элементов по k совпадает с числом перестановок с повторениями из k элементов одного вида (единиц) и $n-k$ элементов другого (нулей).

2 свойство – свойство симметричности $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Комбинаторное доказательство

Если выбрать из n различных предметов некоторое k -сочетание, то останется дополнительное $(n-k)$ -сочетание, а дополнительным к $(n-k)$ -сочетанию является исходное k -сочетание. Таким образом, k -сочетание и $(n-k)$ сочетание образуют взаимно дополнительные пары, поэтому число этих сочетаний одно и то же.

3 свойство – основное свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Доказательство.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot (n-1)! + n \cdot (n-1)! - k \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{aligned}$$

Комбинаторное доказательство.

Составим k -сочетание из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n и разобьем их на два класса. В первый из них войдут сочетания, содержащие элемент a_n , во второй – не содержащие этого элемента. Если из любого сочетания первого класса откинуть элемент a_n , то останется $(k-1)$ -сочетание, составленное из элементов a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Число таких сочетаний равно C_{n-1}^{k-1} . Поэтому в первый класс входит C_{n-1}^{k-1} комбинаций. Сочетания второго класса являются k -сочетаниями, составленными из элементов a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Поэтому их число равно C_{n-1}^k . Поскольку любое k -сочетание принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно C_n^k , то, используя правило сложения, приходим к искомому равенству.

4 свойство: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$

Комбинаторное доказательство.

2^n – число всех размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьем эти размещения на классы, отнеся в k -ый класс те, в которые входят k элементов первого типа и $n-k$ элементов второго типа. Размещения k -го типа – это ни что иное, как всевозможные перестановки из k элементов первого типа и $n-k$ элементов второго типа. Число таких перестановок равно $P(k, n-k) = C(n, k)$. По правилу суммы общее число размещений всех классов равно $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n$. С другой стороны, это же число равно 2^n .

5 свойство: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

Комбинаторное доказательство.

Выпишем все сочетания из n элементов a_1, \dots, a_n и сделаем следующее преобразование: к сочетанию, не содержащему элемент a_1 , допишем его, а из сочетаний, куда оно входит, вычеркнем. Легко проверить, что при этом снова получаются все сочетания, и притом по одному разу. Но при этом преобразовании все сочетания, имевшие четное число элементов, превратятся в сочетания, имеющие нечетное число элементов, и наоборот. Значит сочетаний с четным и нечетным количеством элементов одинаковое количество (пустое сочетание тоже входит в рассмотрение). Это и выражает данная формула.

Задача.

На окружности отмечено 11 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

Решение.

Первый способ. Существует C_{11}^3 треугольников с вершинами в отмеченных точках, C_{11}^4 – четырехугольников, C_{11}^5 – пятиугольников, ..., C_{11}^{11} – одиннадцатиугольников. Таким образом, по правилу суммы всего многоугольников $C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + \dots + C_{11}^{11}$. Из четвертого свойства следует, что это выражение равно $2^{11} - C_{11}^1 - C_{11}^2 = 1982$.

Второй способ. Любая из одиннадцати точек либо является вершиной рассматриваемого многоугольника, либо не является. Всего вариантов 2^{11} . Но одна или две точки не могут составлять многоугольник. Остается $2^{11} - C_{11}^1 - C_{11}^2$ вариантов многоугольников с вершинами в отмеченных точках.

Сочетания с повторениями.

Задача.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут быть повторяющиеся элементы. Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями*.

Чтобы решить задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью нулей и единиц. Сначала напишем столько единиц, сколько куплено наполеонов. Потом, чтобы отделить наполеоны от эклеров, напишем нуль, затем – столько единиц, сколько куплено эклеров, и т. д. Например, если куплено 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 слоеное пирожное, то получим такую запись: 1110101101. Ясно, что разным покупкам соответствуют разные комбинации из 7 единиц и 3 нулей. Обратное, каждой комбинации 7 единиц и 3 нулей соответствует какая-то покупка.

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей. А это число равно $P(7,3)=120$.

К тому же самому результату можно было прийти и другим путем, а именно: расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам эклеров прибавлять 1, к номерам песочных – 2, к номерам слоеных – 3. К номерам наполеонов ничего прибавлять не будем. Например, пусть куплено 2 наполеона, 3 эклера, 1 песочное пирожное

и 1 слоеное. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, что самый большой номер может быть 10, самый маленький – 1, а кроме того, ни один из номеров не повторяется, причем они образуют возрастающую последовательность. Обратно, каждой возрастающей последовательности из 7 чисел соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 эклеров и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Но 1 мы прибавляли к номерам эклеров, а 2 – к номерам песочных.

Отсюда, общее число покупок равно числу возрастающих последовательностей из 7 чисел от 1 до 10. А число таких последовательностей равно $C(10,7)=120$.

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называют всевозможные комбинации, составленные из элементов n видов по k элементов в каждой. Комбинации считаются различными, если они отличаются составом, но не порядком входящих в них элементов. В комбинацию могут входить элементы одного вида.

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначают \bar{C}_n^k . Общее правило вычисления количества сочетаний с повторениями:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Доказательство

Зашифруем каждую комбинацию с помощью нулей и единиц: для каждого типа напишем столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а предметы различных типов отделить нулями. При этом число единиц будет k , а число нулей – $n-1$. Различным комбинациям будут соответствовать различные перестановки с повторениями из k элементов первого вида и $n-1$ элементов второго вида, а каждой перестановке с повторениями – своя комбинация. Итак, $\bar{C}_n^k = P(k, n-1) = C_{n+k-1}^k$.

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями накладывается дополнительное условие, например, когда в комбинацию обязательно должны входить элементы r фиксированных типов, где $r \leq n$. Эта задача легко сводится к уже решенной. Для того чтобы обеспечить присутствие заданных r типов, возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в k -сочетании окажутся заняты r мест. Поэтому ответом на задачу будет число $\bar{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}$. В частности, если требуется, чтобы в каждом сочетании был элемент каждого из типов ($n \leq k$), то получится C_{k-1}^{k-n} .

Задача.

Сколько существует различных бросаний двух одинаковых кубиков?

Решение.

Переформулируем задачу. Всего при подбрасывании одного кубика возможны шесть ситуаций – имеем предметы шести различных типов. Подбрасывают два кубика, следовательно, из данных шести типов предметов необходимо выбрать два, причем нас не интересует порядок выбора, и допускается выбор одинаковых предметов. Таким образом, это задача на сочетания с повторением. По формуле для вычисления количества сочетаний с повторением имеем $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ различных бросаний двух одинаковых кубиков.

Комбинаторика разбиений

Многим комбинаторным задачам можно придать вид стандартной схемы. В этой схеме объекты (предметы) помещаются в ящики. Из-за наложения различных ограничений получаются различные задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 – другого, ..., n_k – k -го сорта. Сколькими способами можно разложить их в два ящика?

Так как в каждый ящик может попасть от 0 до n_i предметов i -го сорта (во второй все оставшиеся), по правилу произведения получаем $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \dots \cdot (n_k+1)$ способов раскладки.

Задача.

Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Решение.

Необходимо 10 предметов одного вида, 15 – второго и 14 – третьего разложить в два ящика. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2460$ способов раздела цветов.

Следствие 1. Если все предметы различны ($n_1=n_2=\dots=n_k=1$), то их можно разложить 2^k способами.

Следствие 2. Если в каждый ящик нужно положить не менее s_i предметов i -го сорта, то получим формулу: $(n_1-2s_1+1) \cdot (n_2-2s_2+1) \cdot \dots \cdot (n_k-2s_k+1)$.

Даны n различных предметов и k ящиков. Надо положить в первый ящик n_1 предметов, во второй – n_2 , ..., в k -ый – n_k , где $n_1 + \dots + n_k = n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике?

Выложим все предметы в один ряд. Это можно сделать $n!$ способами. Первые n_1 предметов положим в первый ящик, вторые n_2 предмета – во второй ящик, ..., k -ые n_k предметов – в k -ый ящик. Так как нас не интересует порядок предметов в ящике, то любая перестановка первых n_1 предметов не меняет результат раздела. Точно так же его не меняет любая перестановка вторых n_2 предметов, ..., k -ых n_k предметов. По правилу произведения получаем $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ перестановок, не меняющих результата раздела. Таким образом, $n!$ перестановок делятся на группы по $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ перестановок в каждой группе, причем перестановки из одной группы приводят к одинаковому распределению предметов.

Следовательно, число раздела предметов равно $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = P(n_1, \dots, n_k)$.

Задача.

При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение.

Переформулируем задачу: необходимо разложить 28 предметов в 4 ящика по 7 предметов в каждый, причем порядок предметов в ящике не важен. Получаем $\frac{28!}{(7!)^4}$ способов распределения костей домино.

Можно было рассуждать другим способом. Первый игрок выбирает себе 7 костей из 28, это можно сделать C_{28}^7 способами. Второму необходимо выбрать 7 костей из оставшихся 21, это можно сделать C_{21}^7 способами. Третьему 7 из 14 – C_{14}^7 способов. А четвертый заберет оставшиеся. По правилу произведения получаем $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7$.

Даны n различных предметов и k одинаковых ящика. Надо положить в каждый ящик n_1 предметов, где $n_1 = \frac{n}{k}$. Сколькими способами можно сделать такое распределение, если не интересует порядок предметов в ящике, и все ящики одинаковы?

Задача отличается от предыдущей только тем, что ящики не пронумерованы. Так как k ящиков можно переставить $k!$ способами, то полученный в предыдущей задаче результат необходимо разделить на $k!$. Всего $\frac{n!}{k! \cdot (n_1!)^k}$ способов распределения.

Задача.

Сколькими различными способами можно разделить 8 книг на 4 бандероли по 2 книги в каждой?

Решение.

Если бы интересовал порядок бандеролей, то существовало бы $\frac{8!}{(2!)^4}$ способов распределения книг. Так как не важно, в каком порядке будут отправлены бандероли, то полученное число необходимо поделить на $4!$. Итого $\frac{8!}{(2!)^4 \cdot 4!}$ способов разделить 8 книг на 4 бандероли по 2 книги.

Сколькими способами можно разложить n одинаковых предметов в k ящиков?

Выложим все предметы в один ряд, добавим к ним $k-1$ одинаковых разделяющих предмета. Переставим всеми возможными способами n данных одинаковых предметов и $k-1$ разделяющих. Каждая такая перестановка определяет один из способов распределения. А именно предметы, расположенные до первого разделителя, положим в первый ящик, предметы, расположенные между первым и вторым разделителем, – во второй ящик и так далее, предметы расположенный после $k-1$ разделителя, – в k ящик. По формуле перестановок с повторениями число таких перестановок равно $P(n, k-1) = C_{n+k-1}^{k-1}$. Значит, всего имеем C_{n+k-1}^{k-1} способов разложить n одинаковых предметов в k ящиков.

Задача.

Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть нас интересует, сколько яблок получит каждый, а не какие именно)?

Решение.

Добавим два разделяющих предмета, тогда получаем $P(40, 2) = 780$ способа разделить яблоки.

Следствие 1. Если в каждый ящик надо положить не менее r предметов, то получим: $P(n-k \cdot r, k-1)$ способов.

Следствие 2. Если в каждый ящик надо положить хотя бы один предмет, то $r=1$ и получим $P(n-k, k-1) = C_{n-1}^{k-1}$ способов распределения.

Сколько существует способов разложить n различных предметов в k ящиков, если нет никаких ограничений?

Каждый предмет можно положить в любой из k ящиков. Получаем k^n способов распределения предметов по ящикам.

Задача.

Сколькими способами можно разделить 8 различных пирожных между 5 детьми?

Решение.

Необходимо разложить 8 предметов по 5 ящикам. Это можно сделать $5^8=390\ 625$ способами.

Сколькими способами можно поместить n различных предметов в k ящиков, если не должно быть пустых ящиков?

Данные r ящиков остаются пустыми, если в $k-r$ ящиков предметы кладутся без ограничений. r пустых ящиков можно выбрать C_n^k способами. В оставшиеся $k-r$ ящиков предметы можно разложить $(k-r)^n$ способами. По формуле включений и исключений число распределений, при которых хотя бы один ящик остается пустым, равно $C_k^1 \cdot (k-1)^n - C_k^2 \cdot (k-2)^n + \dots + (-1)^k \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n$. Тогда количество распределений, при которых ни один ящик не окажется пустым, равно

$$k^n - (C_k^1 \cdot (k-1)^n - C_k^2 \cdot (k-2)^n + \dots + (-1)^k \cdot C_k^{k-1} \cdot 1^n).$$

Задача.

Сколькими способами можно послать по почте 8 различных фотографий, использовав 5 конвертов?

Разбор.

Переформулируем задачу: необходимо 8 предметов разложить в 5 ящиков. Посылать пустые конверты не рационально, поэтому накладывается запрет на пустые ящики.

Применяя полученную выше формулу, получаем

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126\ 020.$$

Имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 – другого, ..., n_s – s -го сорта. Сколькими способами их можно разложить по k ящикам, если не должно быть пустых ящиков?

Применяя рассуждения, аналогичные предыдущей задаче, получим следующую формулу

$$C_{n_1+k-1}^{k-1} \cdot C_{n_2+k-1}^{k-1} \cdot \dots \cdot C_{n_s+k-1}^{k-1} - C_k^1 \cdot C_{n_1+k-2}^{k-2} \cdot \dots \cdot C_{n_s+k-2}^{k-2} + C_k^2 \cdot C_{n_1+k-3}^{k-3} \cdot \dots \cdot C_{n_s+k-3}^{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot C_k^{k-1}.$$

Задача.

Сколькими способами можно разделить 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 детьми, если каждый должен получить хотя бы один фрукт?

Решение.

Требуется 8 предметов одного сорта, 10 второго и 7 третьего разложить в 4 ящика так, чтобы ни один ящик не оказался пустым. По предыдущей формуле получаем

$C_{11}^3 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{10}^3 - C_4^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 \cdot C_9^2 + C_4^2 \cdot C_9^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_8^1 - C_4^3 = 5\,464\,800$ способов такого распределения.

Сколькими способами можно распределить n различных предметов по k различным ящикам с учетом порядка расположения предметов в ящиках, причем все n предметов должны быть использованы?

Добавим к n предметам $k-1$ одинаковых разделяющих предмета. Рассмотрим все возможные перестановки из n различных предметов и $k-1$ одинаковых. Каждая такая перестановка определяет один из способов распределения. Всего таких перестановок $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$. Значит, n различных предметов можно разложить в k ящиков, с учетом

расположения их в ящиках, $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n$ способами.

К тому же результату можно было прийти и другим путем. Переставим всеми возможными способами данные n предметов ($n!$ способов). Теперь считаем предметы неразличимыми, их можно разложить в k ящиков $P(n, k-1)$ способами. Получаем $n! \cdot P(n, k-1) = A_{n+k-1}^n$ способов распределения этих вещей по k различным ящикам с учетом порядка их расположения в ящиках.

Задача.

Имеются 6 различных сигнальных флагов и 3 мачты, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке вывешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все флаги должны быть использованы, но некоторые из мачт могут оказаться пустыми?

Решение.

Имеем 6 предметов, которые необходимо разложить в 3 ящика, причем порядок предметов в ящике важен. Это можно сделать $\frac{(6+3-1)!}{(3-1)!} = \frac{8!}{2!} = 20\,160$ способами.

Следствие. Если не должно быть пустых ящиков, то выберем k предметов и разложим по одному в каждый ящик. Это можно сделать A_n^k способами. Оставшиеся $n-k$ предметов разложим в $k-1$ ящик, причем теперь некоторые ящики могут оказаться пустыми. Это

распределение можно осуществить $\frac{(n-k+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$ способами. Всего имеем

$$A_n^k \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = n! \cdot C_{n-1}^{k-1} \text{ способов распределения.}$$

Сколькими способами можно распределить n различных предметов по k различным ящикам с учетом порядка расположения предметов в ящиках, причем не все n предметов могут быть использованы и некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Разобьем все возможные комбинации на классы. В s класс войдут комбинации, в которых использованы ровно s предметов. Из предыдущей задачи известно, что s предметов можно разложить по k ящикам A_{s+k-1}^s способами. s предметов из данных n можно выбрать C_n^s способами. Всего в s класс войдут $C_n^s \cdot A_{s+k-1}^s$ комбинаций. По правилу суммы имеем $C_n^0 \cdot A_{k-1}^0 + C_n^1 \cdot A_k^1 + C_n^2 \cdot A_{k+1}^2 + \dots + C_n^n \cdot A_{n+k-1}^n$ способов распределения n различных предметов по k различным ящикам с учетом порядка их расположения в ящиках, если не все n предметов могут быть использованы.

Задача.

Имеются 6 различных сигнальных флагов и 3 мачты, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке вывешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если не все флаги могут быть использованы и некоторые из мачт могут оказаться пустыми?

Решение.

Имеем 6 различных предметов, которые необходимо разложить в 3 ящика, причем порядок предметов в ящике важен и не все ящики и предметы могут быть использованы. По формуле получаем

$$C_6^0 \cdot A_2^0 + C_6^1 \cdot A_3^1 + C_6^2 \cdot A_4^2 + C_6^3 \cdot A_5^3 + C_6^4 \cdot A_6^4 + C_6^5 \cdot A_7^5 + C_6^6 \cdot A_8^6 = 42\,079$$

Следствие. Если не должно быть пустых ящиков, то в этом случае имеем

$$C_n^k \cdot C_{k-1}^{k-1} \cdot k! + C_n^{k+1} \cdot C_k^{k-1} \cdot (k-1)! + C_n^{k+2} \cdot C_{k+1}^{k-1} \cdot (k+2)! + \dots + C_n^n \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot n! \text{ способов распределения.}$$

Вероятность

Частотой появления события в серии испытаний называется отношение числа наступления этого события в данной последовательности испытаний к общему числу испытаний.

Вероятностью случайного события называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу всех равновозможных элементарных событий.

Равновозможными элементарными событиями будем считать такие события, любое из которых по отношению к другим событиям не обладает никаким преимуществом появляться чаще другого при многократных испытаниях, проводимых в одинаковых условиях.

Например, при бросании игральной кости возможны шесть различных результатов; из них лишь в одном случае выпадает шестёрка. Поэтому вероятность выпадения шестёрки равна $1/6$.

Задача.

Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9), набираемая на 4 колесиках.

- а) Найти вероятность наугад открыть камеру хранения.
- б) Найти вероятность наугад открыть камеру хранения, если дополнительно стало известно, что все цифры на правильном номере разные.

Решение.

а) Всего комбинаций из 10 цифр по 4 $\bar{A}_{10}^4 = 10^4$ вариантов. Открывает дверцу только одна из них, так что вероятность наудачу открыть ее равна $1/10000 = 0,0001$.

б) Всего комбинаций из 10 цифр по 4, если все цифры различны – $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,400$ вариантов. Открывает дверцу по-прежнему только один, откуда вероятность открыть дверцу становится $1/5400 \cong 0,0002$.

Таким образом, вероятность в простейшем случае вычисляется комбинаторно.

Свойства вероятности

1. Из определения вероятности следует, что вероятность случайного события A не больше единицы и не меньше нуля. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Любое событие может либо произойти, либо не произойти. Это означает, что сумма вероятностей некоторого события A и события, ему противоположного, равна 1.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (где \bar{A} противоположное событие или условие, по отношению к A).

Часто для вычисления вероятностей используют переход к противоположному событию $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Задача.

В некоторой детской игре для начала игры участнику нужно обязательно выбросить пятерку. Поскольку граней на косточке всего шесть, то кажется, что уж в шести бросках пятерка выпадет наверняка. Найдите вероятность этого события.

Решение.

$$P(\text{хоть один раз из шести выпадет "5"}) = 1 - P(\text{ни разу из шести не выпадет "5"}) = 1 - \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1 - \frac{(6-1)^6}{6^6} = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = 0.6651$$

3. Иногда разбивают сложный благоприятный исход на простейшие или стандартные.

$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$ – вероятность того, что произойдет событие А или событие В, равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность того, что события А и В произойдут одновременно.

Задача.

Игральную кость подбрасывают один раз. Какова вероятность выпадения либо четного числа очков, либо числа, кратного трем?

Решение.

Введем обозначения:

А – выпадения либо четного числа очков, либо числа, кратного трем;

В – выпадения четного числа очков;

С – выпадения числа, кратного трем.

$$P(A) = P(B \text{ или } C) = P(A) + P(B) - P(B \text{ и } C) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 2/3.$$

Задача.

Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность, что выпадет число очков не менее пяти?

Решение.

$$P(\text{выпадение числа очков не менее пяти}) = P(\text{выпадение «5»}) + P(\text{выпадение «6»}) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Бином Ньютона

Правила и формулы комбинаторики часто используют при решении различных задач математики. Комбинаторные доказательства отличаются простотой и особой изысканностью. Рассмотрим применение комбинаторики к доказательству формулы бинома Ньютона.

Биномом Ньютона называют формулу для вычисления выражения $(a+b)^n$ для натуральных n .

Теорема $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Доказательство.

Данную формулу можно доказать методом математической индукции. Ниже представлено комбинаторное доказательство.

Запишем $(a+b)^n$ в виде произведения $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$.

Раскроем скобки в правой части этого равенства и запишем все слагаемые в виде произведения n сомножителей a и b в том порядке, в котором они появляются.

Например, $(a+b)^2$ запишется в виде $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = aa+ab+ba+bb$, а $(a+b)^3$ – в виде $(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$.

Видно, что в обе формулы входят все размещения с повторениями, составленные из букв a и b по две (три) буквы в каждом.

В общем случае – после раскрытия скобок получим всевозможные размещения с повторениями букв a и b , состоящие из n элементов. Используя коммутативность, приведем подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв a (тогда и букв b в них будет одинаковое количество). Членов, в которые входит k букв a и, следовательно, $(n-k)$ букв b ровно $P(k, n-k) = C_n^k$. Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение $a^k b^{n-k}$ войдет с коэффициентом C_n^k , поэтому формула примет

вид: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Задача.

Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(3x+2y)^4$, используя формулу бинома Ньютона.

Решение.

$$\begin{aligned} (3x + 2y)^4 &= C_4^0 \cdot (3x)^0 \cdot (2y)^4 + C_4^1 \cdot (3x)^1 \cdot (2y)^3 + C_4^2 \cdot (3x)^2 \cdot (2y)^2 + C_4^3 \cdot (3x)^3 \cdot (2y)^1 + \\ &+ C_4^4 \cdot (3x)^4 \cdot (2y)^0 = 16 \cdot y^4 + 4 \cdot 3 \cdot x \cdot 8 \cdot y^3 + 6 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 4 \cdot y^2 + 4 \cdot 27 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot y + 81 \cdot x^4 = \\ &= 16y^4 + 96xy^3 + 216x^2y^2 + 216x^3y + 81x^4 \end{aligned}$$

Задача.

Найти коэффициент при x^2 в разложении $(2x+3)^6$.

Решение.

В данной задаче требуется найти коэффициент только при x^2 , поэтому нет необходимости раскрывать все выражение по формуле бинома Ньютона. Достаточно рассмотреть только одно слагаемое

$$C_6^2 (2x)^2 3^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} \cdot 4 \cdot x^2 \cdot 3^4 = 15 \cdot 4 \cdot 81 \cdot x^2 = 4860 \cdot x^2.$$

Таким образом, x^2 в разложении $(2x+3)^6$ будет иметь коэффициент 4 860.

Числа C_n^k называют **биномиальными коэффициентами**.

С помощью бинома Ньютона легко доказать свойства биномиальных коэффициентов (чисел C_n^k).

Свойства биномиальных коэффициентов.

Симметричность биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$

Это свойство следует из тождества $(a+b)^n = (b+a)^n$. Разложим обе части равенства по биному Ньютона и рассмотрим коэффициенты при $a^k \cdot b^{n-k}$. Справа коэффициент равен C_n^k , а слева C_n^{n-k} .

Основное свойство биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Если в формуле бинома Ньютона положить $a=1$, $b=x$ то получим,

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^k + \dots + C_n^n \cdot x^n.$$

Если положить n равным $n-1$ то верно равенство

$$(1+x)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 \cdot x + C_{n-1}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{n-1}^k \cdot x^k + \dots + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(1+x)$, получим

$$(1+x)^n = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 \cdot x + C_{n-1}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{n-1}^k \cdot x^k + \dots + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^{n-1}) \cdot (1+x).$$

Выражение в левой части равенства снова разложим по формуле бинома Ньютона.

Рассмотрим коэффициент при x^k . Слева он будет равен C_n^k . В правой части член содержащий x^k появится дважды: при умножении $C_{n-1}^k \cdot x^k$ на 1 и при умножении $C_{n-1}^{k-1} \cdot x^{k-1}$ на x . Поэтому коэффициент в правой части при x^k имеет вид $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. Слева и справа стоит один и тот же многочлен, поэтому коэффициенты при x^k слева и справа должны быть одинаковыми. Поэтому $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Сумма биномиальных коэффициентов $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона, в которой положим $a=1$ и $b=1$. Тогда

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = (1+1)^n.$$

Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона в которой положим $a=1$ и $b=-1$.

Сумма квадратов биномиальных коэффициентов

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^k)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Как и при доказательстве основного свойства, используем равенство

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^k + \dots + C_n^n \cdot x^n.$$

Умножим обе части этого равенства на $(1+x)^n$:

$$(1+x)^{2n} = (C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^k + \dots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n) \times \\ \times (C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^k + \dots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n).$$

Выражение в левой части равенства снова разложим по формуле бинома Ньютона.

Рассмотрим коэффициент при x^n . Слева он будет равен C_{2n}^n . В правой части член,

содержащий x^n , появится n раз: при умножении $C_n^n \cdot x^n$ на C_n^0 , при умножении $C_n^{n-1} \cdot x^{n-1}$ на

$C_n^1 \cdot x$, и так далее. Используем свойство симметричности биномиальных коэффициентов,

получим коэффициент при x^n в правой части равенства:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^k)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Так как слева и справа стоит один и тот же многочлен, то коэффициенты при x^n слева и

справа должны быть одинаковыми. Поэтому $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^k)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Треугольник Паскаля.

Другая, известная как треугольник Паскаля, интерпретация для биномиальных коэффициентов получается, если рассмотреть на бесконечной шашечной доске количество различных путей шашки от данной клетки до всех клеток доски.

Возьмем шахматную доску, ограниченную только с одной стороны, и поставим на поле А (черного цвета) нулевой горизонтали шашку. Двигаясь по правилам игры в шашки, она может попасть на любое поле черного цвета из области, ограниченной прямыми АВ и АС. Напишем на каждом поле число способов, которыми можно попасть на данное поле. Получим

А						
			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1
В						С

Эти числа обычно изображают в виде треугольника, при этом каждое число равно сумме двух элементов предыдущей строки, между которыми оно находится. Этот треугольник часто называют треугольником Паскаля или арифметическим треугольником.

Арифметический треугольник можно записать и в таком виде:

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

В данном треугольнике, в каждой клетке хранится количество способов попасть в эту клетку из клетки (0, 0), если ходить разрешается только вниз и по диагонали вправо. Каждое число треугольника равно сумме числа, стоящего выше него, и числа, расположенного наискосок влево. На пересечение k-й вертикали и n-й горизонтали можно попасть за n шагов, k из которых будут по диагонали, n – k по вертикали. Поэтому количество способов попасть в клетку с координатами (n, k) равно C_n^k .

Отметим еще следующие особенности арифметического треугольника: *все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, а нулевой столбец состоит из единиц.* Числа, стоящие в n-й строке, являются коэффициентами в разложении бинома $(1+x)^n$ по степеням x. Поэтому их называют также *биномиальными коэффициентами.*

Задача.

Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(x+y)^5$.

Решение.

Пятая строка треугольника Паскаля имеет вид: 1 5 10 10 5 1. Поэтому

$$(x+y)^5 = 1x^0y^5 + 5x^1y^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y^1 + 1x^5y^0.$$

С помощью треугольника Паскаля можно доказать свойства биномиальных коэффициентов. (Смотри упражнения.)

Полиномиальная формула

Полиномом называют выражение вида $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$.

Полиномиальной формулой называют формулу для вычисления значения выражений $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ для различного числа слагаемых и различных натуральных степеней n.

Теорема $\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$

Доказательство.

Формула доказывается аналогично формуле бинома Ньютона.

Запишем $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ в виде произведения n сомножителей $(x_1+x_2+\dots+x_k)\cdot(x_1+x_2+\dots+x_k)\cdot\dots\cdot(x_1+x_2+\dots+x_k)$.

Раскроем скобки в правой части этого равенства и запишем все слагаемые в виде произведения n сомножителей x_1, x_2, \dots, x_k в том порядке, в котором они появляются. Получим всевозможные размещения с повторениями букв x_1, x_2, \dots, x_k , состоящие из n элементов. Используем коммутативность и приведем подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество множителей x_1, x_2, \dots, x_k . Членов, в которые входит k_1 множителей x_1, k_2 множителей x_2 и так далее k_m множителей x_m , ровно $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ войдет с коэффициентом $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Поэтому формула примет вид:

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Свойства чисел $P(k_1 k_2 \dots k_m)$

$$1. \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(k_1, k_2, \dots, k_m) = m^n.$$

Доказательство.

Если в полиномиальной формуле положить $x_1=x_2=\dots=x_m=1$, то получим требуемое равенство.

$$2. P(k_1, k_2, \dots, k_m) = P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + P(k_1, k_2, \dots, k_m - 1).$$

Доказательство.

Умножим обе части равенства

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^{n-1} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n-1} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \text{ на } (x_1+x_2+\dots+x_m).$$

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^n = \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n-1} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}\right) (x_1 + x_2 + \dots + x_m).$$

Применим к левой части полиномиальную формулу, а в правой части раскроем скобки и рассмотрим коэффициент при $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$. Слева он будет равен $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$. В правой части член, содержащий $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$, появится m раз: при умножении $P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1-1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ на x_1 , при умножении $P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ на x_2 и так далее коэффициент при $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ будет равен $P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + P(k_1, k_2, \dots, k_m - 1)$. Слева и справа стоит один и тот

же многочлен, следовательно, коэффициенты при $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ слева и справа должны быть равны. Поэтому

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + P(k_1, k_2, \dots, k_m - 1).$$

Задача.

Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(x+y+z)^4$, используя полиномиальную формулу.

Решение.

Ясно, что коэффициенты при x^2yz и xy^2z равны. Поэтому достаточно найти коэффициенты для таких разбиений $n=k_1+k_2+\dots+k_m$, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, а потом переставлять показатели всеми возможными способами. Для нашего примера имеем:

$$4=4+0+0; \quad 4=3+1+0; \quad 4=2+2+0; \quad 4=2+1+1;$$

$$P(4,0,0)=1; \quad P(3,1,0)=4; \quad P(2,2,0)=6; \quad P(2,1,1)=12.$$

$$(x+y+z)^4 =$$

$$=x^4+y^4+z^4+4x^3y+4x^3z+4y^3x+4y^3z+4z^3x+4z^3y+6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2.$$

Задача.

Найти коэффициенты при x^5 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(2+x^2-x^3)^9$.

Решение.

В задаче нас интересует только коэффициент при x^5 , поэтому нет необходимости искать все коэффициенты. Член, содержащий x^5 , появится только один раз как слагаемое вида $2^7(x^2)^1(-x^3)^1$, коэффициент при этом члене согласно полиномиальной формуле будет равен $P(7, 1, 1)=72$. Следовательно, коэффициент при x^5 равен $(-1) \cdot 2^7 \cdot 72 = -9 \cdot 216$.

Задача.

Найти коэффициенты при x^{12} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^2+x^5)^8$.

Решение.

Данная задача отличается от предыдущей тем, что член, содержащий x^{12} , появится два раза: как слагаемое вида $1^2 \cdot (x^2)^6 \cdot (x^5)^0$ и $1^5 \cdot (x^2)^1 \cdot (x^5)^2$. В первом случае коэффициент будет равен $P(2, 6, 0)=28$, во втором – $P(5, 1, 2)=168$. Следовательно, коэффициент при x^{12} равен $28+168=196$.

Рекуррентные соотношения.

Задача.

Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размером 2×7 костями домино, если все кости считать одинаковыми и учитывать только положение кости: горизонтальное или вертикальное?

Решение.

Обозначим через $\Phi(k)$ количество способов замостить костями домино прямоугольную доску размером $2 \times k$. Угловая клетка может быть закрыта одним из двух способов: либо костью, которая лежит вертикально, тогда оставшуюся $k-1$ кость можно положить $\Phi(k-1)$ способами, либо костью, которая лежит горизонтально, тогда еще одну кость можем положить только горизонтально, а оставшиеся $k-2$ кости можно уложить $\Phi(k-2)$ способами. Используя правило суммы, приходим к соотношению $\Phi(k)=\Phi(k-1)+\Phi(k-2)$. Учитывая, что $\Phi(0)=\Phi(1)=1$, можем для любого значения k найти ответ: $\Phi(2)=2$, $\Phi(3)=3$, $\Phi(4)=5$, $\Phi(5)=8$, $\Phi(6)=13$, $\Phi(7)=21$. Имеем 21 способ замостить костями домино прямоугольную доску размером 2×7 .

При решении многих комбинаторных (и не только) задач часто встречается способ, когда задачу с заданными значениями параметров сводят к аналогичной задаче, но уже с меньшими значениями параметров. Таким образом, можно довести задачу до простой. Данный метод решения задач носит название **метода рекуррентных соотношений**. (От латинского слова *recurre* – возвращаться).

Пример.

Используя метод рекуррентных соотношений, можно по-новому вывести формулу для вычисления числа перестановок из k предметов.

Обозначим за $P(k)$ количество перестановок из элементов k типов. В перестановке на первом месте может быть любой из k предметов, а оставшиеся $k-1$ предмет можно в каждом из этих случаев переставить $P(k-1)$ способами. По правилу произведения получаем формулу $P(k)=k \cdot P(k-1)$. Далее замечаем, что $P(1)=1$, и получаем, что $P(k)=k!$

Числа Фибоначчи

Формула, которую мы получили при решении задачи о домино, впервые была опубликована в книге “*Liber Abaci*”, появившейся в 1202 году, где итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привел следующую:

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будут эти $F(n)$ пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, то есть еще $F(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1).$$

Так как, по условию, $F(0)=1$ и $F(1)=2$, то последовательно находим

$$F(2)=3, F(3)=5 F(4)=8 \text{ и т. д.}$$

Полученные числа называют числами Фибоначчи.

Чтобы найти $F(12)$, нам придется последовательно вычислить $F(3), F(4), \dots F(11)$, что достаточно долго. А если нам необходимо было бы вычислить $F(100)$, то это займет еще больше времени. Попробуем выразить закономерность последовательности Фибоначчи с помощью расчетной формулы (вместо неявного рекуррентного соотношения). Для этого присвоим двоичный номер каждой паре кроликов. Единицам соответствуют месяцы появления на свет одной из пар “предков” данной пары (включая и исходную), а нулями – все остальные месяцы. Например, последовательность 010010100010 устанавливает такую “генеалогию” – сама пара появилась в конце 11-го месяца, ее родители – в конце 7-го месяца, “дед” – в конце 5-го месяца, “прадед” – в конце второго месяца. Исходная пара кроликов зашифровывается при этом последовательностью 000000000000. в последовательности не могут идти подряд две единицы, так как кролики приносят приплод только на второй месяц после рождения.

Тем самым устанавливается связь между числами Фибоначчи и следующей комбинаторной задачей: найти число n -последовательностей, состоящих из нулей и единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд. Число таких последовательностей, в которые входит ровно k единиц и $n-k$ нулей, равно C_{n-k+1}^k . Так как при этом должно выполняться неравенство $k \leq n-k+1$, то k изменяется от 0 до целой части числа $(n+1)/2$. Применяя правило суммы, получаем $F(n)=C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-p+1}^p$, где p – целая часть числа $(n+1)/2$.

К сожалению, задачу нельзя считать решенной, так как, хотя получено выражение, зависящее от n , его вычисление оказывается даже сложнее рекуррентных расчетов. Желаемую формулу можно получить совсем другим способом.

Решение рекуррентных соотношений

Рекуррентное соотношение имеет **порядок k** , если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n)$, $f(n+1)$, ..., $f(n+k-1)$.

Пример.

$f(n+2)=f(n)f(n+1)-3f^2(n+1)+1$ – рекуррентное соотношение второго порядка.

$f(n+3)=6f(n)f(n+2)+f(n+1)$ – рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k -го порядка, то ему могут удовлетворять бесконечно много последовательностей, так как первые k элементов последовательности можно задать произвольно – между ними нет никаких соотношений. Но если первые k членов заданы, то все остальные элементы определяются однозначно.

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, при этом рано или поздно мы получим любой её член. Однако если необходимо узнать только один определенный член последовательности, то нерационально вычислять все предыдущие. В этом случае удобнее иметь формулу для вычисления n -го члена.

Решением рекуррентного соотношения называется любая последовательность, для которой данное соотношение выполнено тождественно.

Пример.

Последовательность $2, 4, 8, \dots, 2n$ является решением для соотношения

$$f(n+2)=3 \cdot f(n+1) - 2 \cdot f(n).$$

Доказательство:

Общий член последовательности имеет вид $f(n)=2^n$. Значит, $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$.

При любом n имеет место тождество $2^{n+2}=3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n$. Следовательно, при подстановке последовательности 2^n в формулу $f(n+2)=3f(n+1) - 2f(n)$ соотношение выполняется тождественно. Значит, 2^n является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения k -го порядка называется **общим**, если оно зависит от k произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

Пример.

Дано рекуррентное соотношение: $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)$. Докажем, что его общее решение имеет вид: $f(n)=\alpha 2^n + \beta 3^n$.

1. Сначала докажем, что последовательность $f(n)=\alpha 2^n + \beta 3^n$ является решением рекуррентного соотношения. Подставим данную последовательность в рекуррентное соотношение.

$$f(n)=\alpha 2^n + \beta 3^n, \text{ значит, } f(n+1)=(\alpha 2^{n+1} + \beta 3^{n+1}), f(n+2)=\alpha 2^{n+2} + \beta 3^{n+2}, \text{ тогда}$$

$$5f(n+1)-6f(n)=5\cdot(\alpha 2^{n+1} + \beta 3^{n+1})-6\cdot(\alpha 2^n + \beta 3^n)=\alpha (5 2^{n+1} -6 2^n)+\beta (5 3^{n+1} -6 3^n)=$$

$$=\alpha 2^n \cdot(10-6)+\beta 3^n \cdot(15-6)=\alpha 2^{n+2} + \beta 3^{n+2}=f(n+2).$$

Рекуррентное соотношение выполняется, следовательно, $\alpha 2^n + \beta 3^n$ является решением данного рекуррентного соотношения.

2. Докажем, что любое решение соотношения $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)$ можно записать в виде $f(n)=\alpha 2^n + \beta 3^n$. Но любое решение рекуррентного соотношения второго порядка однозначно определяется значениями первых двух членов последовательности. Поэтому достаточно показать, что для любых $a=f(1)$ и $b=f(2)$ найдутся α и β такие, что $2\alpha + 3\beta =a$ и $4\alpha + 9\beta =b$. Легко видеть, что система уравнений имеет решение для любых значений a и b .

Таким образом, $f(n)=\alpha 2^n + \beta 3^n$ является общим решением рекуррентного соотношения $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)$.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил нет, но существует часто встречающийся класс рекуррентных соотношений, для которых известен алгоритм их решения. Это – линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, т.е. соотношения вида:

$$f(n+k)=c_1 f(n+k-1)+c_2 f(n+k-2)+\dots+c_k f(n).$$

Найдем решение общего линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами первого порядка.

Линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами первого порядка имеет вид: $f(n+1)=c f(n)$.

Пусть $f(1)=a$, тогда $f(2)=c \cdot f(1)=c \cdot a$, $f(3)=c \cdot f(2)=c^2 \cdot a$, аналогично $f(4)=c^3 \cdot a$ и так далее, заметим, что $f(n)=c^{n-1} \cdot f(1)$.

Докажем, что последовательность $c^{n-1} \cdot f(1)$ является решением рекуррентного соотношения первого порядка. $f(n)=c^{n-1} \cdot f(1)$, значит, $f(n+1)=c^n f(1)$. Подставляя это выражение в соотношение, получим тождество $c^n f(1)=c \cdot c^{n-1} \cdot f(1)$.

Рассмотрим теперь подробнее ***линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка***, то есть соотношения вида

$$f(n+2)=C_1 \cdot f(n+1)+C_2 \cdot f(n). (*)$$

Заметим, что все рассуждения сохраняются и для соотношений более высокого порядка.

Свойства решений:

- 1) Если последовательность x_n является решением (*), то и последовательность $\alpha \cdot x_n$ тоже является решением.

Доказательство.

x_n является решением (*), следовательно, выполняется тождество $x_{n+2}=C_1 x_{n+1}+C_2 x_n$. Домножим обе части равенства на α . Получим $\alpha \cdot x_{n+2} = \alpha \cdot (C_1 \cdot x_{n+1} + C_2 \cdot x_n) = C_1 \cdot \alpha \cdot x_{n+1} + C_2 \cdot \alpha \cdot x_n$. Это означает, что αx_n является решением (*).

- 2) Если последовательности x_n и y_n являются решениями (*), то и последовательность $x_n + y_n$ тоже является решением.

Доказательство.

x_n и y_n являются решениями, следовательно, выполняются следующие тождества:

$$x_{n+2}=C_1 x_{n+1}+C_2 x_n.$$

$$y_{n+2}=C_1 y_{n+1}+C_2 y_n.$$

Выполним почленное сложение двух равенств:

$x_{n+2}+y_{n+2}=C_1 \cdot x_{n+1}+C_2 \cdot x_n + C_1 \cdot y_{n+1}+C_2 \cdot y_n = C_1 \cdot (x_{n+1}+ y_{n+1})+C_2 \cdot (x_n +y_n)$. Это означает, что x_n+y_n является решением (*).

- 3) Если r_1 является решением квадратного уравнения $r^2=C_1 r+C_2$, то последовательность $(r_1)^n$ является решением для соотношения (*).

r_1 является решением квадратного уравнения $r^2=C_1 r+C_2$, значит, $(r_1)^2=C_1 r_1+C_2$.

Помножим обе части равенства на $(r_1)^n$. Получим

$$r_1^2 r_1^n = (C_1 r_1 + C_2) r_1^n.$$

$$r_1^{n+2} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_1^n.$$

Это означает, что последовательность $(r_1)^n$ является решением (*).

Из этих свойств вытекает **способ решения** линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами второго порядка:

1. Составим характеристическое (квадратное) уравнение $r^2=C_1 r+C_2$. Найдём его корни r_1, r_2 . Если корни различны, то общее решение имеет вид $f(n)=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$.
2. Найдём коэффициенты α и β . Пусть $f(0)=a, f(1)=b$. Система уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha \cdot r_1 + \beta \cdot r_2 = b \end{cases}$$

имеет решение при любых a и b . Этими решениями являются

$$\alpha=(b-a \cdot r_2)/(r_1-r_2).$$

$$\beta=(a \cdot r_1-b)/(r_1-r_2).$$

Задача.

Найдем формулу для общего члена последовательности Фибоначчи.

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид $x^2=x+1$ или $x^2-x-1=0$, его корнями являются числа $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, значит, общее решение имеет вид $f(n)=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Как

нетрудно видеть, из начальных условий $f(0)=0, f(1)=1$ вытекает, что $\alpha=-\beta=1/\sqrt{5}$, и, следовательно, общее решение последовательности Фибоначчи имеет вид:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Что удивительно, это выражение при всех натуральных значениях n принимает целые значения.

Случай равных корней характеристического многочлена.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня, то общее решение имеет вид:

$$f(n)=\alpha \cdot r_1^n+\beta \cdot n \cdot r_1^n.$$

Доказательство.

В случае равных корней характеристического уравнения выражение $f(n)=\alpha \cdot r_1^n+\beta \cdot r_1^n$ нельзя считать общим решением, так как в формуле $f(n)=\alpha \cdot r_1^n+\beta \cdot r_1^n=r_1^n \cdot (\alpha+\beta)=\delta \cdot r_1^n$ останется только одна постоянная и выбрать её так, чтобы удовлетворить двум начальным $f(0)=a, f(1)=b$ условиям, невозможно. Найдем второе решение отличное от r_1^n .

Если квадратное уравнение $r^2=C_1 r+C_2$ имеет два совпадающих корня $r_1=r_2$, то по теореме Виета $C_1=2 r_1$, а $C_2=-r_1^2$. Поэтому уравнение записывается так:

$$r^2=2 \cdot r_1 \cdot r-r_1^2.$$

Тогда рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f(n+2)=2 r_1 f(n+1)-r_1^2 f(n).$$

Докажем, что $n r_1^n$ является решением данного рекуррентного соотношения.

Подставим $n r_1^n$ в полученное рекуррентное соотношение, получим верное равенство: $(n+2)r_1^{n+2}=2r_1(n+1)r_1^{n+1}-r_1^2 n r_1^n =2n r_1^{n+2}+2 r_1^{n+2}-n r_1^{n+2}=(n+2)r_1^{n+2}$, значит, $n r_1^n$ является решением данного рекуррентного соотношения.

Таким образом, имеем два решения рекуррентного соотношения: r_1^n и $n r_1^n$. Общее решение будет иметь вид: $f(n)=\alpha r_1^n+\beta n r_1^n$.

Задача.

Для последовательности с $f(1)=0$ и $f(2)=8$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f(k+2)=4f(k+1)-4f(k)$, выписать формулу общего члена.

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид: $r^2-4r+4=0$, его корни $r_1=r_2=2$. Общее решение рекуррентного соотношения: $f(k)=\alpha \cdot 2^k+\beta \cdot k \cdot 2^k$. Найдем коэффициенты α и β , пользуясь тем, что $f(1)=0$ и $f(2)=8$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha+2 \cdot \beta=0 \\ 4 \cdot \alpha+8 \cdot \beta=8 \end{cases}$$

Получим $\alpha=-2$ и $\beta=2$. Формула общего члена: $f(n)=-2^{(n+1)}+n \cdot 2^{(n+1)}$.

Линейные рекуррентные соотношения, порядок которых больше 2, решаются аналогично.

Задача.

Найдем общее решение рекуррентного соотношения:

$$f(n+4)=5f(n+3)-6f(n+2)-4f(n+1)+8f(n).$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид: $r^4-5r^3+6r^2+4r-8=0$

Решая его, получаем корни: $r_1=2, r_2=2, r_3=2, r_4=-1$.

Значит, общее решение имеет вид: $f(n)=2^{n-1}(\alpha+\beta \cdot n+\gamma \cdot n^2)+\delta \cdot (-1)^{n-1}$.

Асимптотики

Асимптотики – это искусство оценивания и сравнения скоростей роста функций.

Нередко в задачах на нахождение общего решения рекуррентного соотношения не требуется точное значение n -го члена, чаще бывает достаточной оценка порядка, а иногда требуется только оценка скорости роста функции $f(n)$. Для описания роста функции используется O -символика. (ввел Поль Бахман в 1894 г.)

Запись $f(n)=O(g(n))$ означает, что существуют положительные константы M и n_0 , такие, что $|f(n)| \leq M \cdot |g(n)|$, для всех целых $n \geq n_0$.

Пример1.

Для рекуррентного соотношения $f(n)=5f(n-1)-6f(n-2)$, с начальными членами $f(1)=0$ и $f(2)=13$ общее решение имеет вид $f(n)=2^n+3^n$. Можно сказать, что $f(n)=O(3^n)$.

Докажем это. Здесь $M=2$, а $n_0=1$.

Неравенство $2^n+3^n \leq 2 \cdot 3^n$ верно для всех $n \geq 1$

$3^n+3^n=2 \cdot 3^n$, значит, $2^n+3^n \leq 2 \cdot 3^n$, следовательно, $f(n)=O(3^n)$

Пример2.

Для последовательности Фибоначчи, как было доказано выше, формула общего члена

имеет вид: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$. Легко доказать, что $f_n=O(2^n)$.

Соотношение $f(n)=O(g(n))$ называют асимптотическим соотношением, оно означает, что функция $f(n)$ растет не быстрее, чем функция $g(n)$. Определены еще два асимптотических отношения.

Определение 1. Функция $f(x)$ асимптотически равна (эквивалентна) $g(x)$ (обозначается $f(x) \sim g(x)$) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim (f(x)/g(x))=1$.

Если функция $f(x)$ эквивалентна $g(x)$, то это означает, что $f(x)$ растет с такой же скоростью, как и $g(x)$.

Определение 2. $f(x)=o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, если $\lim (f(x)/g(x))=0$.

Если $f(x)=o(g(x))$, то это означает, что функция $f(x)$ растет медленнее, чем $g(x)$.

Замечание.

В соотношениях, использующих O -символику, левые и правые части не симметричны: правая часть всегда содержит меньше информации, чем левая, и поэтому нельзя в любом контексте заменять левую часть выражения правой. Например, из двух корректных асимптотических равенств $x=O(x^2)$ и $x^2=O(x^2)$ не следует, что $x=x^2$.

Примеры.

1. Полином асимптотически равен своему старшему члену:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = O(x^n) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

2. Полином $f(n)=2n^5+6n^4+6n^2+18$ есть $O(n^5)$.

3. Функция $f(n)=2^n$ есть $O(2^{n+1})$ и $o(5^{n+1})$.

4. Для линейного рекуррентного соотношения общее решение имеет вид:

$f(n)=C_1r_1^n+C_2r_2^n+\dots+C_kr_k^n$. Если нас интересует только асимптотическое поведение последовательности, то достаточно рассмотреть лишь члены $C_i(r_i)^n$, у которых r_i имеет максимальное абсолютное значение среди тех членов, у которых $C_i \neq 0$.

Существуют оценки и асимптотики для комбинаторных чисел. Наиболее известна асимптотика для чисел $n!$, называемая формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

O -символику используют также для оценки сложности алгоритма. Одной из важнейших характеристик алгоритма является его временная сложность в худшем случае.

Пусть некоторая задача имеет размерность n (например, длина массива при сортировке). Обозначим через $t(n)$ максимальное число действий, необходимое для решения задачи. Под действием понимают выполнение «простой» операции – любой арифметической операции, операции сравнения, присваивания и т. п. При этом сложность алгоритма зависит от конкретного вида команд. Поэтому при оценке интересует лишь асимптотическая сложность алгоритма, то есть порядок роста сложности при условии, что размер задачи неограниченно возрастает.

Алгоритм считается достаточно хорошим, если сложность этого алгоритма есть $O(n^k)$ при некотором $k > 0$. В таком случае говорят, что задача может быть решена за полиномиальное время, а сам алгоритм называется полиномиальным.

Задачи по комбинаторике

Общие правила комбинаторики

1. Имеется пять видов конвертов и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?
3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный, так чтобы они не лежали на одной горизонтали и вертикали?
4. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?
5. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
6. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
7. Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
8. Из трех различных экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?
9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова “КАМЗОЛ”?
10. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?
11. Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружности, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. Сколько таких знаков можно составить?
12. При составлении экипажа космического корабля необходимо учитывать психологическую совместимость экипажа. Известно, что команда состоит из трех человек: капитана, инженера и врача. Причем на должность капитана есть четыре

кандидата k_1, k_2, k_3, k_4 , на место инженера – 3 кандидата i_1, i_2, i_3 и на место врача - 3 кандидата v_1, v_2, v_3 . Проведенные исследования показали, что командир k_1 психологически совместим с инженерами i_1, i_3 и врачами v_2, v_3 , командир k_2 – с инженерами i_1, i_2 и со всеми врачами, командир k_3 – с инженерами i_1, i_2 и врачами v_1, v_3 , командир k_4 – со всеми инженерами и врачом v_2 . Кроме того, инженер i_1 психологически несовместим с врачом v_3 , инженер i_2 – с врачом v_1 , инженер i_3 – с врачом v_2 . Сколькими способами можно составить команду корабля?

13. В Стране Чудес есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В - 4 дороги, Из города А в город Г - две дороги, и из города Г в город В - тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?
14. В магазине одежды продаются 5 видов костюмов троек (брюки, пиджак, жилет), 7 видов брюк, 3 вида пиджаков и 2 вида жилетов, кроме того, 3 вида костюмов двоек (брюки, пиджак). Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую брюки, пиджак и жилет?
15. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?
16. В книжном магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева “Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Все книги различны. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?
17. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?
18. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты, по одной каждой масти?
19. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?
20. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин (что-то одно), после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?
21. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки - белую и черную, так, чтобы белая шашка могла бить черную? Черная белую? Обе шашки могут бить друг друга? Ни одна не может бить другую?

Формула включения и исключения

22. Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 - леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 - шоколад и леденцы, 348 - конфеты и леденцы, а 297 - все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.
23. В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом. Докажите, что в этой информации сдержатся ошибки.
24. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько человек знают только английский язык? Только французский?
25. Сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5?
26. Сколько существует натуральных чисел меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?
27. В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 -одно ухо, 80 - одну руку и 85 - одну ногу. Страховая компания “Веселый Роджер”, в которой застрахованы пираты, задалась вопросом: каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку или ногу (страховой случай Total Permanent Disablement, при котором выплаты компании максимальны)?

Размещения с повторениями

28. Назовем натуральное число «симпатичным'», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?
29. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что все студенты экзамен сдали?
30. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?
31. Сколькими способами можно отправить 6 писем с тремя курьерами?

32. В клубе велосипедистов считается плохим знаком иметь членский билет, в номере которого есть цифра 8. Поэтому председатель клуба решил выдавать билеты с номерами, в которые ни одна 8 не входит. Сколько было членов в группе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?
33. На флоте применяют семафор флажками. Каждой букве соответствует определенное положение флажков. Всего положений каждого флажка пять – вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Но при передаче некоторых букв оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение?
34. В селении проживают 2000 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.
35. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?
36. Крокодил имеет 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух с одним и тем же набором зубов.
37. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства? (наибольшее число зубов равно 32)
38. При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифру и знаки препинания обозначаются точками и тире. При этом для одних букв используется только один знак (Е ·), а для некоторых приходится использовать пять знаков (Э · · · · ·). Почему нельзя обойтись меньшим числом знаков?
39. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет.
40. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейный цех (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают лишь женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между этими предприятиями?
41. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Размещения без повторений

42. Сколькими способами в группе студентов из 34 человек можно выбрать старосту и казначея? Если известно, что один человек не может занимать две должности сразу. Если известно, что один человек может занимать две должности сразу.
43. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
44. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?
45. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?
46. Забор состоит из 100 дощечек. У Тома Сойера есть краски 150 различных цветов. Сколько существует различных раскрасок забора, если все дощечки покрашены в разный цвет? Та же задача, но дощечки могут быть покрашены в одинаковый цвет.
47. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два различных числа?
48. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5? Тот же вопрос, но при условии, что ни одна цифра не повторяется?
49. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают ровно три имени?
50. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?
51. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? А если одна полоса обязательно должна быть красной?
52. Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 различных уроков, если изучается 14 предметов?
53. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?
54. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?
55. Докажите, что $A_m^n = A_{m-1}^n + n \cdot A_{m-1}^{n-1}$.

56. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу. Известно, что один человек может получить две путевки сразу.

Перестановки

57. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?
58. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?
59. В ряду зрительного зала 15 кресел. Сколькими способами можно разместить на них 15 человек?
60. На полке n различных книг. Сколькими способами их можно переставить.
61. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 мужчин и 6 женщин таким образом, чтобы мужчины и женщины чередовались?
62. Сколько существует перестановок из n различных элементов, в которых один данный элемент идет впереди другого данного элемента?
63. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два стоят рядом?
64. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два не стоят рядом?
65. Лингвисты разгадывают записи некоторого племени. Известно, что каждый символ обозначает один звук. Всего в алфавите 26 символов. Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма? Во сколько раз уменьшится количество возможных вариантов, если ученым удалось найти 7 знаков, обозначающих гласные, и 19 согласные?
66. Сколько существует различных последовательностей длины 5, составленных из трех 1 и двух 0?
67. Сколько существует различных пятизначных чисел, составленных из трех 1 и двух 0?
68. Бусы - это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных вариантов бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?
69. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

70. Сколькими способами на доске из n вертикалей и горизонталей можно расположить n ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? Ответьте на вопрос задачи, если все лады одинаковы и если все они различны.
71. Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов а) «ВЕКТОР»; б) «ЛИНИЯ»; в) «ПАРАБОЛА»; г) «БИССЕКТРИСА»; д) «МАТЕМАТИКА».

Сочетания

72. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если:
- Все путевки различны,
 - Все путевки одинаковы?
73. Сколько вариантов экзаменационной комиссии, состоящей из 5 человек, можно создать из 14 преподавателей?
74. Сколькими способами можно выбрать из n человек упорядоченную группу из k человек? Сколькими способами можно выбрать из n человек неупорядоченную группу из k человек?
75. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого - 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?
76. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько сделано рукопожатий?
77. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?
78. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников: одного для участия в математической олимпиаде, другого для участия в олимпиаде по физике. Сколькими способами это можно сделать, при условии, что олимпиады проходят в одно время?
79. Есть 3 билета в различные театры. Сколькими способами они могут быть распределены среди 25 студентов группы, если каждый студент может получить только один билет.)
80. На группу из 25 человек выделены 3 пригласительных билета на вечер. Сколькими способами они могут быть распределены (не более одного билета в руки)?
81. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

82. В классе, в котором учатся Петя и Ваня - 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?
83. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
84. На школьном вечере присутствуют 15 юношей и 12 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца?
85. Сколькими способами можно вырезать прямоугольник из клеток доски размером $m \times n$, при условии, что стороны прямоугольника состоят из целого количества клеток
86. Докажите формулу $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-n_2-\dots-n_k}^{n_k}$ двумя способами.

Сочетания с повторениями

87. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов.
- Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?
 - Сколькими способами можно купить 8 открыток?
 - Сколькими способами можно купить 12 открыток?
 - Сколькими способами можно купить 12 открыток, чтобы среди них оказались открытки 3 фиксированных типов?
 - Сколькими способами можно купить 20 открыток, чтобы среди них были открытки всех типов?
88. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?
89. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?
90. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?
91. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?
92. Сколько существует различных бросаний пяти одинаковых кубиков?

Разные задачи

93. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 50 и 70 бегунов соответственно, надо выбрать по одному бегуну для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
94. На ферме есть 10 телят и 24 поросенка. Сколькими способами можно выбрать по одному теленку и поросенку? А просто двух любых животных?

95. В шахматном кружке занимаются 15 девочек и 20 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из двух человек, в которую обязательно должны входить одна девочка и один мальчик. Сколькими способами это можно сделать?
96. У одного филателиста есть 5 марок для обмена, а у другого - 10. Сколькими способами они могут обменять марку одного на марку другого?
97. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «КАМЗОЛ»
98. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиадах по пяти различным предметам, если известно, что все олимпиады проходят одновременно? А если все олимпиады проходят в разное время?
99. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиаде по математике?
100. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?
101. Сколько вариантов итогов чемпионата по футболу из 20 команд, совпадающих в главном (то есть 3 призера и 4 вылетевшие команды)?
102. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?
103. Сколько существует десятизначных чисел, в которых пять цифр 1, три цифры 2 и две цифры 3?
104. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?
105. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?
106. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей?
107. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?
108. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в 3 комнаты: одно-, двух- и четырехместную?
109. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу.

110. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи, Евпаторию и Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу? Если известно, что один человек может получить сразу несколько путевок.
111. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?
112. На группу из 15 человек выделено 15 различных путевок. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?
113. На группу из 15 человек выделено 5 путевок в Сочи, 3 в Евпаторию и 7 в Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?
114. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?
115. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?
116. Сколько диагоналей в выпуклом n -угольнике?
117. В классе 30 человек. Сколько способов разбить класс на две группы и в каждой выбрать старосту?
118. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?
119. Сколько гирлянд можно составить из 5 красных шариков, 2 зеленых и 3 синих
120. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?
121. Сколько всего 6-значных чисел а) без единиц в записи. б) по крайней мере с одной единицей в записи.
122. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
123. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?
124. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы а) среди них был ровно один туз? б) ни одного туза в) среди них был хотя бы один туз?
125. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по 3 четных и нечетных цифры?
126. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

127. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?
128. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
129. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?
130. На плоскости даны 5 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?
131. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?
132. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?
133. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?
134. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более 3 юношей?
135. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных?
136. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.
137. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?
138. Сколько способов выстроить в шеренгу 213 группу (25 человек)? А если ребята (9 человек) не стоят рядом?
139. На книжной полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?
140. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить леди Дженивьеру. Сколькими способами это можно сделать, если среди выбранных рыцарей не должно быть врагов?
141. Сколькими способами можно переставить буквы слова обороноспособность так, чтобы никакие две буквы «о» не шли подряд?
142. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли подряд?

143. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

Комбинаторика разбиений

144. Сколькими способами можно разделить 14 конфет «Мишки на севере», 25 конфет «Ласточка» и 34 конфеты «Буревестник» между двумя детьми? Тот же вопрос, если каждый ребенок должен получить хотя бы пять конфет каждого вида.
145. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n – различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, где a_1, a_2, \dots, a_n – некоторые натуральные числа?
146. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами?
147. Сколькими способами можно разбить $m+n+p$ различных предметов на 3 группы так, чтобы в одной было m , в другой n , а в третьей p предметов. Порядок предметов в группе не важен.
148. При игре в преферанс 32 карты делятся между 3 игроками по 10 карт каждому, а две карты остаются в прикуп. Найдите число различных сдач?
149. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовали 12 человек, против 10, воздержались – 3. Сколькими способами могло быть проведено такое голосование?
150. Сколькими способами можно разбить 6 человек на две команды по 3 человека в каждой?
151. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?
152. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?
153. Сколькими способами можно разбить 30 рабочих на три бригады по 10 человек в каждой бригаде? На 10 групп по 3 человека?
154. Компания, состоящая из 10 супружеских пар, разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки. Сколькими способами можно разбить их так, чтобы в каждой лодке оказалось двое мужчин и двое женщин?
155. Даны 2к предметов. Рассматриваются всевозможные разбиения их на пары, причем разбиения, отличающиеся друг от друга только порядком внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует различных таких разбиений?

156. Сколькими способами из группы в 25 человек можно сформировать 5 коалиций по 5 человек?
157. Сколькими способами из группы в 19 человек можно сформировать 7 коалиций по 2 человека и 1 коалицию из 5 человек?
158. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?
159. Сколькими различными способами можно разделить 20 различных книг на 4 бандероли по 5 книг в каждой?
160. Сколькими различными способами можно разделить 19 различных книг на 3 бандероли по 5 книг и 1 бандероль в 4 книги?
161. Сколькими различными способами можно разделить 19 различных книг на 3 бандероли по 2 книги, 3 бандероли по 3 книги и 1 бандероль в 4 книги?
162. Сколькими различными способами можно разделить 19 одинаковых книг на 3 бандероли по 2 книги, 3 бандероли по 3 книги и 1 бандероль в 4 книги?
163. Сколькими способами можно разделить 7 одинаковых конфет между 3 детьми? Тот же вопрос, но каждый ребенок должен получить хотя бы одну конфету.
164. Сколькими способами можно разделить 7 различных конфет между 3 детьми? Тот же вопрос, но каждый ребенок должен получить хотя бы одну конфету.
165. Сколькими способами можно разбить число 10 на 4 слагаемых? Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.
166. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде 3 натуральных слагаемых. Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.
167. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?
168. Сколькими способами можно надеть пять различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?
169. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?
170. Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен оказаться пустым?
171. 7 студентов поехали кататься на лыжах в горы и остановились в маленьком отеле на 7 комнат. Считая, что каждый из них выбирает себе комнату наугад, найти вероятность

того, что в двух комнатах окажется по два студента, в одной – сразу три, а остальные будут пусты.

172. Сколькими способами можно рассадить n вновь прибывших гостей среди m гостей, уже сидящих за круглым столом?
173. Сколькими способами 15 одинаковых пирожков можно раздать пяти различным детям, если ни ребенок не должен остаться без пирожка?
174. Сколькими способами можно разбить 15 различных предметов на три группы так, чтобы в одной было 3, в другой 5, а в третьей 7 предметов.
175. Сколькими способами можно разбить 15 одинаковых предметов на три группы так, чтобы в одной было 3, в другой 5, а в третьей 7 предметов.
176. В комнате 3 окна. Сколькими способами можно распределить по ним 7 цветочных горшков, если каждое окно может вместить все 7 горшков, если порядок цветов на окне важен? Если порядок цветов на окне не важен?
177. Сколькими способами можно распределить 10 различных конфет между 3 детьми?
178. Сколькими способами можно распределить 10 одинаковых конфет между 3 детьми?
179. Сколькими способами можно распределить 10 одинаковых конфет между 3 детьми, так чтобы у каждого было хотя бы по две конфеты?
180. Сколькими способами можно распределить 10 различных конфет между 3 детьми, так чтобы первому досталось 2 конфеты, второму 3, третьему 5?
181. Сколькими способами можно распределить 10 одинаковых конфет между 3 детьми, так чтобы первому досталось 2 конфеты, второму 3, третьему 5?
182. Сколькими способами можно поставить 10 различных ваз на 3 полках?
183. Сколькими способами можно поставить 10 одинаковых ваз на 3 полках, так чтобы ни одна полка не оказалась пустой?
184. Сколькими способами можно повесить 10 различных елочных игрушек на три гирлянды?
185. Сколькими способами можно разложить 5 пятак и 7 двухрублевых монет в 2 кармана?
186. Сколькими способами можно рассадить 5 вновь прибывших гостей среди 7 уже сидящих за круглым столом?
187. Сколькими способами можно распределить 10 синих, 5 красных и 12 зеленых шаров между двумя детьми так, чтобы каждому ребенку досталось хотя бы по одному шару каждого цвета?
188. 36 карт делятся между 4 игроками, по 6 каждому и 12 остаются в колоде. Найдите число различных сдач?

189. Сколькими способами можно повесить 7 различных елочных игрушек между 4 уже висящими на одной гирлянде?

Вероятность

190. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.
191. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.
192. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули наугад два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
193. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули наугад пять шаров. Найти вероятность того, что два шара будут белыми, а три черными.
194. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., n .
195. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: 1, 2, ..., n .
196. 10 шаров раскладываются по 4 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике окажется 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3 и в четвертом 4, если все шары одинаковые? Если все шары различны?
197. Из полной колоды карт выбирают шесть. Найти вероятность, что среди них окажется ровно один валет и ровно одна дама.
198. Из полной колоды карт выбирают шесть. Найти вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна дама.
199. Из полной колоды карт выбирают шесть. Найти вероятность, что среди них окажется ровно один валет и по крайней мере одна дама.
200. Из полной колоды карт выбирают три. Найти вероятность, что среди них окажется по крайней мере один валет и по крайней мере одна дама.
201. Студент выучил 15 вопросов из 38. В билете 2 вопроса. Найдете вероятность, что студенту достанется 1 знакомый и один незнакомый вопрос.
202. В магазине электротоваров партия лампочек состоит из 800 изделий. Из них 30 лампочек некачественные. Вы купили 10 лампочек. Какова вероятность, что ровно 3 из них окажутся некачественными

203. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля g изделий. Найти вероятность того, что из них ровно s изделий будут дефектными.
204. Найти вероятность того, что при вытаскивании трех карт из полной колоды в 52 карты получится комбинация тройка, семерка, туз.
205. При игре в кости бросаются 2 кости и выпавшие на верхних гранях очки складываются. Какова вероятность выбросить 12 очков?
206. (*Генуэзская лотерея*) В прошлые века процветала так называемая генуэзская лотерея. Суть её заключается в следующем. Участники лотереи покупали билеты, на которых стояли числа от 1 до 90. Можно было купить и билеты с двумя (амбо), тремя (терн), четырьмя (катерн) и пятью (квин) числами. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те, у кого все числа на билете были среди вынутых. Выигрыш по обычному билету составлял 15-кратную сумму стоимости билета, выигрыш на амбо был в 270 раз больше стоимости билета, на терн – в 5500 раз, на катерн – в 75 000 раз, на квин – в 1 000 000 раз. Вычислите вероятность выигрыша в каждом случае.
207. Компания из 10 человек садится за стол. Какова вероятность, что Таня и Ваня будут сидеть вместе, если места распределяются путем жребия?
208. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятность событий:
 А – «все вышли из лифта на четвертом этаже»
 В – «все вышли из лифта на одном этаже»
 С – «все вышли из лифта на разных этажах»
209. В розыгрыше по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнования имеется 5 команд экстракласса. Найти вероятности следующих событий:
 А – все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу;
 В – две команды экстракласса попадут в одну группу, а три в другую.
210. На бочонках лото написаны числа от 1 до n . Из этих n бочонков случайно выбираются два. Найти вероятности следующих событий:
 А – на обоих бочонках написаны числа, меньшие, чем k ($2 < k < n$);
 В – на одном из бочонков написано число, большее, чем k , а на другом – меньшее чем k .
211. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий:

А – в каждой из пачек не окажется по два туза;

В – в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой окажутся все четыре;

С – в одной из пачек будет один туз, а в другой три.

Бином Ньютона. Полиномиальная формула.

212. Раскрыть скобки: $(a+b)^5$, $(3x+2y)^6$.

213. Найти коэффициент при x^7 в выражении $(2x+3)^{12}$.

214. Найти коэффициент при x^{10} в выражении $(3x-2)^{13}$.

215. В выражении $(x+2y)^{10}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Какой коэффициент будет стоять при выражения x^4y^6 .

216. Доказать с помощью треугольника Паскаля:

- свойство симметричности биномиальных коэффициентов
- основное свойство биномиальных коэффициентов
- свойство биномиальных коэффициентов $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$

217. Чему равна сумма $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7$?

218. Чему равна сумма $C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8$?

219. Докажите тождество $C_n^i \cdot C_i^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m}$.

220. Докажите тождество $m \cdot C_{m-1}^{n-1} = n \cdot C_m^n$.

221. Получить все различные коэффициенты, которые будут появляться при приведении подобных членов в формулах: $(x+y+z)^6$ и $(x+y+z+u)^5$.

222. Найти коэффициенты при x^7 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(2+x^3+x^4)^{13}$.

223. Найти коэффициенты при x^8 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^2-x^3)^9$.

224. Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

225. В каком из выражений $(1+x^2-x^3)^{1000}$, $(1-x^2+x^3)^{1000}$ будет после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{17} .

Рекуррентные соотношения.

226. Подсчитать количество последовательностей длины N , состоящих из 0 и 1, в которых никакие две единицы не стоят рядом.

227. Посылка бандероли стоит 18 рублей, а на почте имеются марки по 4, 6 и 10 рублей.

Сколькими разными способами можно наклеить на бандероль марки, на нужную сумму?

228. Имеется возможность передавать 4 разных сигнала А, Б, В, Г, причем их передача занимает соответственно T_1, T_2, T_3, T_4 (целые) единиц времени. Сколько различных сообщений может быть передано за время T (тоже целое)?
229. Абитуриент сдает в вуз 4 экзамена по 5-балльной системе и хочет набрать не менее 17 баллов. Сколькими способами он может это сделать.
230. Сколькими способами можно разбить натуральное число M на K простых слагаемых, где способы разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными? Например при $M=10$ и $K=2$ ответом будет 3, так как $10=3+7=5+5=7+3$.
231. В лототроне имеются бочонки с номерами от 1 до K . Последовательно вынимают по одному бочонку, записывают его номер и считают сумму записанных чисел. Сколькими способами может получиться сумма M ?
232. В лототроне имеются бочонки с номерами от 1 до K . Последовательно вынимают по одному бочонку, записывают его номер и считают сумму записанных чисел, после записывания номера бочонка возвращается обратно в лототрон. Сколькими способами может получиться сумма M ?
233. На единственной улице в деревне стоят K домов с известными координатами. Требуется соединить их телефонными проводами минимальной суммарной длины так, чтобы житель каждого дома мог пообщаться хотя бы с одним жителем другого дома.
234. В пригородном автобусе кондуктор следил за тем, чтобы все покупали билеты и отмечал, сколько билетов $(k_{i,j})$ куплено с i -й остановки до j -й. По известной матрице $k_{i,j}$ нужно найти промежуток времени, когда в автобусе было максимальное количество пассажиров и чему оно равно.
235. Прямоугольная таблица размерами $M \times K$ произвольно заполнена цифрами от 0 до 9. Найти путь из левого нижнего угла в правый верхний с максимальной суммой цифр в клетках пути (разрешается на каждом шаге переходить вверх или вправо).
236. В романе N глав, причем r -я глава состоит из A_r страниц. Роман нужно разбить на K томов, причем главы должны идти по порядку и главы нельзя разбивать в разные тома. Какова может быть минимальная толщина самого толстого тома при этом?
237. Для последовательности с $f(1)=5$ и $f(2)=13$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f(k+2)=5f(k+1)-6f(k)$, выписать формулу общего члена.
238. Для последовательности с $f(0)=6$ и $f(1)=24$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f(k+2)=6f(k+1)-9f(k)$, выписать формулу общего члена.
239. Для последовательности с $f(0)=4$, $f(1)=-7$ и $f(2)=15$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $f(k+3)=-6f(k+2)-11f(k+1)-6f(k)$, выписать формулу общего члена.
240. Найдите общее решение рекуррентных соотношений:

a) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$;

b) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$;

c) $a_{n+2}+9a_n=0$;

d) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$.

241. Найдите решение рекуррентного соотношения:

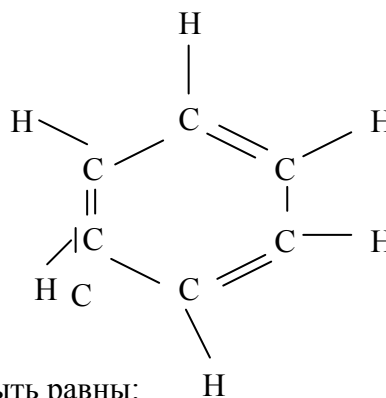
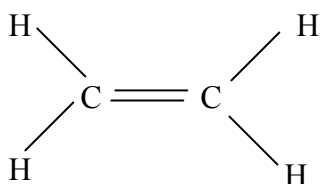
a) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=-7$;

b) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$, $a_1=2$, $a_2=4$.

Задачи по теории графов

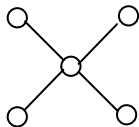
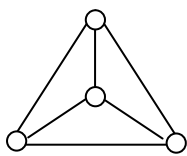
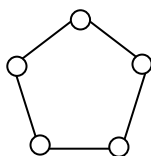
Основные определения и примеры графов.

1. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь студентов. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя - одну. С кем сыграл Леша?
2. Покажите, что следующие объекты можно рассматривать как графы:
 - вершины и ребра многогранника;
 - план лабиринта;
 - дружеские отношения в группе студентов;
 - генеалогическое дерево;
 - теннисный турнир;
 - страны на карте.
3. На рисунке изображены молекулы этилена и бензола; через С и Н обозначены атомы углерода и водорода соответственно. Можно ли считать эти диаграммы графами? Если да, то что будет являться необходимым условием, для того чтобы граф представлял собой молекулу какого-либо углеводорода?



4. Могут ли степени вершины в простом графе быть равны:
 - 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;
 - 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;
 - 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2.
5. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
6. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?
7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
9. В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?
10. В некоторой стране 19 регионов. Может ли оказаться так, что у каждого региона 1, 5 или 9 соседних регионов?
11. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
12. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
13. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?
14. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если:
 - а) $n = 2$
 - б) $n = 3$
 - в) $n = 5$
15. Какова степень каждой вершины полного графа, у которого n вершин?
16. Спортивные соревнования проводятся по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В соревновании с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько было сыграно встреч?
17. Может ли полный граф иметь 7, 8, 9, или 10 ребер?
18. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
19. Какие из предложенных графов являются регулярными?

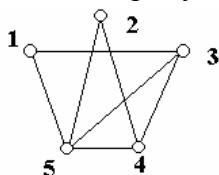


20. В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

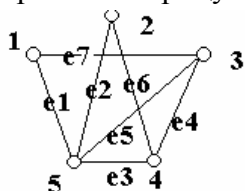
21. Известно, что в компании каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.
22. Спортивные соревнования проводятся по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, прошедшие одинаковое число встреч.
23. Докажите, что в любом графе найдутся по крайней мере две вершины одинаковой степени
24. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.
25. Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?
26. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
27. В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из любых трех делегатов по крайней мере двое смогут объясниться между собой на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

Матрицы, ассоциированные с графом

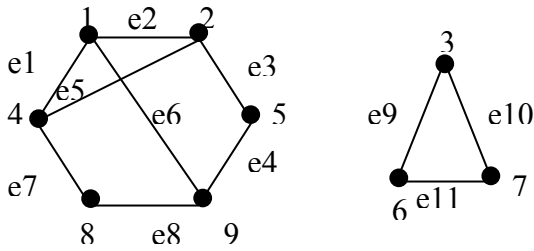
28. Дана симметричная матрица размером $n \times n$. В каждой строке расположено нечетное число единиц, остальные элементы равны нулю. Элементы на главной диагонали равны нулю. Доказать, что n является четным.
29. Опишите матрицы смежности полных графов, вполне несвязных графов. Что можно сказать о матрице простого графа и его дополнения?
30. Изобразите матрицу смежности графа:



31. Изобразите матрицу инцидентности графа.



32. Изобразите матрицы смежности, инцидентности графа:



33. Дана матрица смежности. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	1	0	0

34. Дана матрица инцидентности. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5
E1	1	0	0	0	1
E2	0	1	0	0	1
E3	0	0	0	1	1
E4	0	0	1	1	0
E5	0	0	1	0	1
E6	0	1	0	1	0
E7	1	0	1	0	0

35. Установить, какие из следующих матриц являются матрицами смежностей простого графа, какие - матрицами инцидентий и какие не являются ни теми, ни другими.

а)

0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0

б)

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

в)

1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1

г)

1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

д)

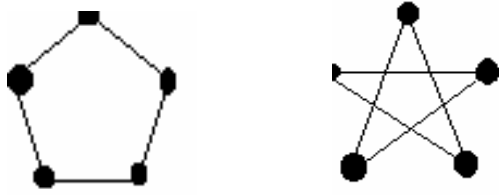
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0

е)

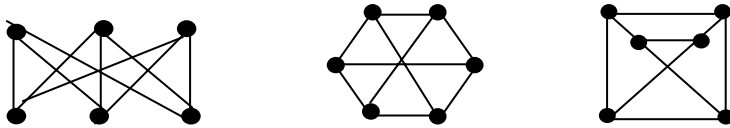
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Изоморфизм графов

36. Являются ли изоморфными графы? Ответ обосновать.



37. Докажите, что графы являются изоморфными.



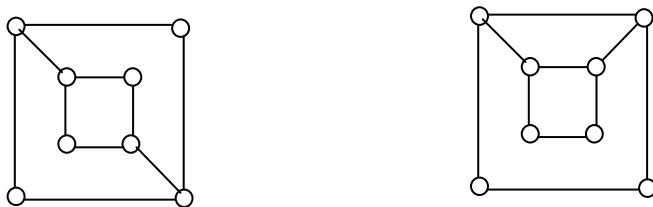
38. Докажите, что графы являются изоморфными.



39. Докажите, что графы не изоморфны.



40. Докажите, что графы не изоморфны.



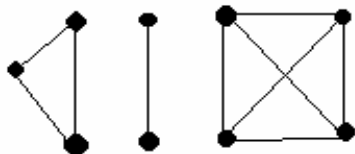
Достижимость и связность.

41. Дана матрица смежности графа. Не изображая граф, ответьте на следующие вопросы:

- Какова степень пятой вершины? Назовите смежные с ней вершины.
- Существует ли путь из вершины 2 в вершину 8?

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0

42. Изобразите матрицу достижимости графа.



43. Дана матрица смежности графа. Найти все вершины, входящие в одну компоненту связности с вершиной 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

44. Выделите компоненты связности графа (3 балла)

0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0

45. Дана матрица смежности графа. Найдите матрицу достижимостей этого графа, не изображая его.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	0	1	1
7	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0	1
9	0	0	0	0	1	1	0	1	0

46. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с 7 другими.

Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

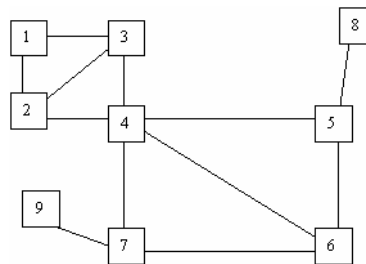
47. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$ - связан.

48. В некотором государстве лишь один вид транспорта – автомобиль. Из столицы выходит 21 автомобильная дорога, из города Дальний - одна, а из всех остальных городов - по 20. Докажите, что из столицы можно доехать в Дальний (возможно, с пересадками).

49. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
50. Докажите, что если в графе все вершины имеют четную степень, то в графе нет ребра, удаление которого приводит к увеличению количества компонент связности.
51. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что существует вид транспорта, которым можно доехать из любого города страны в любой другой (возможно, с пересадками)
52. Докажите, что либо сам граф, либо дополнение к нему является связным.
53. На конференции по новым информационным технологиям студент Иванов познакомился с 52 студентами из разных городов России. По окончании конференции некоторые пары студентов обменялись адресами, причем у каждого из участников конференции оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Иванову понадобилось узнать адрес студента Петрова, который также участвовал в конференции. Докажите, что Иванов может узнать адрес Петрова.
54. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех братьев. Докажите, что все мальчики – братья.
55. Докажите, что если выполняется соотношение $q > (p-1) \cdot (p-2) / 2$, где q – количество ребер, а p – количество вершин, то граф связан.
56. Докажите, что если граф с q ребрами и p вершинами связан, то $(p-1) \leq q \leq (p-1) \cdot p / 2$.

57. На рисунке изображен граф. Найдите:

- ребра графа, являющиеся мостами;
- точки сочленения графа;
- двусвязные компоненты.



58. Докажите, что ребро в графе является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном из циклов.
59. На озере 7 островов (1 – 7), которые соединены мостами:

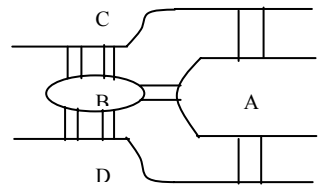
- 1 с 2 и 4;
- 2 с 1, 3 и 5;
- 3 с 2 и 4;
- 4 с 1 и 3;
- 5 с 2, 6 и 7;
- 6 с 5 и 7;
- 7 с 5 и 6.

Определить, можно ли с любого острова добраться на любой и существует ли мост, при уничтожении которого это сообщение между островами нарушается.

Циклы

60. На рисунке изображена карта Кенигсбергских мостов.

Определите, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз.



61. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:

- не с него начал и не на нем закончил?
- с него начал, но не на нем закончил?
- с него начал и на нем закончил?

62. Определите, является ли граф, заданный матрице смежности, эйлеровым. (1 балл)

0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0

0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0

0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

63. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?

64. Привести пример графа, все степени которого четны, но который не является эйлеровым.

65. Для каких графов можно найти цикл, проходящий по каждому ребру 1 раз?

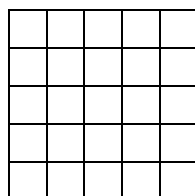
66. Для каких графов можно найти маршрут, проходящий по каждому ребру 1 раз?

67. Докажите, что на любом связном графе с $2k$ нечетными вершинами можно указать семейство из k маршрутов, которые в совокупности содержат все ребра графа по одному разу.

68. Имеется полный граф на 16 вершинах. Каково минимальное число маршрутов в графе, которые в совокупности содержат все его ребра и все вершины?

69. Дан кусок проволоки длиной 120 см. а) Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

70. Можно ли нарисовать решетку, изображенную на рисунке, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя одну и ту же линию дважды? Какое наименьшее число раз придется оторвать карандаш от бумаги?



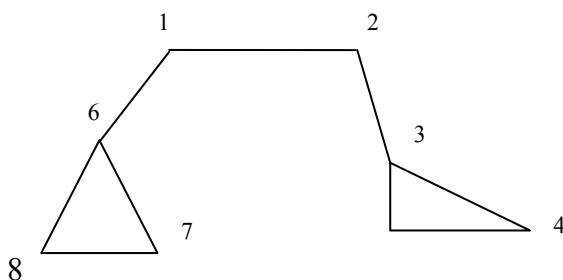
71. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
72. Для каких чисел m, n граф G является эйлеровым:
- 1) K_n – полный граф с n вершинами?
 - 2) K_{mn} – полный двудольный граф с n, m вершинами?
 - 3) W_n – колесо с n вершинами?
73. Для каких чисел m, n граф является гамильтовым?
- 1) K_n – полный граф с n вершинами?
 - 2) W_n – колесо с n вершинами?
74. Дана матрица смежности графа. Определить, является ли граф эйлеровым, гамильтоновым.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0

75. В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причем каждый город соединен не менее чем с половиной других городов. Докажите, что туристическая фирма может найти такой маршрут облета городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе, причем каждый город посещает ровно один раз.
76. На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо враждуют, либо дружат. Оказалось, что у каждого рыцаря друзей больше, чем врагов. Докажите, что можно рассадить рыцарей за круглым столом таким образом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.
77. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?
78. Можно ли перевести шахматного коня с клетки $a1$ на клетку $h8$, побывав при этом на каждой клетке шахматной доски ровно один раз?

Алгоритмы обхода связного графа.

79. Перечислить вершины графа в порядке обхода а) в глубину; в) в ширину.



80. Граф задан матрицей смежности. Найти

- Какой-либо путь из вершины 2 в вершину 4;
- кратчайший путь из вершины 2 в вершину 4;
- кратчайшие пути из вершины 2 ко всем остальным вершинам.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
8	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

81. На планете Глюк живет группа людей. Про некоторые пары людей известно, что они близкие родственники. Назовем А и В родственниками, если А и В близкие родственники, или найдется третий человек С, который по отдельности является родственником А и родственником В. Опишите алгоритм нахождения всех родственников человека X.

82. На клетчатом листе бумаги размером 10 x 10 закрашены некоторые клетки. Разрешается ходить по не закрашенным клеткам, переходя на каждом шаге вверх, вниз, вправо или влево. Описать алгоритм, отвечающий на следующие вопросы:

- А. Есть ли путь из левой нижней клетки в правую верхнюю;
- Б. Какое минимальное число шагов нужно сделать, чтобы пройти этот путь;
- В. По каким клеткам при этом надо идти

83. В двузначном числе за один ход разрешается заменить любую цифру суммой цифр по модулю 10. Заданы два двузначных числа а и b. Написать программу, которая определяет: можно ли построить цепочку ходов, которая переводит а в b; минимальную такую цепочку. В двузначном числе старшая цифра может быть и нулем.

84. На шахматной доске N x N, несколько клеток, которой вырезано, заданы две клетки. Построить минимальный путь коня из одной данной клетки в другую.

85. В таблице N x N, где N < 13, клетки заполнены случайным образом цифрами от 0 до 9. Предложить алгоритм, позволяющий найти маршрут из клетки (1,1) в клетку (N,N) и удовлетворяющий следующим условиям:

- любые две последовательные клетки в маршруте имеют общую сторону;
- количество клеток маршрута минимально;
- из всех маршрутов, удовлетворяющих условиям 1) и 2), искомый маршрут тот, сумма цифр в клетках которого максимальна.

86. Имеются три пробирки. Вместимость каждой из них 100 миллилитров. Две пробирки из трех одинаково размечены. Деления нанесены произвольно и соответствуют целым количествам миллилитров. Изначально одна из пробирок с делениями наполнена 100 миллилитрами кваса, а остальные пустые. Описать алгоритм, который выясняет, можно ли поместить в пробирку без делений один миллилитр кваса и, если да, то находит минимальное число необходимых для этого переливаний. Каждое переливание из одной пробирки в другую можно проводить до тех пор, пока либо первая из них не станет пустой, либо одна из пробирок не окажется заполненной до какого-либо деления.
87. Имеется расписание беспосадочных авиарейсов. Составить оптимальный алгоритм определяющий, можно ли из пункта А попасть в пункт В.
88. Имеется атлас автомобильных дорог с указанием расстояний между городами. Составить оптимальный алгоритм нахождения минимального пути между двумя городами.

Деревья.

89. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной цепью, является деревом.
90. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одной цепью.
91. Докажите, что в дереве с p вершинами $p-1$ ребро.
92. Докажите, что связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин, является деревом.
93. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).
94. Докажите, что в любом нетривиальном дереве имеются, по крайней мере, две висячие вершины.
95. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.
96. Какое максимальное число висячих вершин может иметь дерево, обладающее 9 вершинами?
97. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
98. В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку содержит не более одного раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.
99. В стране 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?
100. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.
101. Сколько ребер нужно удалить из связного графа, имеющего q ребер и p вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа.
102. Докажите, что полный двудольный граф с n вершинами в одной доле и m вершинами в другой имеет не менее $mn-m-n+1$ различных циклов?

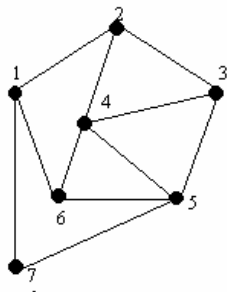
103. Найдите цикломатическое число для графов:

- K_n ;
- $K_{m,n}$;
- W_n ;
- графа Петерсона;
- любого связного регулярного графа с n вершинами степени регулярности g .

104. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

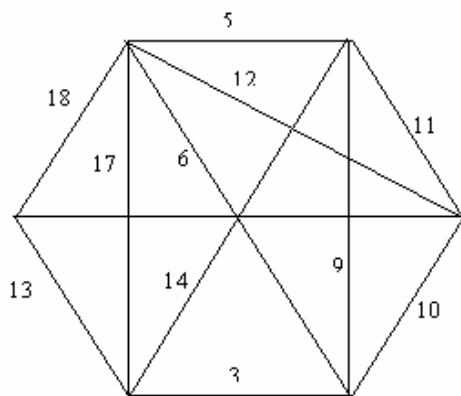
105. В несвязном графе с 5 компонентами связности любое ребро является мостом. Сколько вершин в графе, если ребер 115? (1 балл)

106. Постройте остовы графа, изображенного на рисунке методами поиска в ширину и в глубину.



107. Найдите какие-нибудь остовные деревья для графов K_5 , $K_{3,3}$, и в графе Петерсона.

108. Найти минимальный каркас графа, изображенного на рисунке, используя алгоритм Краскала.



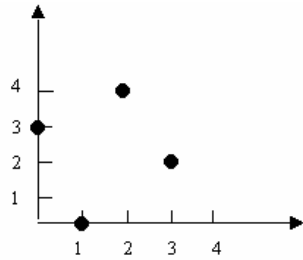
109. Постройте каркас минимального веса для графа заданного матрицей весов (2 балла)

0	20	∞	∞	∞	15	∞
20	0	∞	∞	1	∞	3
∞	∞	0	5	2	∞	2
∞	∞	5	0	3	∞	1
∞	1	2	3	0	10	∞
15	∞	∞	∞	10	0	∞
∞	3	2	1	∞	∞	0

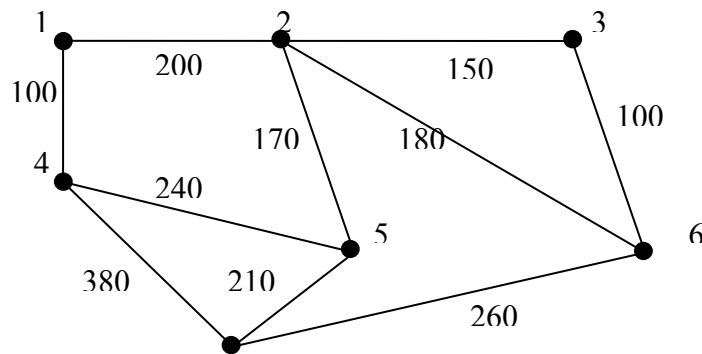
0	2	∞	∞	∞	7	10
2	0	10	∞	∞	1	0
∞	10	0	2	∞	∞	∞
∞	∞	2	0	5	1	∞
∞	∞	∞	5	0	3	∞
7	1	∞	1	3	0	2
10	∞	∞	∞	∞	2	0

0	∞	∞	∞	∞	3	2
∞	0	10	∞	∞	4	∞
∞	10	0	∞	∞	4	∞
∞	∞	∞	0	2	3	∞
∞	∞	∞	2	0	1	∞
3	4	4	3	1	0	1
2	∞	∞	∞	∞	1	0

110. Найти каркас минимального веса для полного графа на множестве вершин (x_1, x_2, x_3, x_4), как показано на рисунке, с весами ребер, определенных как расстояния между вершинами.



111. На строительном участке нужно создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рисунке, где бытовкам соответствуют вершины графа и указаны длины дорог между ними. Каким образом провести телефонные провода, чтобы их общая длина была минимальной?



112. Необходимо построить систему ⁷ нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов (Н1, Н2, Н3, Н4, Н5, Н6, Н7), принадлежащих некоторой компании, с портом (П), куда поступает импортируемая сырая нефть. Стоимость прокладки нефтепровода между любыми двумя пунктами составляет 5000 долларов в расчете на одну милю. расстояния между всеми парами вершин задаются в следующей таблице:

	П	Н1	Н2	Н3	Н4	Н5	Н6	Н7
П	0	5	6	8	2	6	9	10
Н1		0	4	10	5	8	6	10
Н2			0	11	8	4	9	10
Н3				0	10	3	6	7
Н4					0	2	5	9
Н5						0	10	5
Н6							0	8
Н7								0

Найдите минимальную стоимость прокладки нефтепровода.

113. Борцовский турнир с 13 участниками проводится по олимпийской системе, при которой проигравший выбывает. На одну встречу, с учетом подготовки к ней и отдыха

участника, отводится один час. Сколько времени нужно, чтобы провести турнир, если в распоряжении организаторов только 5 борцовских ковров?

114. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут делиться на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на четыре.
115. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C , имеющего валентность 4, и водорода H , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Напишите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.
116. Город имеет форму квадрата ($100n \times 100n$) метров с $(n+1)$ прямолинейной улицей, идущей параллельно одной стороне квадрата, и $(n+1)$ прямолинейной улицей, идущей параллельно другой его стороне. Расстояние между любыми двумя соседними параллельными улицами – 100 метров, длина каждой улицы – $100n$ метров. Мэр города решил выполнить свое предвыборное обещание: заасфальтировать за свой счет улицы так, чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать по асфальту. Конечно, мэр хочет истратить как можно меньше своих денег. Какой наименьшей длины асфальтовое покрытие улиц может сделать мэр?
117. Несколько авиакомпаний решили связать авиалиниями 100 городов так, чтобы выполнялось два условия:
- любые два города были соединены беспосадочной линией не более чем одной компании;
 - любая авиакомпания, пользуясь своими линиями, могла бы доставить пассажира из любого города в любой другой (возможно с пересадками).

При каком наибольшем числе авиакомпаний такое решение осуществимо?

118. Каждый член шайки, включая главаря, имеет не более двух подручных, знает только их телефонные номера и имеет собственный телефон. Ни один член шайки не может быть подручным сразу у двоих. Сформулируйте алгоритм, позволяющий главарю узнать численность шайки в двух случаях:
- никто из членов шайки, кроме главаря, не умеет считать;
 - все члены шайки, кроме главаря, умеют считать.

Двудольные графы.

119. Является ли двудольным графом
- простая цепь?
 - дерево?

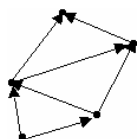
- полный граф?
120. Докажите, что дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами.
121. В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не более восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?
122. Школьники на кружке решали 16 задачи. Каждый из 16 школьников решил по четыре задачи, и каждая задача была решена четырьмя школьниками. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый рассказал одну решенную им задачу и чтобы все задачи были разобраны.
123. Каждый из учеников 9 «А» класса дружит с тремя учениками 9 «Б» класса, а каждый из учеников 9 «Б» класса дружит с тремя учениками 9 «А» класса. Докажите, что число учеников в обоих классах одинаково.
124. Строительному управлению для выполнения работы требуются каменщик плотник, водопроводчик и слесарь. На эти должности имеются пять претендентов: один может работать каменщиком, другой – плотником, третий – каменщиком и водопроводчиком и еще двое имеют по две специальности – водопроводчика и слесаря. Можно ли охватить весь фронт работ (используя четверых рабочих)? Если да, то подробно проверьте выполнение условия теоремы Холла.
125. В школе 4 кружка: домоводство, математический кружок, компьютерный клуб и кружок английского языка. Пять человек из класса посещают эти кружки, причем один и тот же ученик может являться членом нескольких кружков. Можно ли выбрать старосту в каждом кружке так, чтобы ни один человек не был старостой сразу в двух кружках, в следующих случаях:
1. Кружок домоводства посещают 1, 3 и 4 ученики, математический кружок – 1, 4 и 5, компьютерный клуб – 2, 3 и 5, кружок английского языка – 2, 4 и 5.
 2. Кружок домоводства посещают 1 и 3 ученики, математический кружок – 2 и 3, компьютерный клуб – 2 и 1, кружок английского языка – 3.
 3. Кружок домоводства посещают 1, 3 и 4 ученики, математический кружок – 2 и 5, компьютерный клуб – 2 и 5, кружок английского языка – 2.
126. Десять кандидатов готовятся к двум космическим экспедициям на Марс. Поскольку экспедиции будут продолжаться несколько лет, а их участники окажутся в замкнутом пространстве небольшого объема, то большое значение приобретает психологическая

совместимость членов экипажа. Путем тестирования установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной и той же экспедиции было бы нежелательным. Результаты тестирования отражены в таблице. (Если на пересечении i строки j столбца находится знак «+», то участие i и j кандидатов в одной экспедиции нежелательно.) Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедициях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+						
2	+				+					
3	+						+			
4	+					+				
5		+						+		
6				+						+
7			+					+		+
8					+		+		+	
9								+		+
10						+	+		+	

Ориентированные графы и мультиграфы

127. Решите задачу 35. Граф может быть орграфом или мультиграфом.
128. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение, так чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?
129. Докажите, что на ребрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.
130. Доказать, что связный граф можно обойти, проходя по каждому ребру дважды.
131. Изобразите матрицы смежности и инцидентности ориентированного графа:



132. Дана матрица смежности. Изобразить граф, ей соответствующий.

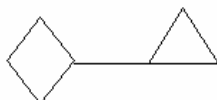
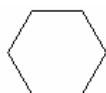
а)

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0	1
5	1	1	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	0

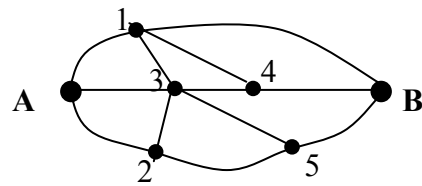
б)

	1	2	3	4	5
1	1	2	0	0	1
2	0	0	3	0	0
3	0	0	2	1	0
4	1	0	1	0	1
5	1	0	0	0	0

133. Определите, какие из предложенных графов являются ориентируемыми.



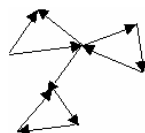
134. Из города А в город В ведут несколько дорог (карта дорог на рисунке). Найдите число маршрутов из А в В, учитывая, что при движении необходимо всегда приближаться к В.



135. Может ли в ориентированном графе полустепень захода каждой вершины быть равна 3, а полустепень исхода – 4?
136. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
137. В некотором государстве 101 город. а) Каждый город соединен с каждым другой городом односторонним движением, причем в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам; б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трем дорогам
138. В стране Ориентация на всех дорогах введено одностороннее движение, причем из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более, чем по трем дорогам.
139. Найдите компоненты сильной связности графа, заданного матрицей смежности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0

140. Найдите компоненты сильной связности графа:



141. Дана матрица смежности графа, определить, является ли он эйлеровым. Ответ обоснуйте.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	0	0
6	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0

142. Решите задачу 62, считая, что заданы матрицы смежности ориентированного графа.
143. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.
144. В связном неориентированном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой; б) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.
145. На плоскости отмечено некоторое конечное число точек. Некоторые пары точек являются началами и концами векторов, причем число векторов, выходящих из любой точки равно числу входящих в неё. Найдите сумму векторов.
146. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.
147. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда А сильнее команды В, если либо А выиграла у В, либо существует команда С такая, что А выиграла у С, а С - у В. а) Докажите, что есть команда, которая сильнее всех. б) Докажите, что команда, выигравшая турнир, сильнее всех.
148. В одном государстве 100 городов, и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.
149. 20 команд сыграли круговой турнир по волейболу. Докажите, что команды можно занумеровать числами от 1 до 20 так, что 1-я команда выиграла у 2-й, 2-я - у 3-й, ..., 19-я у 20-й.
150. Докажите, что если победитель турнира по волейболу, проведенного по круговой системе, проиграл команде В, то существует команда С, выигравшая у В, у которой выиграл победитель.

151. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды А, В и С такие, что А выиграла у В, В выиграла у С, а С выиграла у А.

Игры и головоломки

152. Два человека имеют кувшин молока в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и 3 литра. Как они могут разделить молоко поровну?

153. Перевозчику нужно переправить через реку волка, козу и мешок с капустой. Лодка так мала, что кроме перевозчика в неё можно взять только один из объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу вместе с волком. Как осуществить переправу?

154. В двадцатиэтажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью лифта попасть с 20 этажа на первый? (Когда сверху меньше 8 этажей, то лифт вверх не поедет. Аналогично, вниз.)

155. Есть 3 бидона вместимостью 14 литров, 9 литров и 5 литров. В большем – 14 литров молока. Остальные пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко поровну?

156. Имеется четыре бочки. В первую входит 24 ведра, вместимость второй 13 ведер, третьей – 11 ведер, четвертой – 5 ведер. Вначале наполнена только первая бочка. Требуется её содержимое разлить на три равные части так, чтобы первые три бочки содержали по 8 ведер, а четвертая осталась пустой.

157. Три солдата и три разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, в которую помещаются только два человека. Нельзя оставить на берегу больше разбойников, чем солдат. Разрешается оставлять на берегу одних разбойников или одних солдат. Как всем шестерым переправиться через реку? Найти все возможные способы.

158. На столе лежит 15 спичек. Два игрока по очереди берут от одной до трех спичек. Проигрывает тот игрок, который взял последнюю спичку. Описать выигрышную стратегию.

159. Двое называют по очереди числа, меньшие 100. Начинают с нуля. Каждое новое число должно на 1, 2 или 3 увеличивать одну из цифр предыдущего числа. Проигрывает тот, кто вынужден назвать число 99. Описать выигрышную стратегию в двух случаях.

160. Играют двое. Первый игрок сообщает какую-нибудь дату января 1991 года. Каждый игрок на своем ходе называет более позднюю дату, увеличивая либо календарную дату в месяце, либо месяц, но не то и другое сразу. Описать выигрышную стратегию, при которой:

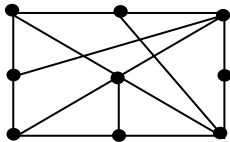
а) игрок, назвавший 31 декабря, выигрывает;

б) игрок, назвавший 31 декабря, проигрывает.

Плоские графы

161. Проверить формулу Эйлера для графов W_6 и K_{2n} .
162. Для шахматной доски размером $K \times K$ найдите числа p , q , r и убедитесь в справедливости теоремы Эйлера.
163. Обобщите формулу Эйлера для несвязных графов.
164. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?
165. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?
166. Докажите, что, если в планарном графе каждая грань есть C_n (цикл длины n), $q = n \cdot (p - 2) / (n - 2)$.
167. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
168. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливаются электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной её стороне?
169. Докажите, что для плоского связного графа справедливо неравенство $q \leq 3p - 6$
170. Докажите, что граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, не является плоским.
171. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?
172. Докажите, что для любого плоского графа (в том числе и несвязного) справедливо неравенство $q \leq 3p - 6$.
173. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, - не плоский.
174. В графе степень любой вершины не меньше шести. Доказать, что его нельзя нарисовать на плоскости, так чтобы никакие два ребра его не пересекались.

175. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.
176. Покажите, что граф W_6 стягиваем к графу K_4 .
177. Докажите, что граф Петерсона не является планарным.
178. Инженер Иванов усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников. Схема платы представлена на рисунке. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной её стороне?

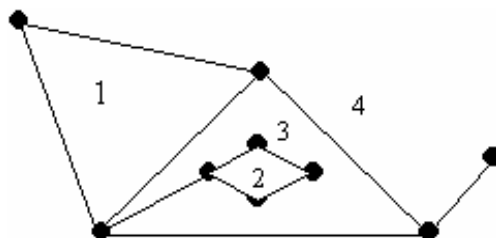


179. Инженер Иванов придумал схему печатной суперплаты, которая может заменить целый компьютер. Плата состоит из 200 приборов и 2000 проводников. Ясно, что для реализации такой схемы нужно будет использовать многослойную плату, на которой проводники будут располагаться в разных слоях. Докажите, что разработанную схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы.

Стереографическая проекция

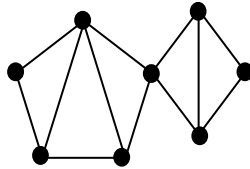
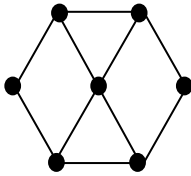
180. Докажите, что число вершин (p), ребер (q) и граней (r) любого выпуклого многогранника связано формулой $p - q + r = 2$.
181. Доказать, что граф правильного многогранника является плоским и правильным.
182. Найти гамильтоновы циклы на правильных графах.
183. При изготовлении некоторой однослойной печатной платы по технологическим условиям один заданный проводник должен находиться на краю платы. Доказать, что это всегда можно сделать.
184. Нарисуйте граф, изоморфный графу, изображенному на рисунке, так, чтобы внешней стала грань

- 2
- 3



Двойственные графы

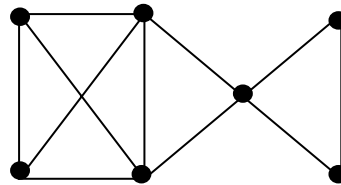
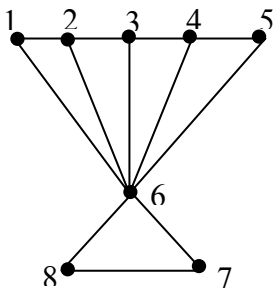
185. Найдите двойственные графы для следующих графов:



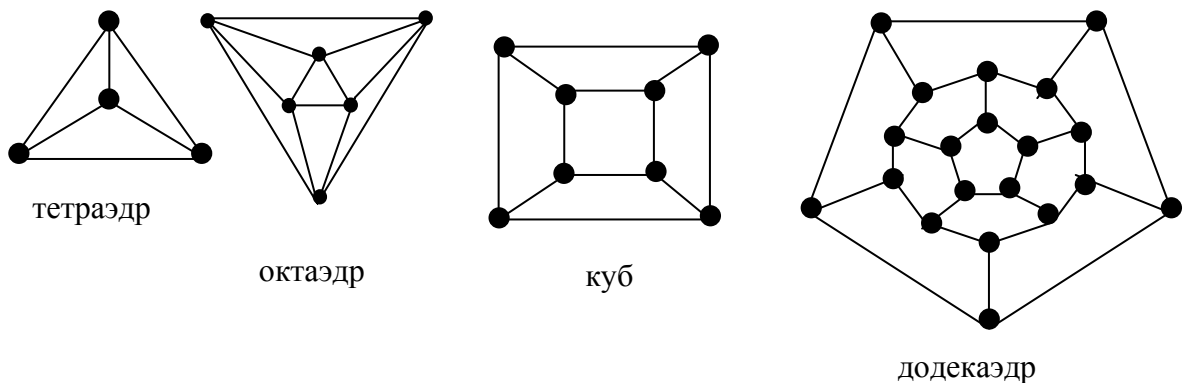
186. Покажите, что граф, двойственный к колесу W_n , является колесом.
187. Плоский граф G имеет 7 вершин, 10 ребер и 5 граней. Сколько вершин, ребер и граней имеет двойственный к нему граф.
188. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.
189. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.
190. Может ли существовать плоский граф с пятью гранями, в котором каждая пара граней является смежными?
191. Дан плоский граф, в каждой вершине которого сходится не более трех ребер. Докажите, что
- четное число граней имеет нечетное число смежных граней;
 - существует грань, которая имеет не более пяти смежных с ней граней.

Раскраски графа

192. Найдите хроматические числа для:
- вполне несвязного графа с n вершинами;
 - полного графа с n вершинами;
 - двудольного графа, доли которого имеют n и m вершин;
 - дерева с n вершинами.
193. Для графов, изображенных на рисунке, найдите хроматические числа и какую-либо правильную раскраску.



194. Сколькими способами можно раскрасить полный помеченный граф на 6 вершинах шестью цветами? (Два способа считаются различными, если некоторая вершина при одном способе имеет один цвет, а при другом способе – другой.)
195. Определите хроматические числа для графов платоновых тел:



196. Граф называется критическим, если удаление любой его вершины вместе с инцидентными ей ребрами приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Покажите, что K_n является критическим графом при $n > 1$.

197. Докажите, что всякий критический граф, являющийся k -хроматическим:

- связан;
- не имеет точек сочленения;
- степень каждой его вершины не меньше, чем $k-1$.

198. Коробка скоростей – механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при неизменной частоте вращения ведущего. Это изменение происходит за счет того, что находящиеся внутри коробки шестерни вводятся в зацепление специальным образом. Одна из задач, стоящих перед конструктором коробки, заключается в минимизации числа валов, на которых размещаются шестерни.

Некоторые шестерни не должны находиться на одном валу, например, они могут быть в зацеплении или их общий вес велик для одного вала, и т.д. В таблице крестиками указаны такие пары шестерен. Найдите минимальное число валов, на которые можно поместить шестерни.

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+	+		+
2	+		+		+		+
3		+			+	+	
4	+					+	
5	+	+	+				+
6			+	+			+
7	+	+			+	+	

199. Образовавшийся коммерческий университет арендует здание для проведения занятий. В четверг проводится 7 лекций: право, английский язык, французский язык, экономика, менеджмент, маркетинг, этикет. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно. В таблице крестиком помечены лекции, которые не могут читаться одновременно. Определите минимальное время, за которое могут быть прочитаны лекции в четверг.

	П	А	Ф	Э	М	М	Э
Право		+		+			+
Англ. яз.	+		+		+	+	
Фран. яз.		+			+	+	+
Экономика	+				+	+	
Менеджмент		+	+	+		+	
Маркетинг		+	+	+	+		
Этикет	+		+				

200. *Задача распределения оборудования.* Заданы множество работ и механизмов. Для выполнения каждой из работ требуется некоторое время, одинаковое для всех работ, и некоторые механизмы. При этом ни один из механизмов не может быть одновременно занят в нескольких работах. Нужно распределить механизмы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимально.
201. Все страны, расположенные на острове, имеют форму треугольников, причем любые две граничащие страны имеют целую общую сторону (то есть вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого). Докажите, что для раскраски карты этого острова так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет, достаточно трех красок.
202. Известно, что на карте некоторой области нет точек, в которых сходятся границы нечетного числа районов. Докажите, что такую карту можно раскрасить двумя цветами так, что любые два соседних района будут покрашены разными красками.
203. Докажите, что для раскраски карты, полученной при пересечении прямых и окружностей на плоскости, достаточно двух цветов.

Список рекомендуемой литературы по теории графов

№	Тема	Литература
1.	Основные определения и примеры графов.	1 (гл. 1 § 1); 5 (гл. 1); 6 (гл. 6 § 1); 7 (гл. 1); 8 (гл. 1 § 2); 10 (гл. 7 § 1); 11 (гл. 4 § 1); 12 (гл. 1 § 1, гл. 2 § 2, 3)
2.	Изоморфизм графов.	5 (гл. 1 § 1); 10 (гл. 7 § 1); 12 (гл. 1 § 1, гл. 2 § 2)
3.	Способы описания графов.	1 (гл. 1 § 4); 2 (гл. 7 § 1); 5 (гл. 1 § 6); 6 (гл. 6 § 2); 7 (гл. 1 § 8); 10 (гл. 7 § 4); 11 (гл. 4 § 1)
4.	Достижимость и связность.	1 (гл. 1 § 2); 5 (гл. 5 § 33); 6 (гл. 6 § 5, 6); 7 (гл. 2); 10 (гл. 8 § 1); 11 (гл. 4 § 3)
5.	Мосты, блоки, меры связности.	1 (гл. 2 § 2, гл. 8 § 2); 2 (гл. 7 § 4); 5 (гл. 5 § 34); 6 (гл. 6 § 13); 10 (гл. 7 § 2)
6.	Кратчайшие пути	1 (гл. 10); 2 (гл. 6 § 3, 4); 5 (гл. 12 § 76); 6 (гл. 6 § 9); 7 (гл. 8); 8 (гл. 3); 10 (гл. 8 § 7); 11 (гл. 4 § 5)
7.	Обходы графа.	1 (гл. 8 § 1, 4); 2 (гл. 7 § 3); 6 (гл. 6 § 3); 11 (гл. 4 § 9);
8.	Эйлеровы циклы в графах.	1 (гл. 3 § 1, гл. 8 § 5); 5 (гл. 7 § 43); 6 (гл. 6 § 7); 10 (гл. 10 § 2); 12 (гл. 3 § 6)
9.	Гамильтонов цикл на графе.	1 (гл. 3 § 2); 5 (гл. 7 § 44); 7 (гл. 10 § 2); 10 (гл. 10 § 3); 12 (гл. 3 § 7)
10.	Задача коммивояжера	1 (гл. 13); 7 (гл. 10 § 5, 6, 7); 8 (гл. 7)
11.	Фундаментальные циклы и разрезы	6 (гл. 6 § 12); 10 (гл. 10 § 1); 11 (гл. 4 § 11, 12);
12.	Деревья. Эквивалентные определения деревьев	1 (гл. 2 § 1); 5 (гл. 2 § 13); 7 (гл. 7 § 1); 10 (гл. 9 § 1); 12 (гл. 4 § 9)
13.	Каркас минимального веса	2 (гл. 7 § 2); 5 (гл. 2 § 15, гл. 12 § 75); 6 (гл. 6 § 8); 7 (гл. 7 § 3); 10 (гл. 9 § 5)
14.	Двудольные графы.	6 (гл. 6 § 14); 10 (гл. 7 § 3.2)
15.	Совершенное паросочетание и теорема Холла	5 (гл. 12 § 77); 7 (гл. 12); 10 (гл. 8 § 4); 12 (гл. 8 § 25)
16.	Теорема Менгера	5 (гл. 5 § 35); 10 (гл. 8 § 3); 12 (гл. 8 § 28)
17.	Максимальное паросочетание	2 (гл. 7 § 5); 5 (гл. 12 § 77); 7 (гл. 12); 8 (гл. 5)
18.	Потоки в сетях	1 (гл. 11); 6 (гл. 6 § 10); 7 (гл. 11); 8 (гл. 4); 10 (гл. 8 § 5); 12 (гл. 8 § 29)

19.	Независимые и доминирующие множества	5 (гл. 4); 6 (гл. 6 § 11); 7 (гл. 3); 10 (гл. 11)
20.	Ориентированный граф	1 (гл. 1 § 3); 2 (гл. 6 § 1, 2); 5 (гл. 10 § 63, 64, 65); 12 (гл. 7 § 22)
21.	Достижимость, связность в орграфах	1 (гл. 8 § 3); 2 (гл. 6 § 7); 7 (гл. 2); 10 (гл. 8 § 6)
22.	Эйлеров цикл в орграфах.	12 (гл. 7 § 23)
23.	Гамильтонов путь и цикл в орграфах.	12 (гл. 7 § 23)
24.	Плоские графы. Планарность.	1 (гл. 5 § 1); 5 (гл. 6 § 36); 10 (гл. 12 § 2); 11 (гл. 4 § 15); 12 (гл. 5 § 12)
25.	Укладки графов	1 (гл. 5 § 11); 5 (гл. 6 § 41); 12 (гл. 2 § 4, гл. 5 § 14)
26.	Формула Эйлера для плоских графов	1 (гл. 5 § 2); 5 (гл. 6 § 37); 12 (гл. 5 § 13)
27.	Стереографическая проекция.	5 (гл. 6 § 36); 12 (гл. 2 § 4)
28.	Двойственный граф	1 (гл. 5 § 4), 12 (гл. 5 § 15)
29.	Раскраски графов	1 (гл. 6); 5 (гл. 9); 10 (гл. 12 § 3); 11 (гл. 4 § 14); 12 (гл. 6)
30.	Раскрашивание карт. Теорема о пяти красках.	10 (гл. 12 § 2.3); 12 (гл. 6)

Список литературы

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск, 2001.
2. Ахо А., Хокпкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
3. Бадин Н.М., Волченков С.Г., Дашниц Н.Л., Корнилов П.А. Ярославские олимпиады по информатике. – Ярославль, 1995.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
8. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981.
9. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. – Минск.: Тетрасистемс, 2001.
10. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
11. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
12. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
13. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2002.

Использованы задачи с сайта www.zaba.ru.

Оглавление

Введение	3
Комбинаторика.....	3
Предмет комбинаторики.....	3
Правила суммы и произведения.....	5
Формула включения и исключения.....	7
Размещения с повторениями.....	9
Размещения без повторений	11
Перестановки.....	12
Перестановки с повторениями.....	13
Сочетания.....	15
Свойства чисел C_n^k	17
Сочетания с повторениями.....	19
Комбинаторика разбиений	21
Вероятность	26
Бином Ньютона	28
Треугольник Паскаля.....	31
Полиномиальная формула.....	32
Рекуррентные соотношения.....	34
Асимптотики	42
Задачи по комбинаторике.....	44
Общие правила комбинаторики	44
Формула включения и исключения.....	46
Размещения с повторениями.....	46
Размещения без повторений	48
Перестановки.....	49
Сочетания.....	50
Сочетания с повторениями	51
Разные задачи	51
Комбинаторика разбиений	55
Вероятность	58
Бином Ньютона. Полиномиальная формула.....	60
Рекуррентные соотношения.....	60
Задачи по теории графов	63
Основные определения и примеры графов.....	63
Матрицы, ассоциированные с графом	65
Изоморфизм графов.....	67
Достижимость и связность.....	67
Циклы	70
Алгоритмы обхода связного графа.....	71
Деревья.....	73
Двудольные графы.....	76
Ориентированные графы и мультиграфы.....	78
Игры и головоломки	81
Плоские графы	82
Стереографическая проекция	83
Двойственные графы	83
Раскраски графа	84
Список рекомендуемой литературы по теории графов.....	87
Список литературы	89

Корнилов Петр Анатольевич
Никулина Надежда Ивановна
Семенова Ольга Геннадьевна

Элементы дискретной математики

Редактор Иванова Н.А.
Подписано в печать 30.11.05 Формат бумаги 80х64 1/16
Печ. л. 5.5 Заказ 123 Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский отдел Ярославского государственного
педагогического университета имени К.Д.Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская, 108
ЛР №020080 от 19.12.97