Кафедра Математических методов принятия решений

Харитонов С.В.

Интернет-курс по дисциплине

«Методы принятия управленческих решений»

Содержание

Аннотация по дисциплине

Предметом изучения является система принятия управленческих решений компании. **Объектом** изучения выступают количественные и иные методы принятия управленческих решений.

Место дисциплины в учебном процессе Университета

Настоящая дисциплина включена в учебные планы Университета по всем программам подготовки специалистов по специальности «Менеджмент». Дисциплина «Методы принятия управленческих решений» является необходимым элементом профессиональной подготовки менеджеров всех направлений специализации.

Для успешного освоения настоящего курса необходимо предварительно завершить изучение следующих дисциплин:

- Макроэкономика;
- Микроэкономика;
- Управленческие решения;
- Теория менеджмента.

Цель и задачи дисциплины.

Целью изучения дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся принятия управленческих решений с использованием экономико-математических методов; применению математических методов в процессе подготовки и принятия управленческих решений в организационно-экономических и производственных системах, т.е. тех инструментов, с помощью которых в современных условиях формируются и анализируются варианты управленческих решений.

Прикладной задачей является изучение студентом следующих базовых вопросов:

- обучение теории и практике принятия решений в современных условиях хозяйствования с использованием экономико-математических методов;
- рассмотрение широкого круга задач, возникающих в практике менеджмента и связанных с принятием решений, относящихся ко всем областям и уровням управления;
- обучение будущих специалистов теории и практике применения математических, т.е. количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной деятельности.

<u>**В результате изучения курса студенты должны:**</u>

Знать:

- основные математические методы и модели принятия решений;
- области применения математических методов принятия решений;
- содержательную сторону задач, возникающих в практике менеджмента и маркетинга, т.е. уметь идентифицировать проблему.

Уметь:

- пользоваться математическими методами принятия решений, с помощью которых в современных условиях формируются и анализируются варианты управленческих решений:
- уточнять совместно с ЛПР постановку задачи,
- собирать необходимую информацию,
- строить математическую модель задачи,
- интерпретировать полученные результаты и представлять их ЛПР,

- выбирать метод принятия решений.

Иметь навык:

- использования математических методов при решении специфических задач возникающих в процессе принятия решений;
- применения информационных технологий в процессе моделирования и оптимизации управленческих решений.

Тема 1. Классификация методов принятия управленческих решений. Задачи линейного программирования

Цели и задачи:

Цель изучения данной темы – получение общетеоретических знаний о методах принятия УР.

Задачи изучения данной темы:

- изучение классификации эвристических методов принятия решений;
- изучение классификации количественных и качественных методов принятия решений.
- изучение оптимизационных методов (ЗЛП)

Вопросы темы:

1. Классификация методов принятия управленческих решений.
2. Постановка задачи линейного программирования и свойства ее решений.
3. Решение ЗЛП с помощью MS EXCEL.

Вопрос 1. Классификация методов принятия управленческих решений.

На сегодняшний момент существует очень большое количество методов принятия управленческих решений. Их можно разделить на три категории:

1. Эвристические методы.
2. Качественные методы.
3. Формализованные методы.

Рассмотрим каждую категорию более подробно в разрезе базовых составляющих методов.

Эвристические методы принятия управленческих решений.

В литературе под эвристическими методами понимаются различные процедуры, направленные на сокращение перебора вариантов. Эвристические методы увеличивают вероятность получения работоспособного, но не всегда оптимального решения той или иной задачи.

Ассоциативные методы.

Эти методы основываются на применение в творческом процессе семантических свойств понятий путем использования аналогии их вторичных смысловых оттенков. Основными источниками для генерирования новых идей служат ассоциации, метафоры и случайно выбранные понятия.

К ассоциативным методам относятся:

- Метод каталога;
- Метод фокальных объектов;
- Метод гирлянд случайностей и ассоциаций.

Для разработки большего количества идей решения проблемы прибегают к метафорам. Метафоры служат подсказкой для генерации идеи. Для расширения идей и повышения их оригинальности прибегают к гирляндам ассоциаций.

Если на объект исследования перенести свойства других объектов, резко возрастает число неожиданных альтернатив решений. Эта идея стала основой метода каталога, и усовершенствованного метода фокальных объектов. Дальнейшим развитием метода фокальных объектов стал метод гирлянд ассоциаций. Он помогает найти больше количество подсказок для новых идей путем образования ассоциаций.

Метод мозгового штурма.

Метод мозгового штурма (мозговой штурм, мозговая атака) — оперативный метод решения проблемы на основе стимулирования творческой активности, при котором участникам обсуждения предлагают высказывать как можно большее количество вариантов решения, в том числе самых фантастичных. Затем из общего числа высказанных идей отбирают наиболее удачные, которые могут быть использованы на практике.

Этапы и правила мозгового штурма.

Правильно организованный мозговой штурм включает три обязательных этапа. Этапы отличаются организацией и правилами их проведения:

- Постановка проблемы. Предварительный этап. В начале этого этапа проблема должна быть четко сформулирована. Происходит отбор участников штурма, определение ведущего и распределение прочих ролей участников в зависимости от поставленной проблемы и выбранного способа проведения штурма.
- Генерация идей. Основной этап, от которого во многом зависит успех всего мозгового штурма. Поэтому очень важно соблюдать правила для этого этапа:

1. Главное — количество идей. Не делайте никаких ограничений.
2. Полный запрет на критику и любую (в том числе положительную) оценку высказываемых идей, так как оценка отвлекает от основной задачи и сбивает творческий настрой.
3. Необычные и даже абсурдные идеи приветствуются. Комбинируйте и улучшайте любые идеи.

- Группировка, отбор и оценка идей. Этот этап часто забывают, но именно он позволяет выделить наиболее ценные идеи и дать окончательный результат мозгового штурма. На этом этапе, в отличие от второго, оценка не ограничивается, а наоборот, приветствуется. Методы анализа и оценки идей могут быть очень разными. Успешность этого этапа напрямую зависит от того, насколько «одинаково» участники понимают критерии отбора и оценки идей.

Мозговые атаки.

Для проведения мозговой атаки обычно создают две группы:

- участники, предлагающие новые варианты решения задачи;
- члены комиссии, обрабатывающие предложенные решения.

Различают индивидуальные и коллективные мозговые атаки.

В мозговом штурме участвует коллектив из нескольких специалистов и ведущий. Перед самим сеансом мозгового штурма ведущий производит четкую постановку задачи, подлежащей решению. В ходе мозгового штурма участники высказывают свои идеи, направленные на решение поставленной задачи, причём как логичные, так и абсурдные. Если в мозговом штурме принимают участие люди различных чинов или рангов, то рекомендуется заслушивать идеи в порядке возрастания ранжира, что позволяет исключить психологический фактор «соглашения с начальством».

В процессе мозгового штурма, как правило, вначале решения не отличаются высокой оригинальностью, но по прошествии некоторого времени типовые, шаблонные решения исчерпываются, и у участников начинают возникать необычные идеи. Ведущий записывает или как-то иначе регистрирует все идеи, возникшие в ходе мозгового штурма.

Затем, когда все идеи высказаны, производится их анализ, развитие и отбор. В итоге находится максимально эффективное и часто нетривиальное решение задачи.

Успех мозгового штурма сильно зависит от психологической атмосферы и активности обсуждения, поэтому роль ведущего в мозговом штурме очень важна. Именно он может «вывести из тупика» и вдохнуть свежие силы в процесс.

Изобретателем метода мозгового штурма считается Алекс Осборн, сотрудник рекламного агентства BBD&O. Одним из продолжений метода мозгового штурма является метод синектики.

Метод синектики.

Синектика — методика психологической активизации творчества, предложенная В. Дж. Гордоном. Является развитием и усовершенствованием метода мозгового штурма. Д. Гордон разработал этот метод решения проблем, когда руководил группой исследования изобретений для Артура Д. Литтла. При синектическом штурме допустима критика, которая позволяет развивать и видоизменять высказанные идеи. Этот штурм ведет постоянная группа. Её члены постепенно привыкают к совместной работе, перестают бояться критики, не обижаются, когда кто-то отвергает их предложения.

В методе применены четыре вида аналогий — прямая, символическая, фантастическая, личная.

Виды аналогий:

1. При прямой аналогии рассматриваемый объект сравнивается с более или менее похожим аналогичным объектом в природе или технике. Например, для усовершенствования процесса окраски мебели применение прямой аналогии состоит в том, чтобы рассмотреть, как окрашены минералы, цветы, птицы и т. п. или как окрашивают бумагу, киноплёнки и т. п.

2. Символическая аналогия требует в парадоксальной форме сформулировать фразу, буквально в двух словах отражающую суть явления. Например, при решении задачи, связанной с мрамором, найдено словосочетание «радужное постоянство», так как отшлифованный мрамор (кроме белого) — весь в ярких узорах, напоминающих радугу, но все эти узоры постоянны.

3. При фантастической аналогии необходимо представить фантастические средства или персонажи, выполняющие то, что требуется по условиям задачи. Например, хотелось бы, чтобы дорога существовала там, где её касаются колёса автомобиля.

4. Личная аналогия (эмпатия) позволяет представить себя тем предметом или частью предмета, о котором идёт речь в задаче. В примере с окраской мебели можно вообразить себя белой вороной, которая хочет окраситься. Или, если совершенствуется зубчатая передача, то представить себя шестерней, которая крутится вокруг своей оси, подставляя бока соседней шестерне. Нужно в буквальном смысле входить «в образ» этой шестерни, чтобы на себе почувствовать всё, что достаётся ей, и какие она испытывает неудобства или перегрузки. Что даёт такое перевоплощение? Оно значительно уменьшает инерцию мышления и позволяет рассматривать задачу с новой точки зрения.

Формализованные методы принятия решений.

Параметрический метод.

Метод заключается в выявлении и устранении физических противоречий, действующих в системе. Под физическим противоречием следует понимать – взаимоисключающие требования, предъявляемые к элементу системы, причем один из характеризующих его параметров должен иметь два альтернативных значения. При этом состояние элемента (движение) называется узловым параметром, а характеризуемый им элемент – узловым элементом.

Морфологический метод.

Суть морфологического метода заключается в следующем:

- сначала мы определяем пространство поиска, которое обязательно должно включать в себя искомое решение (схему устройства);
- затем сужаем это пространство, осуществляя поиск этого решения.

В процессе морфологического синтеза мы ищем структуру синтезируемого устройства, проводя поиск на морфологическом множестве.

Балансовые методы.

Балансовые методы – совокупность приемов, позволяющих исследовать и прогнозировать развитие объектов путем сопоставления прихода и расхода вещества, энергии и других потоков. В основе балансовых методов лежит баланс, оценивающий количественно движение потока в пределах анализируемого объекта.

Балансовый метод, сопоставление взаимосвязанных показателей хозяйственной деятельности с целью выяснения и измерения их взаимного влияния, а также подсчета резервов повышения эффективности производства.

Диаграмма Ганта.

Диаграмма Ганта представляет собой отрезки (графические плашки), размещенные на горизонтальной шкале времени. Каждый отрезок соответствует отдельной задаче или подзадаче. Задачи и подзадачи, составляющие план, размещаются по вертикали. Начало, конец и длина отрезка на шкале времени соответствуют началу, концу и длительности задачи. На некоторых диаграммах Ганта также показывается зависимость между задачами. Диаграмма может использоваться для представления текущего состояния выполнения работ: часть прямоугольника, отвечающего задаче, заштриховывается, отмечая процент выполнения задачи; показывается вертикальная линия, отвечающая моменту «сегодня».

Иначе говоря, это популярный тип столбчатых диаграмм, который используется для иллюстрации плана, графика работ по какому-либо проекту.

Управление проектом – профессиональная деятельность по руководству ресурсами (человеческими и материальными) путем применения методов, средств и управления для успешного достижения заранее поставленных целей в результате выполнения комплекса взаимосвязанных мероприятий при определенных требованиях к срокам, бюджету и характеристикам ожидаемых результатов проектов.

Метод анализа иерархии (МАИ).

МАИ – математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. МАИ не предписывает лицу, принимающему решение (ЛПР), какого-либо «правильного» решения, а позволяет ему в интерактивном режиме найти такой вариант (альтернативу), который наилучшим образом согласуется с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению. МАИ позволяет понятным и рациональным образом структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения. Метод Анализа Иерархий используется во всем мире для принятия решений в разнообразных ситуациях: от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании. Для компьютерной поддержки МАИ существуют программные продукты, разработанные различными компаниями. Анализ проблемы принятия решений в МАИ начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии, альтернативы и другие рассматриваемые факторы, влияющие на выбор. Эта структура отражает понимание проблемы лицом, принимающим решение. Каждый элемент иерархии может представлять различные аспекты решаемой задачи, причем во внимание могут быть приняты как материальные, так и нематериальные факторы, измеряемые количественные параметры и качественные характеристики, объективные данные и субъективные экспертные оценки. Иными словами, анализ ситуации выбора решения в МАИ напоминает процедуры и методы аргументации, которые используются на интуитивном уровне. Следующим этапом анализа является определение приоритетов, представляющих относительную важность или предпочтительность элементов построенной иерархической структуры, с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные приоритеты позволяют обоснованно сравнивать разнородные факторы, что является отличительной особенностью МАИ. На заключительном этапе анализа выполняется синтез (линейная свертка) приоритетов на иерархии, в результате которой вычисляются приоритеты альтернативных решений относительно главной цели. Лучшей считается альтернатива с максимальным значением приоритета.

Оптимизационные методы.

По типу математического аппарата различают условную и безусловную оптимизацию. Условная оптимизация – это задачи линейного программирования (ЗЛП).

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения; само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой.

Качественные методы.

Метод «Дельфи».

Суть этого метода в том, чтобы с помощью серии последовательных действий – опросов, интервью, мозговых штурмов – добиться максимального консенсуса при определении правильного решения. Анализ с помощью дельфийского метода проводится в несколько этапов, результаты обрабатываются статистическими методами.

Базовым принципом метода является то, что некоторое количество независимых экспертов лучше оценивает и предсказывает результат, чем структурированная группа личностей. Позволяет избежать открытых столкновений между носителями противоположенных позиций т.к. исключает непосредственный контакт экспертов между собой и, следовательно, групповое влияние, возникающее при совместной работе и состоящее в приспособлении к мнению большинства. Даёт возможность проводить опрос экстерриториально, не собирая экспертов в одном месте (например, посредством электронной почты).

Метод «Дерева решений».

Дерево решений — это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Метод «сценариев».

Метод сценариев получил очень большое распространение в современном мире. Используется во всех отраслях экономики, как для открытия новых компаний, так и для синтеза действующих компаний. Наиболее часто можно увидеть применение данного метода при составлении различных прогнозов для финансово-хозяйствующего субъекта (к примеру, при прогнозировании продаж).

Как правило, данный метод подразумевает составление трех сценариев:

1. Пессимистического.
2. Реального.
3. Оптимистического.

Вопрос 2. Постановка задачи линейного программирования и свойства ее решений.

Линейное программирование — раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного программирования* (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Формы записи задачи линейного программирования:

Общей задачей линейного программирования называют задачу

$$max(min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1,\dots,m_1) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = m_1 + 1,\dots,m_2) \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ (i = m_2 + 1,\dots,m) \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n_1}\right) \qquad (5)$$

$$x_j \text{ – произвольные } \left(j = n_i + 1,\dots,n\right) \qquad (6)$$

где c_j, a_{ij}, b_i – заданные действительные числа; (1) – целевая функция; (1) – (6) – ограничения; $\vec{x} = (x_1;\dots;x_n)$ – план задачи.

Пусть ЗЛП представлена в следующей записи:

$$max\ Z = cx \qquad (7)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0 \qquad (8)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\dots,\ x_n \ge 0 \qquad (9)$$

Чтобы задача (7) – (8) имела решение, системе её ограничений (8) должна быть совместной. Это возможно, если r этой системы не больше числа неизвестных n. Случай $r > n$ вообще невозможен. При $r = n$ система имеет единственное решение, которое будет при $x_j \ge 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ оптимальным. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл. Выясним структуру координат угловой точки многогранных решений. Пусть $r < n$. В этом случае система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ содержит базис — максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линейная комбинация. Базисов, вообще говоря, может быть несколько, но не более C_n^r. Каждый из них состоит точно из r векторов. Переменные ЗЛП, соответствующие r векторам базиса, называют, как известно, *базисными* и обозначают БП. Остальные $n - r$ переменных будут *свободными,* их обозначают СП. Не ограничивая общности, будем считать, что базис составляют первые m векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$. Этому базису соответствуют базисные переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$, а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

Если свободные переменные приравнять нулю, а базисные переменные при этом примут неотрицательные значения, то полученное частное решение системы (8) называют *опорным решением (планом).*

Теорема. Если система векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ содержит m линейно независимых векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$, то допустимый план

$$\vec{x} = \left(x_1; x_2; \dots; x_m; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{n-m} \right) \qquad (10)$$

является крайней точкой многогранника планов.

Теорема. Если ЗЛП имеет решение, то целевая функция достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же целевая функция достигает экстремального значения более чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

Графический способ решения ЗЛП.

Геометрическая интерпретация экономических задач дает возможность наглядно представить, их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования более сложных свойств. ЗЛП с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространствах, размерность которых больше трех, графическое решение, вообще говоря, невозможно. Случай двух переменных не имеет особого практического значения, однако его рассмотрение проясняет свойства ОЗЛП, приводит к идее ее решения, делает геометрически наглядными способы решения и пути их практической реализации.

Пусть дана задача

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ \dots\dots&\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (13)$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи. Каждое из ограничений (12), (13) задает на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость. Полуплоскость — выпуклое множество. Но пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством. Отсюда следует, что область допустимых решений задачи (11) — (13) есть выпуклое множество.

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции. Пусть область допустимых решений ЗЛП — непустое множество, например многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

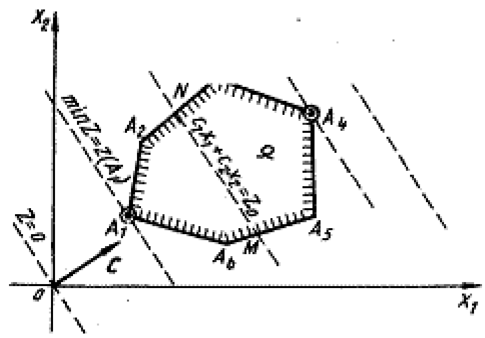

Рис. 1

Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$. Это уравнение прямой линии. В точках прямой NM целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве (11) Z параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции (линиями постоянного значения).

Найдём частные производные целевой функции по x_1 и x_2:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = c_2. \qquad (15)$$

Частная производная (14) (так же как и (15)) функции показывает скорость ее возрастания вдоль данной оси. Следовательно, c_1 и c_2 — скорости возрастания Z соответственно вдоль осей Ox_1 и Ox_2. Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$ называется градиентом функции. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции:

$$\vec{c} = \left(\partial Z / \partial x_1, \partial Z / \partial x_2 \right)$$

Вектор $(-\vec{c})$ указывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Его называют антиградиентом.

Вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$ перпендикулярен к прямым $Z = const$ семейства $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$.

Из геометрической интерпретации элементов ЗЛП вытекает следующий порядок ее графического решения.

1. С учетом системы ограничений строим область допустимых решений Ω.

2. Строим вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции — вектор градиентного направления.

3. Проводим произвольную линию уровня $Z = Z_0$.

4. При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $Z = Z_0$ в направлении вектора c так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (крайней точке). В случае решения задачи на минимум линию уровня $Z = Z_0$ перемещают в антиградиентном направлении.

5. Определяем оптимальный план $\vec{x} = \left(x_1^{\rightarrow}, x_2^{\rightarrow}\right)$ и экстремальное значение целевой функции $Z^{\rightarrow} = z\left(\vec{x}\right)$.

Симплексный метод решение ЗЛП.

Общая идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) для решения ЗЛП состоит:

1) умение находить начальный опорный план;
2) наличие признака оптимальности опорного плана;
3) умение переходить к нехудшему опорному плану.

Пусть ЗЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right).$$

Говорят, что ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательной правой части $\left(b_i \geq 0\right)$ левая часть ограничений содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения равенства – с коэффициентом, равным нулю.

Пусть система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad b_i \geq 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right)$$

Сведем задачу к каноническому виду. Для этого прибавим к левым частям неравенств дополнительные переменные $x_{n+1} \geq 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right)$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right),$$

которая имеет предпочтительный вид

$$\vec{x}_0 = \left(0; \underbrace{0; \ldots; 0;}_{n} \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m} \right).$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю $c_{n+1} = 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right)$.

Пусть далее система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad b_i \geq 0 \ \left(i = 1, \ldots, m\right).$$

Сведём её к эквивалентной вычитанием дополнительных переменных $x_{n+1} \geq 0 \ (i = 1,...,m)$ из левых частей неравенств системы. Получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i, \quad b_i \geq 0 \ (i = 1,...,m).$$

Однако теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+1} входят в левую часть (при $b_i \geq 0$) с коэффициентами, равными –1. Поэтому, вообще говоря, базисный план $\vec{x}_0 = \left(\underbrace{0;...;0;}_{n} - b_1; -b_2; ...; -b_m\right)$ не является допустимым. В этом случае вводится так называемый искусственный базис. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные ω_i. В целевую функцию переменные ω_i, вводят с коэффициентом M в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом – M для задачи на максимум, где M – большое положительное число. Полученная задача называется M-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пусть исходная ЗЛП имеет вид

$$max(min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1,...,m), \qquad (17)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,...,n), \qquad (18)$$

причём ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной. М-задача запишется так:

$$max(min)\ \overline{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) \sum_{t=1}^{m} M \omega_i \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \omega_i = b_i, \ (i = 1,...,m) \qquad (20)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), \ \omega_i \geq 0, \ (i = 1,...,m) \ (21)$$

Задача (19) – (21) имеет предпочтительный план. Её начальный опорный план имеет вид

$$\vec{x}_0 = \left(\underbrace{0;0;...;0;}_{n} b_1; b_2; ...; b_m\right)$$

Если некоторые из уравнений (17) имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

Теорема. Если в оптимальном плане

$$\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n; \omega_1; \omega_2; ...; \omega_m) \qquad (22)$$

М-задачи (19) – (21) все искусственные переменные $\omega_i = 0 \ (i = 1,...,m)$, то план $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи (16) – (18).

Для того чтобы решить задачу с ограничениями, не имеющими предпочтительного вида, вводят искусственный базис и решают расширенную М – задачу, которая имеет начальный опорный план

$$\vec{x}_0 = \left(\underbrace{0; 0; ...; 0;}_{n} b_1; b_2; ...; b_m \right)$$

Решение исходной задачи симплексным методом путем введения искусственных переменных ω_i называется симплексным методом с искусственным базисом.

Если в результате применения симплексного метода к расширенной задаче получен оптимальный план, в котором все искусственные переменные $\vec{\omega_i} = 0$, то его первые n компоненты дают оптимальный план исходной задачи.

Теорема. Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

Признаки оптимальности.

Теорема. Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_i \ \left(j = \overline{1,n} \right)$ неотрицательны, то такой план оптимален.

Теорема. Если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_i \ \left(j = \overline{1,n} \right)$ не положительны, то такой план оптимален.

Рассмотрим классические примеры ЗЛП.

Задача о смесях.

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Пример. Для откорма животных используется три вида комбикорма: А, В и С. Каждому животному в сутки требуется не менее 800 г. жиров, 700 г. белков и 900 г. углеводов. Содержание в 1 кг. каждого вида комбикорма жиров, белков и углеводов (граммы) приведено в таблице 1:

Таблица 1.

Содержание жиров, белков и углеводов (граммы) в 1 кг. каждого вида комбикорма

Содержание в 1 кг.	**Комбикорм**		
	А	В	С
Жиры	320	240	300
Белки	170	130	110

Углеводы	380	440	450
Стоимость 1 кг	31	23	20

Сколько килограммов каждого вида комбикорма нужно каждому животному, чтобы полученная смесь имела минимальную стоимость?

Математическая модель задачи есть:

x_1, x_2, x_3 – количество комбикорма A, B и C. Стоимость смеси есть:

$$31x_1 + 23x_2 + 20x_3 \to min$$

Ограничения на количество ингредиентов:

$$\begin{cases} 320x_1 + 240x_2 + 300x_3 \geq 800; \\ 170x_1 + 130x_2 + 110x_3 \geq 700; \\ 380x_1 + 440x_2 + 450x_3 \geq 900, \end{cases}$$

$$x_{1,2,3} \geq 0.$$

Задача о раскрое материалов.

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассматривается простейшая модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

Задача о назначениях.

Речь идет о задаче распределения заказа (загрузки взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Пример. Цеху металлообработки нужно выполнить срочный заказ на производство деталей. Каждая деталь обрабатывается на 4-х станках С1, С2, С3 и С4. На каждом станке может работать любой из четырех рабочих Р1, Р2, Р3, Р4, однако, каждый из них имеет на каждом станке различный процент брака. Из документации ОТК имеются данные о проценте брака каждого рабочего на каждом станке (табл. 2).

Таблица 2.

Процент брака каждого рабочего на каждом станке

Рабочие	**Станки**			
	С1	С2	С3	С4
Р1	2,3	1,9	2,2	2,7
Р2	1,8	2,2	2,0	1,8
Р3	2,5	2,0	2,2	3,0
Р4	2,0	2,4	2,4	2,8

Необходимо так распределить рабочих по станкам, чтобы суммарный процент брака (который равен сумме процентов брака всех 4-х рабочих) был минимален. Чему равен этот процент?

Обозначим за $x_{ij};\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4$ – переменные, которые принимают значения 1, если i-й рабочий работает на j-м станке. Если данное условие не выполняется, $x_{ij}=0$. Целевая функция есть:

$$\begin{aligned}&2,3x_{11}+1,9x_{12}+2,2x_{13}+2,7x_{14}+1,8x_{21}+2,2x_{22}+2x_{23}+1,8x_{24}+\\&+2,5x_{31}+2x_{32}+2,2x_{33}+3x_{34}+2x_{41}++2,4x_{42}+2,4x_{43}+2,8x_{44}\to min\end{aligned}$$

Вводим ограничения. Каждый рабочий может работать только на одном станке, то есть

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{cases}$$

Кроме того, каждый станок обслуживает только один рабочий:

$$\begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1\\x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1\\x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1\\x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1\end{cases}$$

Кроме того, все переменные должны быть целыми и неотрицательными: $x_g\ge 0,\ x_g - целые.$

Транспортная задача.

Математическая модель задачи.

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок продукции с m складов в пункт назначения n который, потребовал бы минимальных затрат. Если потребитель j получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада i, то возникают издержки C_{ij}. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т.е. перевозка k единиц продукции вызывает расходы kC_{ij}.

Далее, предполагается, что $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$.

где a_j есть количество продукции, находящееся на складе i, и b_j – потребность потребителя $>j$. Такая транспортная задача называется закрытой. Однако, если данное равенство не выполняется, то получаем открытую транспортную задачу, которая сводится к закрытой по следующим правилам:

1. Если сумма запасов в пунктах отправления превышает сумму поданных заявок $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$ то количество продукции, равное $\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ остается на складах. В этом случае мы введем «фиктивного» потребителя $n+1$ с потребностью $\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ и положим транспортные расходы $p_{i,n+1}$ равными 0 для всех i.

2. Если сумма поданных заявок превышает наличные запасы $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ то потребность не может быть покрыта. Эту задачу можно свести к обычной транспортной задаче с правильным балансом, если ввести фиктивный пункт отправления m+1 с запасом $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$ и стоимость перевозок из фиктивного пункта отправления во все пункты назначения принять равным нулю.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ (j = 1,\dots,n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n)$$

где x_{ij} количество продукции, поставляемое со склада i потребителю j, а C_{ij} издержки (стоимость перевозок со склада i потребителю j).

Рассмотрим пример:

Пример. Компания «Стройгранит» производит добычу строительной щебенки и имеет на территории региона три карьера. Запасы щебенки на карьерах соответственно равны 800, 900 и 600 тыс. тонн. Четыре строительные организации, проводящие строительные работы на разных объектах этого же региона, дали заказ на поставку соответственно 300, 600, 650 и 750 тыс. тонн щебенки. Стоимость перевозки 1 тыс. тонн щебенки с каждого карьера на каждый объект приведены в таблице:

Таблица 3.

Карьер	**Строительный объект**			
	1	*2*	*3*	*4*
1	8	4	1	7
2	3	6	7	3
3	6	5	11	8

Необходимо составить такой план перевозки (количество щебенки, перевозимой с каждого карьера на каждый строительный объект), чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Данная транспортная задача является закрытой, так как запасы поставщиков $800 + 900 + 600 = 2300$ равны спросу потребителей $300 + 600 + 650 + 750 = 2300$. Математическая модель ЗЛП в данном случае имеет вид:

$x_{ij}; \ i = 1,2,3; \ \ j = 1,2,3,4$ – количество щебенки, перевозимой с i–го карьера на j–й объект. Тогда целевая функция равна

$$8x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 7x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 6x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 8x_{34} \to min.$$

Ограничения имеют вид

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=800; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=900; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=600; \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=300; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=600; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=650; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=750; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Вопрос 3. Решение ЗЛП с помощью MS EXCEL.

Для решения задач оптимизации в MS Excel используют надстройку **Поиск решения**, которая вызывается из пункта главного меню «Сервис» (рис. 2).

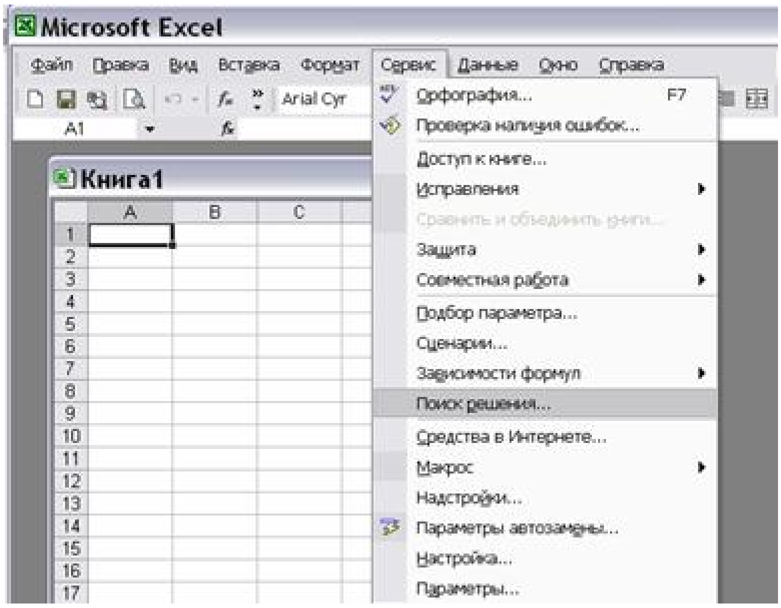

Рис. 2

Если в версии Excel, установленной на Вашем компьютере, отсутствует данный подпункт меню «Сервис», необходимо вызвать пункт меню «Надстройки» и в предложенном списке дополнительных модулей выбрать «Поиск решения» (рис. 3).

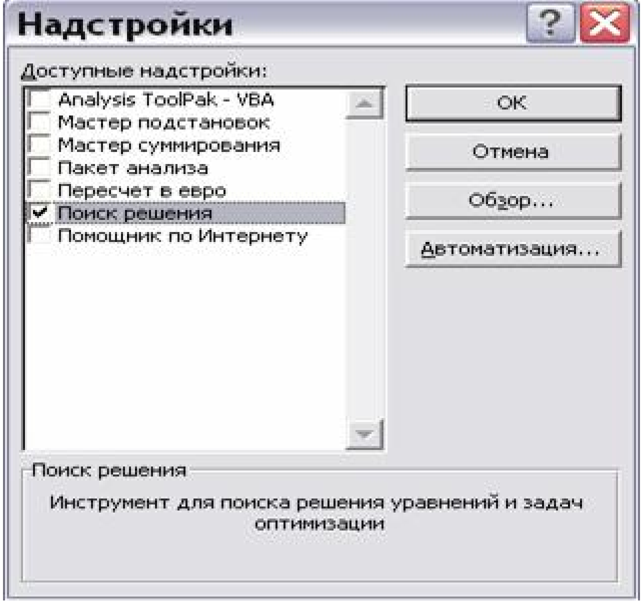

Рис. 3.

Рассмотрим на примере использование данной надстройки. Решим с её помощью задачу. Математическая модель задачи имеет вид:

$$max\, f\left(\overline{X}\right) = 3X_1 + 2X_2 \quad \text{(целевая функция)}$$

при

$$\left.\begin{array}{r} X_1 + 2X_2 \le 6 \\ 2X_1 + X_2 \le 8 \\ X_1 + 0{,}8X_2 \le 5 \\ -X_1 + X_2 \le 1 \\ X_2 \le 2 \end{array}\right\} \text{ограничения}$$

$$X_1 \ge 0, \;\; X_2 \ge 0$$

Составим шаблон в редакторе Excel, как показано на рис. 4.

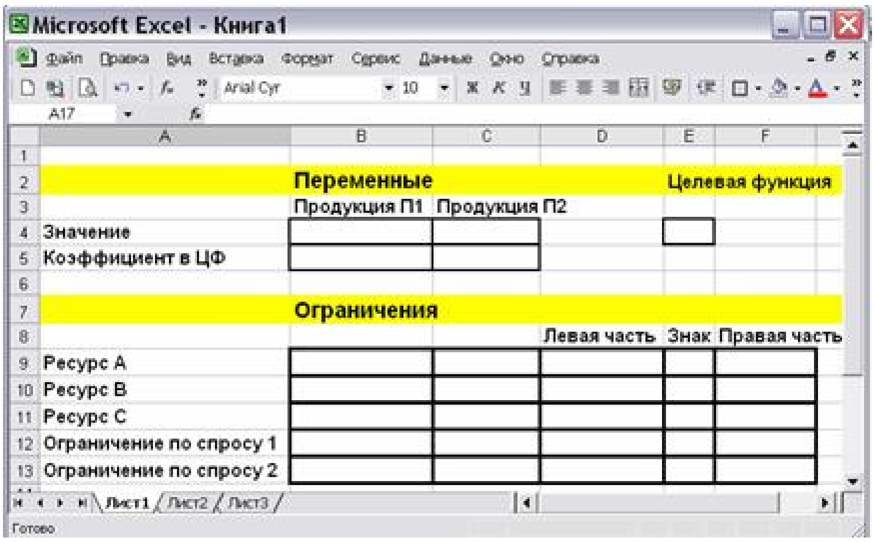

Рис. 4. Шаблон оформления задачи

Теперь занесём данную в задаче числовую информацию (рис. 5).

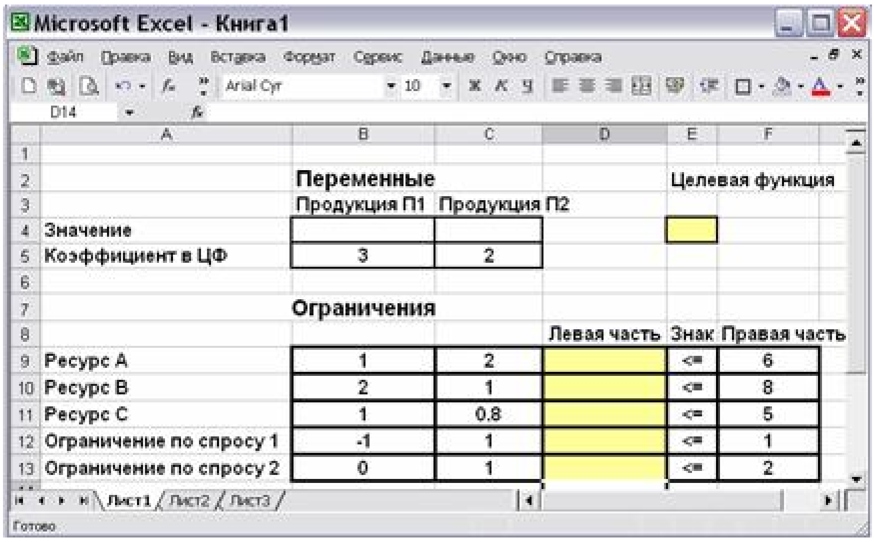

Рис. 5. Исходные данные задачи

В выделенные пустые ячейки (значения целевой функции и левых частей неравенств) необходимо занести формулы, отображающие связи и отношения между числами на рабочем листе.

Ячейки B4 – C4 называются в Excel *изменяемыми* (в нашей модели это неизвестные переменные), т.е., изменяя их **Поиск решения** будет находить оптимальное значение целевой функции. Значения, которые первоначально вводят в эти ячейки, обычно нули (незаполненные клетки трактуются по умолчанию как содержащие нулевые значения).

Теперь необходимо ввести формулы. В нашей математической модели, целевая функция представляет собой произведение вектора коэффициентов на вектор неизвестных. Действительно, выражение $3X_1 + 2X_2$ можно рассматривать как произведение вектора (3,2) на вектор (X_1,X_2).

В Excel существует функция СУММПРОИЗВ, которая позволяет найти скалярное произведение векторов. В ячейку E4 необходимо вызвать данную функцию, а в качестве перемножаемых векторов задать адреса ячеек, содержащих коэффициенты уравнений (в данном случае, это B5:C5) и ячеек, в которые в результате решения будут помещены значения X_1 и X_2 (ячейки B4:C4) (рис. 6).

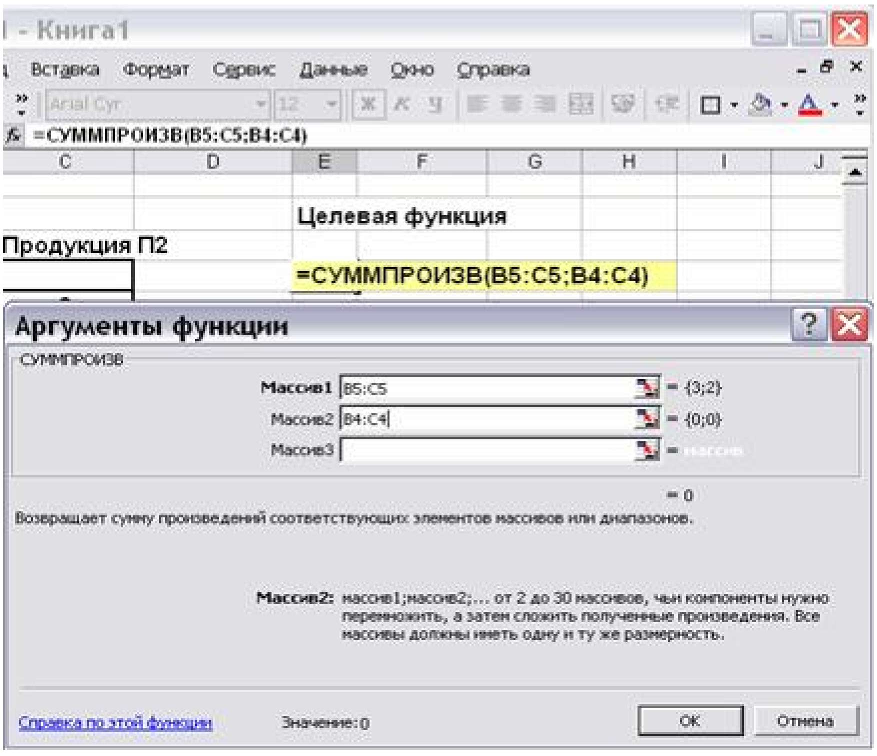

Рис. 6. Вызов функции СУММПРОИЗВ

Каждая левая часть ограничения тоже представляет собой произведение двух векторов: соответствующей строки матрицы затрат и вектора неизвестных. То есть, выражение $X_1 + 2X_2$ (для первого ограничения $X_1 + 2X_2 \le 6$) будем рассматривать как произведение вектора коэффициентов (1,2) и вектора переменных (X_1, X_2).

В ячейке, отведенной для формулы левой части первого ограничения (D9), вызовем функцию СУММПРОИЗВ. В качестве адресов перемножаемых векторов занесем адрес строки коэффициентов B9:C9 и адрес значений переменных B4:C4 (рис. 7).

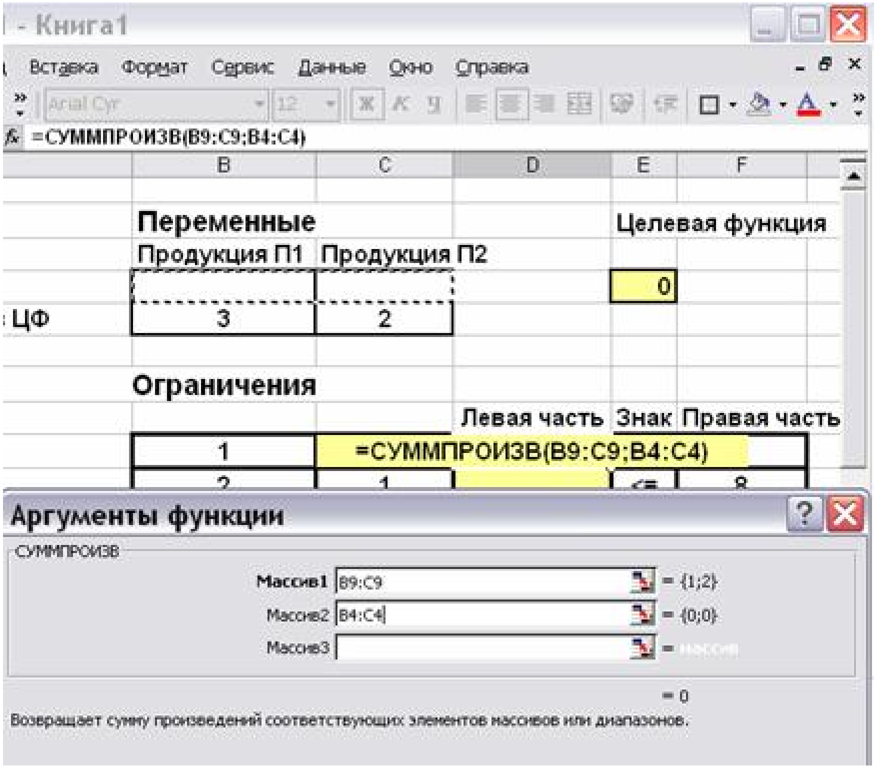

Рис. 7

В четыре оставшиеся ячейки графы «Левая часть» вводим аналогичные формулы, используя соответствующую строку матрицы затрат. Фрагмент экрана с введёнными формулами показан на рис. 8.

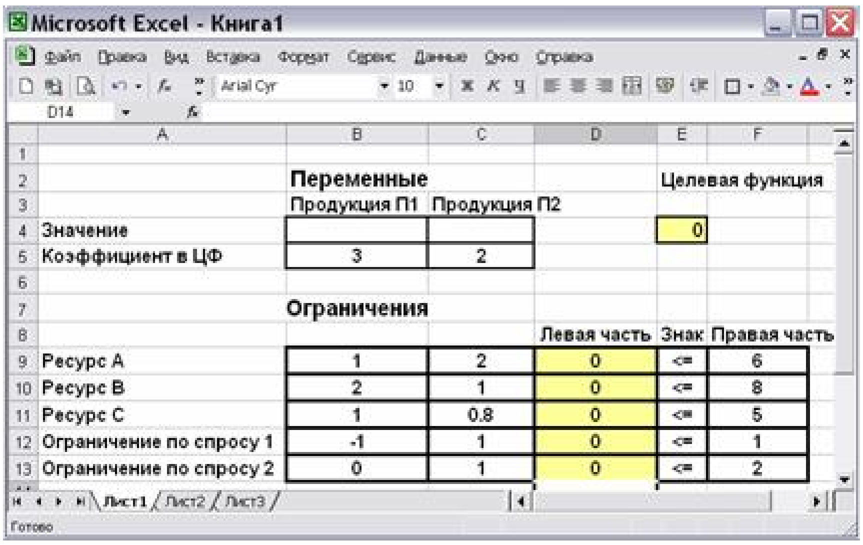

Рис. 8

Важно! К моменту вызова сервиса «Поиск решения» на рабочем листе с задачей должны быть занесены **формулы для левых частей ограничений и формула для значения целевой функции**.

В меню **Сервис** выбираем **Поиск решения**. В появившемся окне задаём следующую информацию:

1) в качестве целевой ячейки устанавливаем адрес ячейки для значения целевой функции E4;

2) «флажок» устанавливаем на вариант «максимальному значению», т.к. в данном случае, целевая функция дохода подлежит максимизации;

3) в качестве изменяемых ячеек заносится адрес строки значений переменных B4:C4;

4) справа от окна, предназначенного для занесения ограничений, нажимаем кнопку «Добавить», появится форма для занесения ограничения (рис. 9)

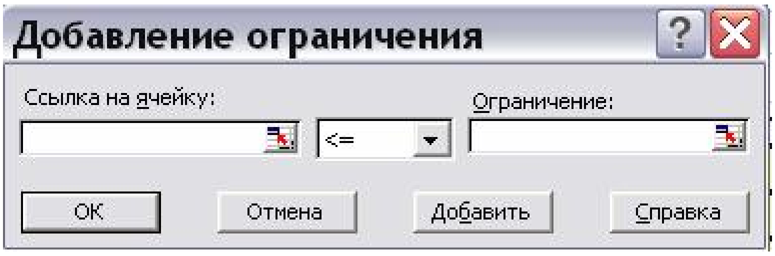

Рис. 9. Форма для занесения одного ограничения ЗЛП

1) в левой части формы «Ссылка на ячейку» заносится адрес формулы для левой части первого ограничения D9, выбирается требуемый знак неравенства (в нашем случае, <=), в поле «Ограничение» заносится ссылка на правую часть ограничения F9 (рис. 10).

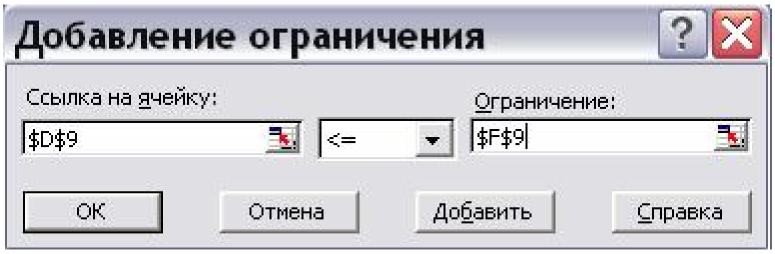

Рис. 10. Занесение первого ограничения задачи

2) аналогично заносятся все ограничения задачи, после чего нажимается кнопка «ОК».

Таким образом, окно «Поиск решения» с занесенной информацией выглядит следующим образом (рис. 11):

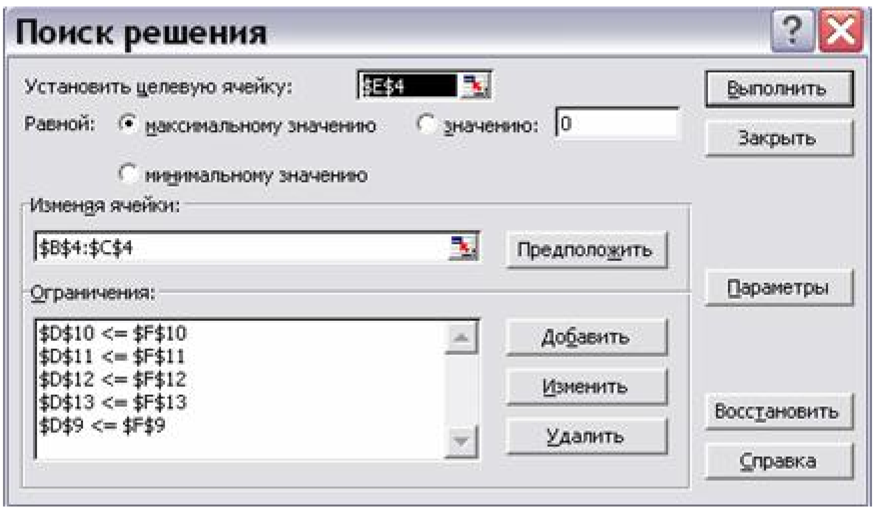

Рис. 11

Далее необходимо нажать кнопку **Параметры**, установить «флажки» «**Линейная модель» и «Неотрицательные значения»**, поскольку в данном случае задача является ЗЛП, а ограничение 6) требует неотрицательности значений (рис. 12).

Рис. 12. Установка параметров

Затем следует нажать **«ОК», «Выполнить»**, после чего появляется окно результата решения (рис. 13).

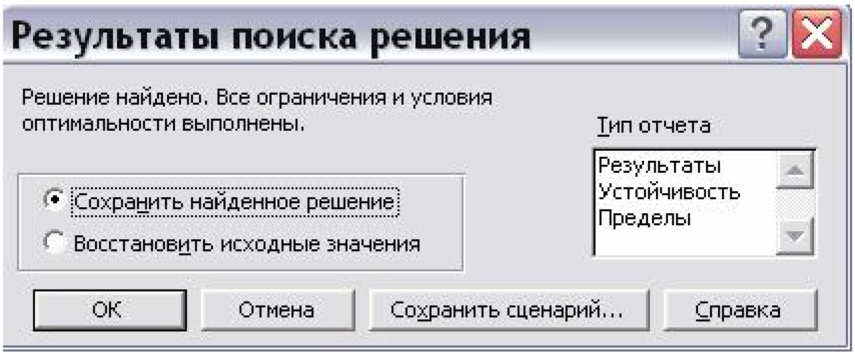

Рис. 13. Окно результата решения

Если в результате всех действий получено окно с сообщением «Решение найдено», то Вам предоставляется возможность получения трех типов отчета, которые полезны при анализе модели на чувствительность. В данном примере достаточно сохранить найденное решение, нажав «ОК». В результате получено решение задачи из примера 1. (рис. 14).

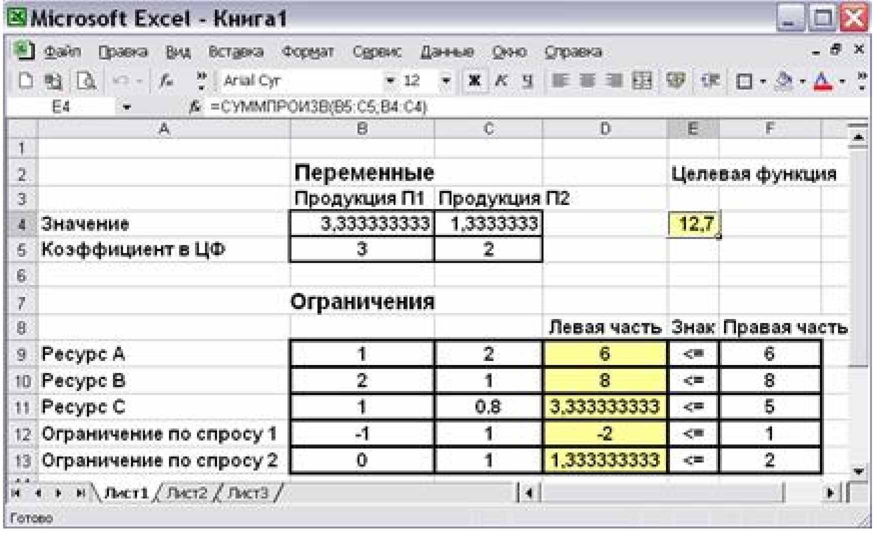

Рис. 14. Результат применения «Поиска решения»

Если в результате решения задачи выдано окно с сообщением о невозможности нахождения решения (рис. 15), это означает, что при оформлении задачи была допущена ошибка (не заполнены формулы для ограничений, неправильно установлен «флажок» максимизации/ минимизации и т.д.).

Рис. 15. Сообщение об ошибке

В данном разделе рассмотрен общий формат решения задач оптимизации в Excel. В зависимости от экономических моделей, выполняют его соответствующие модификации.

Литература.

Основная литература:

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2008. – 392 с.
2. Литвак Б.Г. Управленческие решения. – М.: Дело, 2008. – 254 с.
3. Смирнов Э.А. Разработка управленческих решений. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 272 с.
4. Фатхутдинов Р.А. Разработка управленческого решения: Учеб. пособ. – М.: Бизнес-школа, Интел-Синтез, 2007. – 272 с.

Дополнительная литература:

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, принятие решений в экономике – М.: Финансы и статистика, 2007. – 368с.
2. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений: Научно-практическое издание. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.
3. Варфоломеев В.И., Воробьев С.Н. Принятие управленческих решений: Учеб пособие для вузов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2007. – 288 с.

4. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 656 с.
5. Ашихмин А.А. Разработка и принятие управленческих решений: формальные модели и методы выбора. – М.: МГТУ, 2005.
6. Вентцель Е.С. Исследование операция. – М.: Советское радио, 1972.
7. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
8. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982/
9. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.
10. Лапшин К.А., Светлов Н.М. Прогграммный комплекс «Линейная оптимизация» – методические указания для студентов экономического факультета. – М.: МСХА, 1994.
11. Лесик, А. И., Чистяков, Ю. Е. Теоретико-игровые модели взаимодействия экономических субъектов производственной системы. – М. : ВЦ РАН, 1994.
12. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.
13. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
14. Платов В.Я. Деловые игры: разработка, организация, проведение. – М.: Профиздат, 1991.
15. Сысоев, В. В. Теоретико-игровые модели принятия решений многоцелевого управления в задачах выбора и распределения ресурсов / Воронеж : Воронеж. гос. технол. акад., 2000.
16. Giblons R. Game theory for applied economists. Princeton University press, Princeton, New Gersey, 1992.

Тема 2. Математические методы принятия решений в условиях определенности, неопределенности и риска

Цели и задачи.

Цель изучения данной темы – получение общетеоретических знаний о математических методах принятия УР в условиях определенности, неопределенности и риска.

Задачи изучения данной темы:

- ознакомление с постановкой задачи принятия решений в общем математическом виде;
- изучение методов принятия решений в условиях определенности;
- изучение методов принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Вопросы темы:

1. Проблема планирования деятельности фирмы.
2. Математические методы принятия решений в условиях определенности.
3. Математические методы принятия решений в условиях неопределенности.
4. Математические методы принятия решений в условиях риска.

Вопрос 1. Проблема планирования деятельности фирмы.

Проблема планирования деятельности фирмы заключается в определении различных альтернатив действий и выборе оптимальной альтернативы, т. е. такой, которая позволяет получить наилучший результат в достижении поставленной цели. В качестве альтернатив могут выступать новые целевые области (товарные рынки), виды выпускаемой продукции, инвестиции в различные сферы деятельности фирмы и т. д. Как правило, они не могут быть реализованы одновременно. Целенаправленный выбор среди подобных альтернатив представляет собой принятие управленческого решения.

Реализация (осуществление) любой возможной альтернативы ведет к одному или нескольким последствиям (результатам). Ожидаемыми результатами могут быть выручка от реализации товаров, издержки производства, доля удовлетворения спроса, прибыль, затраты на продвижение товара, доля рынка и др.

На значение результата обычно оказывают влияние разнообразные факторы, которые не подвержены или почти не подвержены влиянию со стороны ЛПР. Возможное положение дел, не зависящее напрямую от воздействия руководства фирмы, называется ситуацией внешней или окружающей среды. Состояние внешней среды складывается, как правило, в результате имеющейся политической обстановки (стабильная, нестабильная), поведения конкурирующих фирм (реактивное, нереактивное поведение), социально-экономических условий (платежеспособного спроса, правительственного регулирования экономики и т. д.). Состояния внешней среды в теории принятия решений называют обычно гипотезами.

Каждой реализуемой альтернативе $A_i(i=\overline{1,m})$ соответствуют некоторые состояния окружающей среды $Z_j(j=\overline{1,n})$. Ожидаемый результат e_{ij} при выборе альтернативы A_i и принятии гипотезы Z_j получается, если применить функцию предпочтения, или, как чаще всего говорят, функцию полезности f, т. е.:

$$e_{ij}=f(A_i,Z_j)$$

Предполагается, что ЛПР известны получаемые благодаря ей закономерности. Значения функции f наглядно представляются в виде так называемой матрицы ожидаемых результатов. При этом могут задаваться вероятности появления ситуаций внешней среды (гипотез) $p_j(j=\overline{1,n})$, которые при принятии решений считаются рисками. Таким образом, проблема планирования может быть сведена к получению необходимой информации, размещению ее в виде таблиц, например в виде табл. 4. представляющих собой по существу основные модели задач теории принятия решений, и выбору оптимальной альтернативы.

Таблица 4.

Матрица описания задач принятия решений

Альтернативы, A_i	**Состояния внешней среды (гипотезы)**			
	Z_1	**Z_2**	**…**	**Z_n**
A_1	e_{11}	e_{12}	…	e_{1n}
A_2	e_{21}	e_{22}	…	e_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mn}
Вероятности гипотез, p_j	p_1	p_2	…	p_n

Альтернатива A_i, считается в общем случае доминирующей, если не существует никакой другой альтернативы A_k $(k=\overline{1,m}\ и\ k\neq i)$ со значением

$$e_{kj}\geq e_{ij}\ (j=\overline{1,n};\ i,k=\overline{1,m})$$

и $e_{kj}>e_{ij}$ (для наименьшей величины, соответствующей j).

Здесь e_{kj} означает ожидаемый результат от применения альтернативы A_i при наступлении состояния внешней среды Z_j. Если в матрице решений имеется доминирующая альтернатива, то она и выбирается в качестве планового решения. Однако, как правило, доминирующие альтернативы отсутствуют и, кроме того, решение приходится принимать в условиях риска и неопределенности. Здесь нужны специальные принципы принятия решений, или решающие правила, или критерии принятия решений, которые используются иногда как синонимы.

Итак, мы имеем задачу принятия решений (ПР). Все задачи ПР группируются в зависимости от набора классификационных признаков. Существует несколько подходов к классификации задач принятия решений (ЗПР). Однако большинство из них опирается на следующие признаки: характер субъекта (ЛПР), содержание ЗПР, количество целей, влияние времени, значимость решений. Каждый из признаков включает несколько параметров классификации ЗПР. Общая схема классификаций ЗПР приведена на рис. 16.

Особый интерес представляет признак «характер субъекта ПР», который описывает степень информированности ЛПР о проблемной ситуации и указывает конкретный тип ЛПР. Ниже рассмотрим методы принятия решений:

а) в условиях полной определенности, когда известны все составляющие и характеристики проблемы планирования;

б) в условиях вероятностной определенности (риска);

в) в условиях неопределенности.

На первом этапе планирования происходит упорядочение имеющейся (полученной) информации, которая размещается в соответствующих таблицах, аналогичных рис. 16. Следует заметить, что для каждого типа задач принятия решений создается своя система подготовки информации.

Рис. 16. Классификация ЗПР по уровням и признакам группирования

Вопрос 2. Методы решения задач планирования в условиях полной определенности.

В данном случае необходимо различать однокритериальные и многокритериальные методы выбора плановых решений.

1. Однокритериальные методы выбора. Считается известным:

- исходное множество альтернатив $A = \{A_i\}, i = \overline{1,m}$;

- оценки результатов выбираемых альтернатив $f(A_i)$;
- критерий выбора $\max\limits_i f(A_i)$ или $\min\limits_i f(A_i)$.

Следовательно, выбор характеризуется однозначной связью между принятым решением A_i и его результатом $f(A_i)$. В процессе решения задачи определяется альтернатива А*, для которой $f(A^*) = \max f(A_i)$ или $f(A^*) = \min f(A_i)$.

2. Многокритериальные методы выбора. В достаточно большом количестве практических случаев принятия решений при планировании действий приходится учитывать не один, а несколько критериев. Не умаляя общности, можно считать, что все критерии стремятся к максимуму, так как если некоторые критерии минимизируются, то путем умножения их на (-1) они будут стремиться к максимуму, причем решение при этом не изменяется. Матрица исходных данных принятия решений имеет вид (табл. 5).

Если в табл. 5 находится доминирующая альтернатива, то проблемы выбора как таковой не существует, а именно данная альтернатива и принимается в качестве планового решения.

Таблица 5.

Матрица исходных данных для многокритериальных методов выбора

Альтернативы, A_i	**Критерии (цели)**			
	Z_1	**Z_2**	**…**	**Z_n**
A_1	e_{11}	e_{12}	…	e_{1n}
A_2	e_{21}	e_{22}	…	e_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mn}

Однако, как было отмечено ранее, доминирующие стратегии т практике встречаются довольно редко. Поэтому приходится применять методы многокритериального выбора, причем решение должно быть наилучшим в определенном смысле. Итак, выделение существенных для модели рассматриваемой экономической системы показателей качества альтернатив выбора, соответствующих поставленным целям, приводит к задаче векторной оптимизации, которая заключается в нахождении максимума вектор-функции:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \to \max_{x \in D},$$

где D – область допустимых решений модели.

В случае многокритериальной оптимизации возникают три проблемы. Первая проблема связана с выбором принципа оптимальности. В математическом отношении эта проблема эквивалентна задаче упорядочения векторных множеств, а выбор принципа оптимальности – выбору отношений порядка. Вторая проблема связана с нормализацией векторного критерия *F(x)*. Дело в том, что частные критерии имеют различные единицы измерения, поэтому их необходимо привести к единому масштабу измерения, т. е. нормализовать(обычно приводят к безразличным величинам). Третья проблема связана с учетом приоритета (степени важности) частных критериев. Часто для учета приоритета вводится вектор распределения важности или значимости критериев $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

В задаче многокритериального выбора решение почти всегда ищется в области компромиссов или в области решений, оптимальных по Парето, Известен целый ряд методов решения многокритериальных задач, которые можно разбить на четыре группы:

1. Сведение многих критериев к одному путем введения весовых коэффициентов для каждого критерия (более важный критерий получает больший вес).
2. Минимизация максимальных отклонений от наилучших значений по всем критериям.
3. Оптимизация одного критерия (почему-либо признанного наиболее важным), а остальные критерии выступают в роли дополнительных ограничений.
4. Упорядочение (ранжирование) множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них.

В рассматриваемой постановке множество допустимых планов есть совокупность альтернатив $D = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, а значения критериев равны:

$$f_j(A_i) = e_{ij}.$$

Покажем применение некоторых методов многокритериальной оптимизации к решению задач планирования в системе управления фирмой.

Метод равномерной оптимизации:

$$f(A^*) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(A_i) \right\} \qquad (23)$$

Он применяется, если глобальное качество альтернативы представляет собой сумму локальных (частных) качеств и, кроме того, все критерии имеют одну и ту же единицу измерения, например денежное выражение либо безразмерные величины. Главный недостаток метода – это возможность компенсации малых значений некоторых критериев достаточно большими значениями других.

Метод справедливого компромисса:

$$f(A^*) = \max_i \left\{ \prod_{j=1}^{n} f_j(A_i) \right\} \qquad (24)$$

Он применяется, во-первых, потому что существуют разнообразные схемы, приводящие к такому методу, во-вторых, потому что имеется тесная связь с решением в некооперативных играх.

Метод свертывания критериев:

$$f(A^*) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(A_i) \right\}, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \alpha_j > 0 \qquad (25)$$

Здесь каждому из критериев приписываются весовые коэффициенты а, определяющие предпочтения ЛПР.

Метод главного критерия:

$$f_1(A^*) = \max_i \left\{ f_j(A_i) \right\},\ f_j(A_i) \geq d_j,\ j = \overline{2,n} \qquad (26)$$

Здесь f_1(x) – главный (наиболее важный из всех для ЛПР) критерий, d_j – нижняя граница j-го критерия, устанавливаемая ЛПР.

Метод идеальной точки.

Ищется план, удовлетворяющий условию равномерного сжатия:

$$f(A^*) = \min_i \left\{ \max_j \{ \max_i \{ f_j(A_i) \} - f_j(A_i) \} \right\} \qquad (27)$$

Метод последовательных уступок (или пороговых значений):

$$\max_i \left\{ f_k(A_i) \right\}$$
$$f_j(A_i) \geq \max\{ f_j(A_i) \} - h_j$$
$$j = \overline{1,k-1};\ k = \overline{2,n}$$

где h_j – уступка по критерию $f_j(x)$, т. е. величина, на которую ЛПР согласен уменьшить значение данного критерия по сравнению с его максимальным значением.

Метод группировки критериев.

Суть метода заключается в том, что множество критериев, значения которых предварительно вычислены на некотором оптимальном по Парето плане x°, разбивается на три группы. Первая группа включает критерии, значения которых могут быть уменьшены по сравнению со значениями, вычисленными на плане x° Вторая группа состоит из критериев, значения которых желательно увеличить. Третья группа включает критерии, значения которых не хотелось бы уменьшать по сравнению с достигнутыми на плане x°. Далее отыскивается план уже в новой системе ограничений, который позволяет максимально увеличить значение критерия второй группы.

Так как критерии могут иметь различные масштабы и шкалы измерения, то прежде, чем приступить к решению многокритериальной задачи, их необходимо привести к одной единице измерения (обычно к безразмерному виду). Этот процесс называется нормализацией. Существуют различные методы нормализации. Предлагается следующий способ получения безразмерной формы критериев:

$$f_j^H(A_i) = \frac{f_j(A_i) - \min_i \left\{ f_j(A_i) \right\}}{\max_i \left\{ f_j(A_i) \right\} - \min_i \left\{ f_j(A_i) \right\}} \qquad (28)$$

где $j = \overline{1,n},\ \min_i \left\{ f_j(A_i) \right\} \neq \max_i \left\{ f_j(A_i) \right\}$

Рассмотрим следующую многокритериальную задачу планирования. Пусть фирма имеет возможность реализовывать свои товары на 4-х различных рынках (альтернативы A_1, A_2, A_3, A_4). При этом ставятся одновременно следующие цели: минимизация затрат на рекламу, завоевание максимальной доли рынка и максимальный объем продаж в течение планируемого периода. Исходные данные приведены в табл. 6.

Таблица 6.

Исходные данные многокритериальной задачи (пример)

Альтернативы, рынки	Цели (критерии)		
	затраты на рекламу, тыс.ден.ед., f_1	доля рынка, %, f_2	объем продаж, тыс.ден.ед., f_3
A_1	7	45	90
A_2	5	40	85
A_3	9	50	80
A_4	6	45	83

Значения критериев даны в различных единицах измерения, поэтому согласно формуле (28) приведем их к безразмерному виду:

$$f_1^0(A_1)=\frac{7-5}{9-5}=0,5,\ f_2^0(A_1)=\frac{45-40}{50-40}=0,5,\ f_3^0(A_1)=\frac{90-80}{90-80}=0,5$$

$$f_1^0(A_2)=0,\qquad f_2^0(A_2)=0,\qquad f_3^0(A_2)=0,5$$

$$f_1^0(A_3)=1,\qquad f_2^0(A_3)=1,\qquad f_3^0(A_3)=0$$

$$f_1^0(A_4)=0,25,\qquad f_2^0(A_4)=0,5,\qquad f_3^0(A_4)=0,3$$

Так как критерий f_1, минимизируется, то для того, чтобы все критерии стремились к максимуму, умножим безразмерные величины критерия f_1, на (-1) и сформируем табл. 7. Решим задачу несколькими методами.

Таблица 7.

Преобразованные исходные данные (пример)

Альтернативы	Цели (критерии)		
	f_1	f_2	f_3
A_1	-0,5	0,5	1
A_2	0	0	0,5
A_3	-1	1	0
A_4	-0,25	0,5	0,3

Метод равномерной оптимальности.

В соответствии с (23) имеем:

$$max\{-0,5+0,5+1;0,5;0;-0,25+0,5+0,3\}=max\{1;0,5;0;0,55\}=1$$

Таблица 8.

Альтернативы	Цели (критерии)			Критерий
	f_1	f_2	f_3	
A_1	-0,5	0,5	1	**-0,5+0,5+1=1**
A_2	0	0	0,5	0,5

A_3	-1	1	0	0
A_4	-0,25	0,5	0,3	-0,25+0,5+0,3=0,55

Следовательно, согласно принципу равномерной оптимальности предприятию выгоднее работать на рынке A_1.

Метод справедливого компромисса.

Чтобы воспользоваться данным методом, избавимся от отрицательности критерия $f1$, добавив константу, например 1. Тогда значения первого критерия будут равны:

$$f_1^H(A_1)=0,5;\ f_1^H(A_2)=1;\ f_1^H(A_3)=0;\ f_1^H(A_4)=0,75$$

На основании (24) имеем:

$$max\{0,5\times 0,5\times 1;1\times 0\times 0.5;0;0,75\times 0,5\times 0,3\}=max\{0,25;0;0;0,1125\}=0,25.$$

Таблица 9.

Альтернативы	**Цели (критерии)**			**Критерий**
	***f*1**	***f*2**	***f*3**	
A_1	-0,5+1=0,5	0,5	1	**0,5*0,5*1=0,25**
A_2	0+1=1	0	0,5	1*0*0,5=0
A_3	-1+1=0	1	0	0
A_4	-0,25+1=0,75	0,5	0,3	0,75*0,5*0,3=0,1125

Результат получился аналогичный предыдущему, а именно выгоднее работать на рынке A_1.

Метод свертывания критериев.

Сначала положим следующие значения весовых коэффициентов: $\alpha_1=0,2;\ \alpha_2=0,3;\ \alpha_3=0,5$.Тогда функции свертки в соответствии с (25) будут равны:

$$f_1=-0,5\times 0,2+0,5\times 0,3+1\times 0,5=0,55;$$
$$f_2=0\times 0,2+0\times 0,3+0,5\times 0,5=0,25;$$
$$f_3=-1\times 0,2+1\times 0,3+0\times 0,5=-0,2+0,3+0=0,1;$$
$$f_4=-0,25\times 0,2+0,5\times 0,3+0,3\times 0,5=0,25;$$
$$max\{0,55;0,25;0,1;0,25\}=0,55.$$

Таблица 10.

Альтернативы	**Цели (критерии)**			**Критерий** $\alpha_1=0,2;\ \alpha_2=0,3;\ \alpha_3=0,5$
	***f*1**	***f*2**	***f*3**	
A_1	-0,5	0,5	1	$\boldsymbol{-0,5*0,2+0,5*0,3+1*0,5=\ 0,55}$
A_2	0	0	0,5	$0*0,2+0*0,3+0,5*0,5=0,25$
A_3	-1	1	0	$-1*0,2+1*0,3+0*0,5=0,1$
A_4	-0,25	0,5	0,3	$-0,25*0,2+0,5*0,3+0,3*0,5=0,25$

При таком значении коэффициентов значимости критериев выгоднее работать на рынке A_1.

Если доложить $\alpha_1 = 0,1; \alpha_2 = 0,7; \alpha_3 = 0,2$, то получим:

$$f_1 = -0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,7 + 1 \times 0,2 = 0,5;$$
$$f_2 = 0 \times 0,1 + 0 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,1;$$
$$f_3 = -1 \times 0,1 + 1 \times 0,7 + 0 \times 0,2 = 0,6;$$
$$f_4 = -0,25 \times 0,1 + 0,5 \times 0,7 + 0,3 \times 0,2 = 0,385;$$
$$max\{0,5; 0,1; 0,6; 0,385\} = 0,6.$$

Таблица 11.

Альтернативы	**Цели (критерии)**			**Критерий** $\alpha_1 = 0,1; \alpha_2 = 0,7; \alpha_3 = 0,2$
	***f*1**	***f*2**	***f*3**	
A_1	-0,5	0,5	1	$-0,5 * 0,1 + 0,5 * 0,7 + 1 * 0,2 = 0,5$
A_2	0	0	0,5	$0 * 0,1 + 0 * 0,7 + 0,5 * 0,2 = 0,1$
A_3	-1	1	0	$\mathbf{-1 * 0,1 + 1 * 0,7 + 0 * 0,2 = 0,6}$
A_4	-0,25	0,5	0,3	$-0,25 * 0,1 + 0,5 * 0,7 + 0,3 * 0,2 = 0,385$

Таким образом, если приоритет отдается доле рынка ($\alpha_1 = 0,7$), то фирме имеет смысл работать на рынке A_3.

Если же фирма находится в затруднительном положении с точки зрения средств, выделяемых на рекламу, другими словами, для нее в данный момент самым важным является минимизация затрат на рекламу, то коэффициенты значимости могут быть, например, выбраны такие: $\alpha_1 = 0,8; \alpha_2 = 0,1; \alpha_3 = 0,1$; $max\ \{-0,25; 0,05; -0,7; -0,12\} = 0,05$.

Следовательно, в такой ситуации лучше всего работать на рынке A_2.

Если задать весовые коэффициенты $\alpha_1 = 0,3; \alpha_2 = 0,4; \alpha_3 = 0,3$, то

$$f_1 = -0,35; f_2 = 0,15; f_3 = 0,1; f_4 = 0,215;$$
$$max\ \{0,35;\ 0,15;\ 0,1;\ 0,215\}\ = 0,35.$$

При таких значениях весовых коэффициентов выгоднее работать на рынке A_1.

Приведем два последних варианта решений в следующей таблице:

Таблица 12.

Альтернативы	**Цели (критерии)**			**Критерий**	
				$\alpha_1 = 0,8; \alpha_2 = 0,1; \alpha_3 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,3; \alpha_2 = 0,4; \alpha_3 = 0,3$
	***f*1**	***f*2**	***f*3**		
A_1	-0,5	0,5	1	-0,25	**0,35**
A_2	0	0	0,5	**0,05**	0,15
A_3	-1	1	0	-0,7	0,1
A_4	-0,25	0,5	0,3	-0,12	0,215

Метод главного критерия.

Пусть главный критерий f_1 – затраты на рекламу, а остальные критерии выступают в роли ограничений, причем доля рынка должна быть не меньше 45%, а объем продаж не меньше 85 тыс.ден.ед. Тогда в соответствии с (26) минимальное значение главного критерия f_1 равно 5 тыс.ден.ед. и соответствует альтернативе A_2 однако с учетом ограничения на долю рынка следует выбрать альтернативу A_4, но так как еще требуется, чтобы объем продаж был не меньше 85 тыс.ден.ед., то наилучшей альтернативой в этом случае будет рынок A_1.

f_1-главный критерий, $f_2 \geq 45\%$, $f_3 \geq 85 \textit{тыс.ден.ед.}$

Таблица 13.

Альтернативы, рынки	**Цели (критерии)**		
	затраты на рекламу, тыс.ден.ед., f_1	**доля рынка, %, f_2**	**объем продаж, тыс.ден.ед., f_3**
A_1	7	45	**90**
A_2	**5=min**	40	85
A_3	9	50	80
A_4	6	**45**	83

Метод идеальной точки (критерий равномерного сжатия (27) соответствует принципу Сэвиджа). Определим сначала максимальные значения критериев. А именно $F_1^* = 0; F_2^* = 1; F_3^* = 1$. Матрица отклонений значений критериев от наилучших значений имеет вид:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 0,7 \end{array} \end{array}$$

Максимальные отклонения по каждой из 4-х альтернатив имеют следующие значения: 0,5; 1; 1; 0,7. Выберем минимальное из этих отклонений:

$$min\{0,5;\ 1;1;\ 0,7\} = 0,5.$$

Таблица 14.

	Цели (критерии)			**Отклонения от max**			**Max отклонения**
	f_1	f_2	f_3	$F_1^* - f_1$	$F_2^* - f_2$	$F_3^* - f_3$	
A_1	$-0,5$	$0,5$	$1 = F_3^*$	$0-(-0,5)=0,5$	$1-0,5=0,5$	$1-1=0$	$\mathbf{0,5=min}$
A_2	$0 = F_1^*$	0	$0,5$	0	$1-0=1$	$1-0,5=0,5$	1
A_3	-1	$1 = F_2^*$	0	$0-(-1)=1$	$1-1=0$	$1-0=1$	1
A_4	$-0,25$	$0,5$	$0,3$	$0-(-0,25)=0,25$	$1-0,5=0,5$	$1-0,3=0,7$	$0,7$

Минимальное значение 0,5 соответствует альтернативе A_1 следовательно, используя данный метод, получим решение, которое рекомендует фирме планировать работу на рынке A_1.

Вопрос 3. Принятие решений в условиях неопределенности.

Большинство задач планирования зависит от ряда неизвестных заранее и неуправляемых факторов. Эти задачи обладают той или иной степенью неопределенности, которая может быть как объективной, так и субъективной, зависящей от индивидуальных психофизических параметров ЛИР. В таких задачах неизвестно распределение вероятностей $p(Z_j)$, с которыми внешняя среда может находиться в одном из возможных состояний $Z_j, j=\overline{1,n}$. В этом случае ЛДР выдвигает только определенные гипотезы относительно состояний внешней среды.

Таким образом, для ЛПР, действующего в условиях неопределенности и невозможности получения дополнительной информации о неопределенных факторах, элементами описания ситуации планирования являются:

- множество допустимых стратегий (множество возможных альтернатив действий ЛПР) $A=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$;
- множество возможных состояний внешней среды (множество гипотез) $Z=\{Z_1,Z_2,\dots,Z_m\}$.

Предполагается, что на множестве отношений A x Z можно задать некоторую функцию полезности $f(A_i,Z_j)$, которая выступает в качестве меры желательности или полезности соответствующей альтернативы. Если множества A и Z конечны, то мера для оценки эффективности действий ЛПР (полезность исходов) представима в виде матрицы. Каждое конкретное значение элемента матрицы $e_{ij}=f(A_i,Z_j)$ (см. табл. 5) характеризует выбор i-й стратегии (альтернативы A_i) при состоянии внешней среды Z_j. Для выбора лучшей стратегии имеется ряд специальных методов, ориентированных на использование в условиях неопределенности, которые рассмотрены и проиллюстрированы ниже.

Критерий максимина (принцип гарантированного результата, или критерий Вальда). Данный принцип заключается в выборе в качестве оптимальной (наиболее эффективной) той альтернативы (стратегии), которая имеет наибольшее среди наименее благоприятных состояний внешней среды значение функции полезности. Таким образом, оптимальной, считается альтернатива A*, для которой выполняется соотношение:

$$e(A^*)=\max_i \min_j \{e_{ij}\} \qquad (29)$$

Здесь e_{ij} есть значение функции полезности при альтернативе $A_i, i=\overline{1,m}$ и состоянии внешней среды $Z_j, j=\overline{1,n}$. Найденная оптимальная альтернатива A* выбранная по критерию Вальда, обеспечивает гарантированный выигрыш (успех в достижении цели) при наихудшем для данной фирмы состоянии внешней среды.

Рассмотрим следующий пример. Исходная таблица решений характеризуется данными, привёденными в табл. 15.

Таблица 15.

Ожидаемые значения прибыли (тыс.ден.ед.) для трех товарных рынков

Возможные новые товарные рынки	Политическая обстановка			
	стабильная	стабильная	нестабильная	нестабильная
	Степень конкуренции			
	слабая, Z_1	сильная, Z_2	слабая, Z_3	сильная, Z_4
Рынок, A_1	530	460	240	220
Рынок, A_2	490	390	300	270
Рынок, A_3	575	420	260	190

Сначала для каждой альтернативы выбираем по соответствующей строке минимальное значение функции полезности, т.е.

$$min\{e_{1j}\} = min\{530, 460, 240, 220\} = 220;$$
$$min\{e_{2j}\} = min\{490, 390, 300, 270\} = 270;$$
$$min\{e_{3j}\} = min\{575, 420, 260, 190\} = 190.$$

Далее из полученных минимальных значений в соответствии с (29) выбирается максимальное:

$$max\{220, 270, 190\} = 270 \ (для\ i = 2).$$

Таблица 16.

Возможные новые товарные рынки	Политическая обстановка				Min по строке
	стабильная	стабильная	нестабильная	нестабильная	
	Степень конкуренции				
	слабая, Z_1	сильная, Z_2	слабая, Z_3	сильная, Z_4	
Рынок, A_1	530	460	240	220	220
Рынок, A_2	490	390	300	270	**270=max**
Рынок, A_3	575	420	260	190	190

Следовательно, оптимальной по критерию максимина является альтернатива A_2, т.е. фирме целесообразно выходить со своим товаром на рынок A_2. Это самая осторожная стратегия, так как при любом состоянии внешней среды фирма получит прибыль не менее 270 тыс.ден.ед.

Критерий максимакса (принцип безудержного оптимизма). Если критерий максимина ориентирован на получение гарантированного минимума желаемого результата (правило «лучший» из «худших”), то критерий оптимизма предполагает возможность получения максимального уровня желательности результата. Эта альтернатива A* выбирается исходя из выражения

$$e(A^*) = \max_i \max_j \{e_{ij}\} \qquad (30)$$

Рассматривая исходные данные (табл. 15) с точки зрения принципа оптимизма (30), получим:

$$max\{e_{1j}\} = max\{530, 460, 240, 220\} = 530;$$

$$max\{e_{2j}\} = max\{490, 390, 300, 270\} = 490;$$

$$max\{e_{3j}\} = max\{575, 420, 260, 190\} = 575;$$

$$max\{530, 490, 575\} = 575 \ (для\ i = 3).$$

Таким образом, оптимальной по критерию оптимизма будет альтернатива A_3, для которой справедливо соотношение:

$$e(A^*) = e(A_3) = max\ max\ e_{ij} = 575.$$

Таблица 17.

Возможные новые товарные рынки	**Политическая обстановка**				**Max по строке**
	стабильная	**стабильная**	**нестабильная**	**нестабильная**	
	Степень конкуренции				
	слабая, Z_1	**сильная, Z_2**	**слабая, Z_3**	**сильная, Z_4**	
Рынок, A_1	530	460	240	220	530
Рынок, A_2	490	390	300	270	490
Рынок, A_3	575	420	260	190	**575=max**

Критерий Гурвица. Данный критерий представляет собой комбинацию принципа гарантированного результата и принципа оптимизма. Функция, описывающая критерий Гурвица, представляется в виде:

$$e(A^*) = \alpha e_1(A) + (1-\alpha)e_2(A) \qquad (31)$$

где $e_1(A)$ – стратегия выбора альтернативы, характеризующая принцип гарантированного результата, а $e_2(A)$ – принципа оптимизма; $\alpha, \alpha \in [0,1]$ – весовой коэффициент.

Так как

$$e_1(A) = \max_i \min_j, \quad e i_j, e_2(A) = \max_i \max_j \{e_{ij}\},$$

то общее выражение для принципа Гурвица на основании (31) будет иметь следующий вид:

$$e(A^*) = \alpha \max_i \min_j \{e_{ij}\} + (1-\alpha) \max_i \max_j \{e_{ij}\}$$

или

$$e(A^*) = \max_i \left[\alpha \min_j \{e_{ij}\} + (1-\alpha) \max_j \{e_{ij}\} \right]$$

Здесь используются две гипотезы: первая – среда находится с вероятностью a в самом невыгодном состоянии и вторая – среда находится с вероятностью $(1-\alpha)$ в самом выгодном состоянии.

В зависимости от значения весового коэффициента α можно получить различные предпочтительные альтернативы. Причем если $\alpha = 0$, то имеем принцип оптимизма, если $\alpha = 1$, то получим принцип гарантированного результата.

Используя этот критерий, обратимся опять к нашим данным (табл. 15). Пусть весовой коэффициент, характеризующий степень важности соответствующей альтернативы, равен 0,7. Тогда получим:

$$e(Ai) = 0{,}7 \min_j \{e_{ij}\} + (1 - 0{,}7) \max_j \{e_{ij}\},\ i = 1,2,3 \qquad (32)$$

Подставляя значения из табл. 15 в выражение (6.10), имеем:

$$e(A_1) = 0{,}7 \times 220 + 0{,}3 \times 530 = 154 + 159 = 313;$$
$$e(A_2) = 0{,}7 \times 270 + 0{,}3 \times 490 = 189 + 147 = 336;$$
$$e(A_3) = 0{,}7 \times 190 + 0{,}3 \times 575 = 133 + 172{,}5 = 305{,}5.$$

Далее производим выбор на основе следующей стратегии:

$$e(A^*) = \max_i \left[e(A_1), e(A_2), e(A_3)\right],$$

Подставляя вычисленные ранее значения, получим:

$$e(A^*) = max\left[313;\ 336;\ 305{,}5\right] = 336\ (для\ i = 2).$$

Таким образом, оптимальной по принципу Гурвица при коэффициенте $\alpha = 0{,}7$ будет альтернатива A_2.

Приведем решение данным методом в следующей таблице:

Таблица 18.

Возможные новые рынки $\alpha = 0{,}7$	**Политическая обстановка**				**Критерий e(A) по строкам**
	стабильная	**стабильная**	**нестабил.**	**нестабил.**	
	Степень конкуренции				
	слабая, Z_1	**сильная,** Z_2	**слабая,** Z_3	**сильная,** Z_4	
Рынок, A_1	530=max(A_1)	460	240	220=min(A_1)	$0{,}7 * 220 + 0{,}3 * 530 = 313$
Рынок, A_2	490=max(A_2)	390	300	270=min(A_2)	$\mathbf{0{,}7 * 270 + 0{,}3 * 490 = 336 = max}$
Рынок, A_3	575=max(A_3)	420	260	190=min(A_3)	$0{,}7 * 190 + 0{,}3 * 575 = 305{,}5$

Если же весовой коэффициент равен 0,2 то решение изменится следующим образом:

$$e(A_1) = 0.2 \times 220 + 0{,}8 \times 530 = 44 + 424 = 468;$$
$$e(A_2) = 0{,}2 \times 270 + 0{,}8 \times 490 = 54 + 393 = 446;$$
$$e(A_3) = 0{,}2 \times 190 + 0{,}8 \times 575 = 38 + 460 = 498;$$
$$e\ (A^*) = max\left[468{,}446{,}498\right] = 498\ (i = 3).$$

Оптимальной стратегией в этом случае будет работа фирмы на рынке A_3.

Приведем решение в виде таблицы:

Таблица 19.

Возможные новые рынки $\alpha=0,2$	**Политическая обстановка**				**Критерий e(A) по строкам**
	стабильная	**стабильная**	**нестабил.**	**нестабил.**	
	Степень конкуренции				
	слабая,Z_1	**сильная,Z_2**	**слабая,Z_3**	**сильная,Z_4**	
Рынок, A_1	530=max(A_1)	460	240	220=min(A_1)	$0,2*220+0,8*530=468$
Рынок, A_2	490=max(A_2)	390	300	270=min(A_2)	$0,2*270+0,8*490=446$
Рынок, A_3	575=max(A_3)	420	260	190=min(A_3)	$\boldsymbol{0,2*190+0,8*575=498=max}$

Наконец, если положить $\alpha=0,5$, то получим следующее решение:

$$e(A_1)=375; e(A_2)=380; e(A_3)=382,5,$$
$$e(A^*)=max[375,380,382,5]=382,5(i=3).$$

И в этом случае оптимальной стратегией будет работа на рынке A3.

Приведем решение в виде таблицы:

Таблица 20.

Возможные новые рынки $\alpha=0,5$	**Политическая обстановка**				**Критерий e(A) по строкам**
	стабильная	**стабильная**	**нестабил.**	**нестабил.**	
	Степень конкуренции				
	слабая,Z_1	**сильная,Z_2**	**слабая,Z_3**	**сильная,Z_4**	
Рынок, A_1	530=max(A_1)	460	240	220=min(A_1)	$0,5*220+0,5*530=375$
Рынок, A_2	490=max(A_2)	390	300	270=min(A_2)	$0,5*270+0,5*490=380$
Рынок, A_3	575=max(A_3)	420	260	190=min(A_3)	$\boldsymbol{0,5*190+0,5*575=382,5=max}$

Заметим, что если фирма желает, например, **работать на всех трех рынках**, то, используя принцип Гурвица, можно принять следующее решение по распределению долей продукции (долей объемов продаж) между рынками, применив формулу:

$$d_i=\frac{e(A_i)}{\sum_{i=1}^{3}e(A_i)}$$

где d_i. – доля товара в натуральном или денежном выражении, реализуемого на рынке A_i, $i=1,2,3$.

В общем случае процентное соотношение распределения товара по рынкам с использованием критерия Гурвица может быть вычислено по аналогичной формуле:

$$D_i=\frac{e(A_i)}{\sum_{i=1}^{m}e(A_i)}\times 100\% \qquad (33)$$

где D_i – доля товара, реализуемого на рынке A_i, выраженная в процентах; m – количество рассматриваемых рынков.

В нашем примере при $\alpha = 0,5$, если рассматривать все три рынка, то, используя формулу (33), получим следующее процентное распределение товара между рынками:

$$D_1 = \frac{375 \times 100}{375 + 380 + 382,5} = 32,96\% \quad (доля\ рынка\ A_1);$$

$$D_2 = \frac{380 \times 100}{1137,5} = 33,41\% \quad (доля\ рынка\ A_2);$$

$$D_3 = \frac{382,5 \times 100}{1137,5} = 33,63\% \quad (доля\ рынка\ A_3);$$

Однако представляется более рациональным распределить товар между рынками A_2 и A_3, так как рынок A_2 должен быть выбран согласно принципу гарантированного результата, а рынок A_3 – согласно принципу оптимизма, причем изменение весового коэффициента в принципе Гурвица приводит к тем же альтернативам A_2 и A_3. Поэтому, используя формулу (33) для двух рынков и $\alpha = 0,5$, получим следующее процентное распределение товара между ними:

$$D_1 = \frac{380}{380 + 382,5} \times 100 = 49,84\% \quad (\text{доля рынка } A_2);$$

$$D_2 = \frac{382,5}{380 + 382,5} \times 100 = 50,16\% \quad (\text{доля рынка } A_3).$$

Вообще говоря, здесь мы имеем пропорциональное распределение рисков. Данный подход может быть использован в практических расчетах.

Критерий минимаксного сожаления (принцип Сэвиджа). Стратегия выбора по принципу Сэвиджа характеризует те потенциальные потери, которые фирма будет иметь, если выберет неоптимальное решение. Детализированная процедура выбора в этом случае производится в три этапа.

1. Для каждого состояния внешней среды по конкретной альтернативе определяется максимальное значение функции полезности:

$$\max_i\{e_{ij}\} = \max_i\{e_{ij} \mid Z_j\}, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \qquad (34)$$

Это есть, возможно, наилучший уровень полезности, который можно получить для конкретного состояния внешней среды Z_j.

2. На основании значений, вычисленных по формуле (6.12), для каждой альтернативы строится показатель:

$$\varpi(e_i) \mid Z_j = \varpi(e_{ij}) = \max_i\{e_{ij}\} - e_{ij},\ j = \overline{1,n} \qquad (35)$$

Данный показатель характеризует потенциальный риск, а точнее потерянную выгоду от выбора неоптимальной альтернативы. В результате этого действия формируется матрица потенциальных потерь.

3. Используя полученную на предыдущем этапе матрицу потерь (или, как еще говорят, матрицу сожалений), производится выбор стратегии с наименьшим показателем риска:

$$e(A^*) = \min_i \max_j \{\varpi(e_{ij})\} \quad (36)$$

Данный критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние внешней среды наихудшим образом отличается от предполагаемого. Рассмотрим применение принципа Сэвиджа на исходных данных (табл. 15) в соответствии с описанной выше процедурой.

1. Для значений функции полезности по каждому состоянию внешней среды Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 на основании (34) определим максимальный уровень полезности:

$$max\left\{e_{i1}\right\} = max\left\{530; 490; 575\right\} = 575; max\left\{e_{i2}\right\} = max\left\{460; 390; 420\right\} = 460;$$
$$max\left\{e_{i3}\right\} = max\left\{240; 300; 260\right\} = 300; max\left\{e_{i4}\right\} = max\left\{220; 270; 190\right\} = 270.$$

Таблица 21.

Возможные новые товарные рынки	**Политическая обстановка**			
	стабильная	**стабильная**	**нестабильная**	**нестабильная**
	Степень конкуренции			
	слабая, Z_1	**сильная, Z_2**	**слабая, Z_3**	**сильная, Z_4**
Рынок, A_1	530	460=max(Z2)	240	220
Рынок, A_2	490	390	300=max(Z3)	270=max(Z4)
Рынок, A_3	575=max(Z_1)	420	260	190

2. Вычислим элементы матрицы потенциальных потерь согласно формуле (35):

$$w(e_{11}) = 575 - 530 = 45; w(e_{13}) = 300 - 240 = 60;$$
$$w(e_{21}) = 575 - 490 = 85; w(e_{23}) = 300 - 300 = 0;$$
$$w(e_{31}) = 575 - 575 = 0; w(e_{33}) = 300 - 260 = 40;$$
$$w(e_{12}) = 460 - 460 = 0; w(e_{14}) = 270 - 220 = 50;$$
$$w(e_{22}) = 460 - 390 = 70; w(e_{24}) = 270 - 270 = 0;$$
$$w(e_{32}) = 460 - 420 = 40; w(e_{34}) = 270 - 190 = 80.$$

Таким образом, матрица потерь будет иметь следующий вид (табл. 22).

Таблица 22.

Матрица потенциальных потерь

Альтернативы	**Состояния внешней среды**			
	Z_1	***Z_2***	***Z_3***	***Z_4***
A_1	575-530=45	460-460=0	300-240=60	270-220=50
A_2	575-490=85	70	0	0
A_3	575-575=0	40	40	80

3. На основании матрицы потерь (табл. 22) можно определить максимальные потери по каждой альтернативе. Для этого применим правило:

$$\varpi(A_i) = \max_j \left[\max_i \{ e_{ij} \} - e_{ij} \right],$$

Для каждого $i = 1,2,3$ определим:

$$w(A_1) = max\left[45;0;60;50\right] = 60;$$
$$w\left(A_2\right) = max\left[85;70;0;0\right] = 85;$$
$$w\left(A_3\right) = max\left[0;40;40;80\right] = 80.$$

Таблица 23.

Альтернативы	**Состояния внешней среды**			
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
$\mathbf{A_1}$	45	0	**60=max(A1)=min(max)**	50
A_2	85=max(A_2)	70	0	0
A_3	0	40	40	80=max(A3)

Оптимальной будет та альтернатива, которая имеет минимальные потери согласно выражению (36):

$$\varpi(A^*) = \min_i \max_j \left[\max_i \{e_{ij}\} - e_{ij} \right], \quad т.е.$$
$$w(A^*) = min\left\{60;85;80\right\} = 60.$$

Следовательно, оптимальна альтернатива A_1 имеющая минимальные потери выгоды.

Критерий Лапласа. Данный критерий применяется, если состояния внешней среды неизвестны, но их можно считать равновероятными, т. е.

$$p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$$

Решающее правило в этом случае имеет следующий вид:

$$e(A^*) = max\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \}$$

В рассматриваемом примере:

$$e(A^*) = max\left\{\left(530 + 460 + 240 + 220\right) / 4; \left(490 + 390 + 300 + 270\right) / 4; \left(575 + 420 + 260 + 190\right) / 4\right\} =$$
$$= max\left\{362,5; 362,5; 361,25\right\} = 362,5.$$

Следовательно, с точки зрения критерия Лапласа можно выбрать как рынок A_1, так и рынок A_2.

Таблица 24.

	Политическая обстановка				Критерий e(A) по строкам
	стабильная	стаб.	нестаб.	нестаб.	
	Степень конкуренции				
	слабая, Z_1	сильная, Z_2	слабая, Z_3	сильная, Z_4	
A_1	530	460	240	220	$(530+460+240+220)/ / 4 = 362{,}5 = max$
A_2	490	390	300	270	$(490+390+300+270)/ / 4 = 362{,}5$
A_3	575	420	260	190	$(575+420+260+190)/ / 4 = 361{,}25 = max$

Сделаем несколько практических рекомендаций по применению рассмотренных выше критериев (принципов).

1. Критерий Вальда лучше всего использовать тогда, когда фирма желает свести риск от принятого решения к минимуму.

2. Коэффициент в критерии Гурвица выбирается из субъективных соображений: чем опаснее ситуация, тем больше ЛПР желает подстраховаться.

3. Критерий Сэвиджа удобен, если для предприятия приемлем некоторый риск.

4. Критерий Лапласа может быть применен, когда ЛПР не может предпочесть ни одной гипотезы.

Вопрос 4. Методы планирования в условиях риска.

Когда выбор планового решения осуществляется в условиях риска, известны или задаются субъективные вероятности возможных состояний внешней среды. При этом постановка задачи будет следующей:

а) имеется множество альтернатив $A = \{ A_1, A_2, \ldots, A_m \}$ и множество состояний внешней среды $Z = \{ Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \}$;

б) известны субъективные вероятности состояния среды

$(p(Z_1), p(Z_2), \ldots, p(Z_n)) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, причем $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$

в) для каждого сочетания альтернативного решения A_i и состояния Z_j задана функциональная полезность e_{ij}.

Существующие методы выбора базируются в основном на использовании вероятностных мер в качестве критериев выбора. В теории статистических решений обычно используются принцип Байеса. принцип Бернулли и принцип энтропии математического ожидания функции полезности.

Принцип Байеса. В качестве критерия выбора стратегии (альтернативы) A_i применяются взвешенные по вероятности суммы полезностей, т. е.

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (e_{ij} \times p_j), i = \overline{1,m} \qquad (37)$$

Оптимальным считается решение A*, для которого значение критерия e_i будет максимальным или минимальным в зависимости от постановки задачи:

$$e(A^*) = max\{e_i\} = max\{\sum_{j=1}^{n}(e_{ij} \times p_j)\} \quad (38)$$

или

$$e(A^*) = min\{e_i\} = min\{\sum_{j=1}^{n}(e_{ij} \times p_j)\}$$

Если в примере (табл. 15) задать вероятности $p_1 = 0,4;\, p_2 = 0,2;\, p_3 = 0,1;\, p_4 = 0,3,$ то на основе (6.15) и (6.16) получим:

$$e1 = 530 \times 0,4 + 460 \times 0,2 + 240 \times 0,1 + 220 \times 0,3 = 394;$$
$$e2 = 490 \times ,4 + 390 \times 0,2 + 300 \times 0,1 + 270 \times 0,3 = 385;$$
$$e3 = 575 \times 0,4 + 420 \times 0,2 + 260 \times 0,1 + 190 \times 0,3 = 397;$$
$$max\{394, 385, 397\} = 397(\text{для } i = 3).$$

Следовательно, оптимальной является альтернатива A3.

Таблица 25.

Новые рынки	**Политическая обстановка**				**Значение критерия е по строкам**
	стабильная	**стаб.**	**нестаб.**	**нестаб.**	
	Степень конкуренции				
	слабая,Z_1	**сильная,Z_2**	**слабая,Z_3**	**сильная,Z_4**	
A_1	530	460	240	220	530*0,4+460*0,2+ 240*0,1+220*0,3=394
A_2	490	390	300	270	385
A_3	575	420	260	190	**397=max**
Вероят-ть, p_j	0,4	0,2	0,1	0,3	

Иногда каждому решению A1, ставят в соответствие не значение функции полезности e_{ij}, а величину потерь $w_{ij} = |e_{ij} - max\{e_{ij}\}|$, которая характеризует упущенные возможности. Тогда

$$e(A^{opt}) = min\{\sum_{j=1}^{n}(p_j \times \varpi_{ij})\} \qquad (39)$$

Используя матрицу потенциальных потерь, вычислим с учетом вероятностей наступления тех или иных состояний среды общие потери:

$$w_1 = 0,4 \times 45 + 0 + 0,1 \times 60 + 0,3 \times 50 = 39;$$
$$w_2 = 0,4 \times 85 + 0,2 \times 70 + 0 + 0 = 48;$$
$$w_3 = 0 + 0,2 \times 40 + 0,1 \times 40 + 0,3 \times 80 = 36.$$

На основе формулы (39) имеем:

$$min\{w_1, w_2, w_3\} = min\{39; 48; 36\} = 36 (для\ i = 3).$$

Оптимальной альтернативой является A_3.

Таблица 26.

Альтернативы	**Состояния внешней среды**				**Критерии w по строкам**
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	
A_1	45	0	60	50	45*0,4+0*0,2+60*0,1+50*0,3=39
A_2	85	70	0	0	48
$\mathbf{A_3}$	0	40	40	80	**36=min**
Вероят-ть, p_j	0,4	0,2	0,1	0,3	

Принцип Бернулли. При использовании данного принципа исходят из того, что известна некоторая функция полезности u(e). Эта субъективная функция полезности Бернулли ставит в соответствие каждому возможному вероятностному значению альтернативы определенную величину полезности. Для каждой альтернативы можно определить ожидаемое значение полезности ее вероятностного результата. Оптимальной считается альтернатива с наибольшим ожидаемым значением полезности, т. е. оптимальной стратегии A^{opt} соответствует

$$max\{\sum_{j=1}^{n}(u_{ij} \times p_j)\}$$

Вид функции полезности Бернулли зависит от отношения ЛПР к риску. Принципиальный вид функции полезности:

а) при нейтральном (безразличном) отношении к риску;

б) при существенном учете риска;

в) при малой значимости риска представлен на рис. 17.

Здесь следует заметить, что на различных интервалах изменения аргумента функция полезности может иметь различный вид с точки зрения отношения к риску.

Рассмотрим принцип Бернулли применительно к задаче, исходные данные которой представлены в табл. 15, а вероятности состояния внешней среды такие же, как и в примере, иллюстрирующем принцип Байеса, а именно p_1= 0.4; p_2= 0,2; p_3=0,1; p_4=0,3.

В результате проведенных расчетов функция полезности Бернулли имеет следующий вид:

$$0 \le e \le 400 \Rightarrow u(e) = 0,4e;$$

$$400 \le e \le 600 \Rightarrow u(e) = -e^2 / 1280 + 1,2e - 195.$$

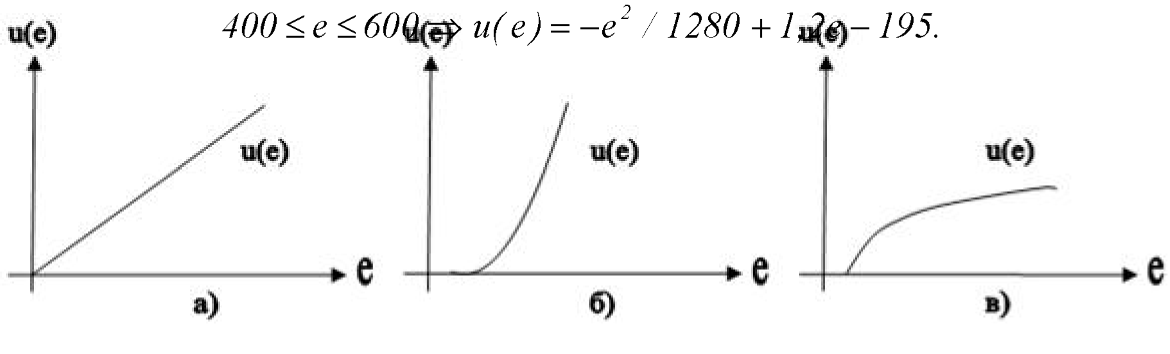

Рис. 17. Вид функции полезности Бернулли при различных точках зрения на риск

График данной функции изображен на рис. 18. Результаты определения оптимальной альтернативы (нового целевого рынка) по принципу Бернулли помещены в табл. 27.

Таблица 27.

Значения функции полезности Бернулли

Альтернативы	**Состояния внешней среды**				**Ожидаемые значения полезности**
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	
A_1	222	192	96	88	163,2
A_2	205	156	120	108	157,6
A_3	237	171	104	76	162,2=max(A)
Вероятность, p_j	0,4	0,2	0,1	0,3	

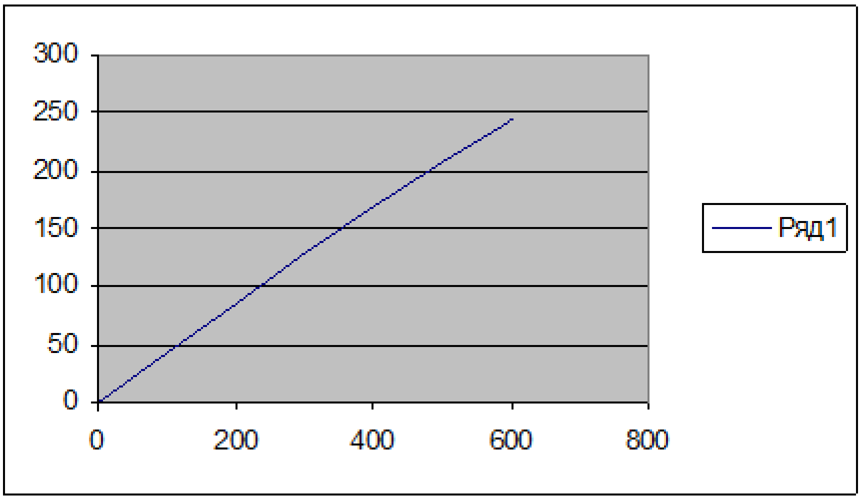

Рис. 18. Функция полезности Бернулли u(e)

$$max\{163,2;157,6;162,2\} = 163,2(\text{для } i = 1).$$

Согласно принципу Бернулли, оптимальной стратегией будет A_1.

Замечание. Рассмотренные выше методы представляют собой индивидуальный выбор альтернатив, т.е. когда решение принимает одно лицо или несколько лиц, имеющих единое мнение. Однако могут быть применены и методы группового выбора.

Литература.

Основная литература:

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2008. – 392 с.

2. Литвак Б.Г. Управленческие решения. – М.: Дело, 2008. – 254 с.

3. Смирнов Э.А. Разработка управленческих решений. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 272 с.

4. Фатхутдинов Р.А. Разработка управленческого решения: Учеб. пособ. – М.: Бизнес-школа, Интел-Синтез, 2007. – 272 с.

Дополнительная литература:

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, принятие решений в экономике – М.: Финансы и статистика, 2007. – 368с.
2. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений: Научно-практическое издание. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.
3. Варфоломеев В.И., Воробьев С.Н. Принятие управленческих решений: Учеб пособие для вузов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2007. – 288 с.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 656 с.
5. Ашихмин А.А. Разработка и принятие управленческих решений: формальные модели и методы выбора. – М.: МГТУ, 2005.
6. Вентцель Е.С. Исследование операция. – М.: Советское радио, 1972.
7. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
8. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982/
9. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.
10. Лапшин К.А., Светлов Н.М. Прогграммный комплекс «Линейная оптимизация» – методические указания для студентов экономического факультета. – М.: МСХА, 1994.
11. Лесик, А. И., Чистяков, Ю. Е. Теоретико-игровые модели взаимодействия экономических субъектов производственной системы. – М. : ВЦ РАН, 1994.
12. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.
13. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
14. Платов В.Я. Деловые игры: разработка, организация, проведение. – М.: Профиздат, 1991.
15. Сысоев, В. В. Теоретико-игровые модели принятия решений многоцелевого управления в задачах выбора и распределения ресурсов / Воронеж : Воронеж. гос. технол. акад., 2000.
16. Giblons R. Game theory for applied economists. Princeton University press, Princeton, New Gersey, 1992.

Вопросы для самопроверки:

1. Какими условиями характеризуется среда принятия решений?
2. В чем особенность информационных ограничений процесса принятия решений?
3. Что можно отнести к внешним факторам, оказывающим влияние на процесс принятия решений?
4. Что можно отнести к внутренним факторам, оказывающим влияние на процесс принятия решений?
5. Расчетом какого показателя отличается неопределенность и риск?

Тема 3. Теория игр

Цели и задачи.

Цель изучения данной темы – получение общетеоретических знаний о теории игр.

Задачи изучения данной темы:

- Изучение классификации игр.
- Изучение особенностей решения матричных игр в чистых стратегиях.
- Изучение смешанных стратегий в матричных играх.
- Изучение критериев принятия решений в статистических играх.

Вопросы темы:

1. Решение матричных игр в чистых стратегиях.
2. Смешанные стратегии в матричных играх.
3. Принятие решений в условиях неопределенности.

Вопрос 1. Решение матричных игр в чистых стратегиях.

Определение. «Игра (в математике) – это идеализированная математическая модель коллективного поведения: несколько игроков влияют на исход игры, причем их интересы различны». [7].

Регулярное действие, выполняемое игроком во время игры, называется ходом. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется стратегией.

Классификация игр.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д. [2,7,8].

В зависимости от количества игроков различают игры двух и *n* игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Запись матричной игры в виде платёжной матрицы.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей [1, 2, 7] (рис. 19.),

	B 1	B 2	...	B n
A 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
A 2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...	...	...	...	...
Am	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 19. Общий вид платёжной матрицы матричной игры

где A_i – названия стратегий игрока 1, B_j – названия стратегий игрока 2, a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 при выборе им i – й стратегии, а игроком 2 – j – й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для игрока 2 является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша игрока 1.

Понятие о нижней и верхней цене игры. Решение игры в чистых стратегиях.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока 1 необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину

$$V_н = max_i \, min_j \, a_{ij},$$

или найти минимальные значения по каждой из строк платёжной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина $V_н$ называется <u>максимином</u> матрицы или <u>нижней ценой игры</u>.

Величина выигрыша игрока 1 равна, по определению матричной игры, величине проигрыша игрока 2. Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$V_в = min_j \, max_i \, a_{ij}$$

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина V_B называется <u>минимаксом</u> матрицы или <u>верхней ценой игры</u>.

В случае, если значения $V_н$ и $V_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V_н = V_в = V$. В этом случае говорят, что игра имеет <u>решение в чистых стратегиях</u>, а стратегии, в которых достигается V – <u>оптимальными чистыми стратегиями</u>. Величина V называется <u>чистой ценой игры</u>. [8].

Например, в матрице (рис. 20)

	B 1	B 2	B 3	B 4	Min$_j$
A 1	7	6	5	4	4
A 2	1	8	2	3	1
A 3	8	1	3	2	1
Max$_i$	8	8	5	4	

Рис. 20. Платёжная матрица, в которой существует решение в чистых стратегиях

существует решение в чистых стратегиях. При этом для игрока 1 оптимальной чистой стратегией будет стратегия A1, а для игрока 2 – стратегия B4.

В матрице (рис. 21)

	B 1	B 2	B 3	B 4	Min$_j$
A 1	7	6	5	2	2
A 2	1	8	2	3	1
A 3	8	1	3	2	1
Max$_i$	8	8	5	3	

Рис. 21. Платёжная матрица, в которой не существует решения в чистых стратегиях

решения в чистых стратегиях не существует, так как нижняя цена игры достигается в стратегии A1 и её значение равно 2, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B4 и её значение равно 3.

Уменьшение порядка платёжной матрицы.

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий.

Стратегия K* называется доминируемой стратегией K**, если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняется соотношение

$$A_{k^*} < A_{k^{**}},$$

где A_k* и A_k** – значения выигрышей при выборе игроком, соответственно, стратегий K* и K**.

В случае, если выполняется соотношение

$$A_{k^*} = A_{k^{**}},$$

стратегия K* называется дублирующей по отношению к стратегии K**.

Например, в матрице

	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6
A 1	1	2	3	4	4	7
A 2	7	6	5	4	4	8
A 3	1	8	2	3	3	6
A 4	8	1	3	2	2	5

Рис. 22. Платёжная матрица с доминируемыми и дублирующими стратегиями

Стратегия А1 является доминируемой по отношению к стратегии А2, стратегия В6 является доминируемой по отношению к стратегиям В3, В4 и В5, а стратегия В5 является дублирующей по отношению к стратегии В4. Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето (по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, занимавшегося исследованиями в данной области)

Пример решения матричной игры в чистых стратегиях.

Рассмотрим пример решения матричной игры в чистых стратегиях, в условиях реальной экономики, в ситуации борьбы двух предприятий за рынок продукции региона.

Задача.

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции.

Таблица 28.

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.)

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1.5	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 6 - 0.5X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в таблице 29.

Таблица 29.

Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс. ед.
Предприятие 1	Предприятие 2		
10	10	10	1

10	6	8	2
10	2	6	3
6	10	8	2
6	6	6	3
6	2	4	4
2	10	6	3
2	6	4	4
2	2	2	5

Значения Долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены.

Таблица 30.

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	**Предприятие 2**	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,92
2	6	0,85
2	2	0,72

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение задачи.

1. Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платёжной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но кроме того, в данном случае предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом выигрыш одного предприятия означает проигрыш другого. Такая задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом коэффициентами выигрышей будут значения разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В

случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна – предприятие 2.

2. Рассчитаем коэффициенты выигрышей платёжной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. Прибыль предприятия в данной задаче зависит:

- от цены и себестоимости продукции;
- от количества продукции, приобретаемой населением региона;
- от доли продукции, приобретённой населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платёжной матрицы, необходимо определить по формуле (40):

$$D = p \times (S \times R1 - S \times C1) - (1 - p) \times (S \times R2 - S \times C2) \quad (40),$$

где D – значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия 2;

p – доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S – количество продукции, приобретаемой населением региона;

R1 и R2 – цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

C1 и C2 – полная себестоимость единицы продукции, произведённой на предприятиях 1 и 2.

Вычислим один из коэффициентов платёжной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией III, а предприятие 2 – в соответствии с технологией II. Тогда цена реализации единицы. продукции для предприятия 1 составит 2 д.е. при себестоимости единицы. продукции 1,5 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы. продукции составит 6 д.е. при себестоимости 4 д.е. (табл. 28).

Количество продукции, которое население региона приобретёт при средней цене 4 д.е., равно 4 тыс. ед. (таблица 29). Доля продукции, которую население приобретёт у предприятия 1, составит 0,85, а у предприятия $2 - 0,15$ (табл. 30). Вычислим коэффициент платёжной матрицы a_{32} по формуле (40):

$$a_{32} = 0,85 \times (4 \times 2 - 4 \times 1,5) - 0,15 \times (4 \times 6 - 4 \times 4) = 0,5 \text{ тыс. ед.}$$

где i=3 – номер технологии первого предприятия, а j=2 – номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислим все коэффициенты платёжной матрицы. В платёжной матрице стратегии A1 – A3 – представляют собой решения о технологиях производства продукции предприятием 1, стратегии B1 – B3 – решения о технологиях производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей – разницу прибыли предприятия 1 и предприятия 2.

	B1	B2	B3	Min_j
A1	0,17	0,62	0,24	0.17
A2	3	-1,5	-0,8	-1.5
A3	0,9	0,5	0,4	0.4
Max_i	3	0.62	0.4	

Рис. 23. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона».

В данной матрице нет ни доминируемых, ни дублирующих стратегий. Это значит, что для обоих предприятий нет заведомо невыгодных технологий производства продукции. Определим минимальные элементы строк матрицы. Для предприятия 1 каждый из этих элементов имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Минимальные элементы матрицы по строкам имеют значения: 0,17, -1,5, 0,4.

Определим максимальные элементы столбцов матрицы. Для предприятия 2 каждый из этих элементов также имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Максимальные элементы матрицы по столбцам имеют значения: 3, 0,62, 0,4.

Нижняя цена игры в матрице равна 0,4. Верхняя цена игры также равна 0,4. Таким образом, нижняя и верхняя цена игры в матрице совпадают. Это значит, что имеется технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий в условиях данной задачи. Эта технология III, которая соответствует стратегиям А3 предприятия 1 и В3 предприятия 2. Стратегии А3 и В3 – чистые оптимальные стратегии в данной задаче.

Значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 при выборе чистой оптимальной стратегии положительно. Это означает, что предприятие 1 выиграет в данной игре. Выигрыш предприятия 1 составит 0,4 тыс. д.е. При этом на рынке будет реализовано 5 тыс. ед. продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 29).. Оба предприятия установят цену за единицу продукции в 2 д.е. При этом для первого предприятия полная себестоимость единицы продукции составит 1,5 д.е., а для второго – 1 д.е (таблица 28). Предприятие 1 окажется в выигрыше лишь за счёт высокой доли продукции, которую приобретёт у него население.

Вопрос 2. Смешанные стратегии в матричных играх

Понятие о матричных играх со смешанным расширением.

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её чистой цены. Если матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, то нахождением чистой цены заканчивается исследование игры. Если же в игре нет решения в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Определение. Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий, называется игрой со смешанным расширением.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются активными стратегиями.

Доказано [1,2,4,7,8,11], что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$V_н \le V \le V_в.$$

При этом условии величина V называется ценой игры.

Кроме того, доказано, что, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры V, независимо от того, каких стратегий придерживается другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий. Поэтому, для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Решение матричных игр со смешанным расширением методами линейного программирования.

Решение матричной игры со смешанным расширением – это определение оптимальных смешанных стратегий, то есть нахождение таких значений вероятностей выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых они достигают наибольшего выигрыша.

Для матричной игры, платёжная матрица которой показана на рис. 19, $V_н \neq V_в$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 ($p_1, p_2, \ldots, p_m$) и для игрока 2 ($q_1, q_2, \ldots, q_n$), при которых игроки достигали бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры V. Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

Для первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq V \\ \ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq V \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \\ p_1 \geq 0 :\ p_2 \geq 0 \ldots\ p_m \geq 0 \end{cases}$$

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq V \\ \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq V \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1 \\ q_1 \geq 0 : q_2 \geq 0 \ldots q_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 / v \\ x_1 \geq 0 : x_2 \geq 0 \ldots x_m \geq 0 \end{cases}$$

Чтобы определить значение V, разделим обе части каждого из уравнений на V. Величину p_i / V обозначим через x_i, а q_j / V – через y_j.

Для игрока 1 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $1 / v$:

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры (V). Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$min\ Z = min\ 1/V = min(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

Для игрока 2 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение 1/v:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/V \\ y_1 \ge 0 : y_2 \ge 0 \ldots y_n \ge 0 \end{cases}$$

Для игрока 2 необходимо найти минимальную цену игры (V). Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$max\ Z = max\ 1/V = max\ (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = p_i / V$, $ay_i = q_j / V$. Значения p_i и q_j не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры V не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие не отрицательности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $V^* = V + K$.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. [1,5].

В результате решения определяются значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j.

Величина V^* определяется по формуле: $V^* = 1/z$.

Значения вероятностей выбора стратегий определяются: для игрока 1: $P_i = x_i \times V^*$: для игрока 2: $q_i = y_i \times V^*$.

Для определения цены игры V из величины V* необходимо вычесть число K.

Пример решения матричной игры со смешанным расширением.

Рассмотрим пример решения матричной игры со смешанным расширением. Платёжную матрицу игры составим на основе исходных данных задачи, решённой при выполнении занятия 3, заменив лишь значения долей продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношений цен (табл. 31).

Таблица 31.

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предп. 1	**Предп. 2**	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,9
2	6	0,85
2	2	0,69

Применив к исходным данным задачи формулу (40) определения разницы прибыли от производства продукции, получим следующую платёжную матрицу (рис. 24)

	B1	B2	B3	min_j
A1	0,17	0,62	0,24	0.17
A2	3	-1,5	-0,8	-1.5
A3	0,75	0,5	0,175	0,175
max_i	3	0.62	0.24	

Рис. 24. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона»

В данной матрице (рис. 24) нет доминируемых или дублирующих стратегий. Нижняя цена игры равна 0,175, а верхняя цена игры равна 0,24. Нижняя цена игры не равна верхней. Поэтому решения в чистых стратегиях не существует и для каждого из игроков необходимо найти оптимальную смешанную стратегию.

Решение задачи.

1. В данной матрице имеются отрицательные коэффициенты. Для соблюдения условия неотрицательности в задачах линейного ***программирования*** прибавим к каждому коэффициенту матрицы модуль минимального отрицательного коэффициента. В данной задаче к каждому коэффициенту матрицы необходимо прибавить число 1,5 – значение модуля наименьшего отрицательного элемента матрицы. Получим платёжную матрицу, преобразованную для выполнения условия не отрицательности (рис. 25)

	B1	B2	B3
A1	1,67	2,12	1,74
A2	4,5	0	0,7
A3	2,25	2	1,675

Рис. 25. Платёжная матрица, преобразованная для выполнения условия неотрицательности

2. Опишем задачу линейного программирования для каждого игрока в виде системы линейных неравенств:

Для игрока 1:

$$1,67 \times x1 + 4,5 \times x2 + 2,25 \times x3 \geq 1$$
$$2,12 \times x1 + 0 \times x2 + 2 \times x3 \geq 1$$
$$1,74 \times x1 + 0,7 \times x2 + 1,675 \times x3 \geq 1$$
$$x1 \geq 0;\ x2 \geq 0;\ x3 \geq 0$$
$$min\ Z = x1 + x2 + x3$$

Для игрока 2:

$$1,67 \times y1 + 2,12 \times y2 + 1,74 \times y3 \leq 1$$
$$4,5 \times y1 + 0 \times y2 + 0,7 \times y3 \leq 1$$
$$2,25 \times y1 + 2 \times y2 + 1,675 \times y3 \leq 1$$
$$y1 \geq 0;\ y2 \geq 0;\ y3 \geq 0$$
$$max\ Z = y1 + y2 + y3$$

3. Решим обе задачи с использованием симплекс-метода, применяя программный комплекс «Линейная оптимизация».

В результате решения задачи получим следующие значения целевой функции и переменных:

$$Z = 0,5771$$
$$V^* = 1 / 0,5771 = 1,7328$$
$$x1 = 0,5144; x2 = 0; x3 = 0,0626$$
$$y1 = 0,0582; y3 = 0,5189$$

4. Для определения значений вероятностей выбора стратегий игроков 1 и 2 умножим значения переменных на V^*. $P_1 = x1 \times V^* = 0,8914$, $p_2 = 0, p_3 = x3 \times V^* = 0,1083$: $q_1 = y1 \times V^* = 0,1008, q_2 = 0, q_3 = y3 \times V^* = 0,8991.$

5. Определим значение цены игры. Для этого из величины V* вычтем 1,5 (значение модуля наименьшего отрицательного элемента).

$$V = 1,7328 - 1,5 = 0,2328$$

Таким образом, в данной игре выиграет предприятие 1 (значение $V > 0$). Для достижения своей оптимальной стратегии (получения максимального математического ожидания гарантированного выигрыша) предприятие 1 должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,8914, а технологию 3 – с вероятностью 0,1083. Предприятие 2, соответственно, должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,1008, а технологию 3 – с вероятностью 0,8991. Значение математического ожидания выигрыша предприятия 1 составит 0,2328 тыс. д.е.

Вопрос 3. Принятие решений в условиях неопределенности

Понятие о статистических играх.

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется статистической игрой или «игрой с природой». Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение (ЛПР). [3,6,9,10].

В общем виде платёжная матрица статистической игры приведена на рис. 26.

	S 1	S 2	...	S n
A 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
A 2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...	...	...	...	...
An	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 26. Общий вид платёжной матрицы статистической игры

В данной игре строки матрицы (A_i) – стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды.

Критерии принятия решения.

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из критериев принятия решения. Для того, чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР (A_i) приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент W, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

Критерий максимального математического ожидания выигрыша.

Критерий максимального математического ожидания выигрыша применяется в тех случаях, когда ЛПР известны вероятности состояний окружающей среды. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой значение математического ожидания выигрыша при выборе соответствующей стратегии ЛПР:

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ip} p_j \qquad (41)$$

где p_j – вероятность j -го состояния окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$W = max W_i$$

Применение критерия максимального математического ожидания выигрыша, таким образом, оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая:

1. ЛПР известны вероятности всех состояний окружающей среды;
2. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Критерий недостаточного основания Лапласа.

Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии ЛПР в платёжной матрице определяется, таким образом, среднее значение выигрыша:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n} \qquad (42)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$W = max W_i$$

Использование данного критерия оправдано в следующей ситуации:

1. ЛПР не имеет информации, либо имеет неполную информацию о вероятностях состояний окружающей среды;
2. Вероятности состояний окружающей среды близки по своим значениям;
3. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Максиминный критерий Вальда.

Правило выбора решения в соответствии с максиминным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой минимальное значение выигрыша в соответствующей стратегии ЛПР:

$$W_i = min_j a_{ij} \quad (43)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой минимальное значение выигрыша максимально:

$$W = max W_i$$

Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных.

Применение ММ-критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1. О возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно.
2. Решение реализуется только один раз.
3. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Величина ($a_{max\,j} - a_{ij}$), где $a_{max\,j}$ – максимальный элемент j – го столбца, может быть интерпретирована как дополнительный выигрыш, получаемый в условиях состояния окружающей среды S_j при выборе ЛПР наиболее выгодной стратегии, по сравнению с выигрышем, получаемым ЛПР при выборе в тех же условиях любой другой стратегии. Эта же разность может быть интерпретирована как величина возможного проигрыша при выборе ЛПР I – й стратегии по сравнению с наиболее выгодной стратегией. На основе данной интерпретации разности выигрышей производится определение наиболее выгодной стратегии по критерию минимаксного риска.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается матрица рисков, каждый коэффициент которой (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = a_{maxj} - a_{ij} \qquad (44)$$

Матрица рисков дополняется столбцом, содержащим максимальные значения коэффициентов r_{ij} по каждой из стратегий ЛПР:

$$R_i = max_j r_{ij}$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение R_i минимально:

$$W = minR_i$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична ситуации ММ-критерия, однако наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

В практике принятия решений ЛПР руководствуется не только критериями, связанными с крайним пессимизмом или учётом максимального риска. Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале [0, 1] и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Данный коэффициент определяется на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта принятия решений в схожих ситуациях.

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого рассчитываются по формуле:

$$W_i = C \times min_j a_{ij} + \left(1 - C\right) \times max_j a_{ij} \qquad (45)$$

Где C – коэффициент пессимизма.

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, в которой значение W_i максимально:

$$W = maxW_i$$

При $C = 1$ критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При $C = 0$ он превращается в критерий «азартного игрока», делающего ставку на то, что «выпадет» наилучший случай.

Критерий Гурвица применяется в ситуации, когда:

1. Информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна.
2. Необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды.
3. Реализуется только малое количество решений.
4. Допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа-Лемана.

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша. При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр достоверности информации о распределении вероятностей состояний окружающей среды, значение которого находится в интервале $[0,\ 1]$. Если степень достоверности велика, то доминирует критерий максимального математического ожидания выигрыша, в противном случае – ММ-критерий.

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого определяются по формуле:

$$W_i = u\sum_{j=1}^{n} a_{ip} p_j + (1-u) min_j\, a_{ij} \qquad (46)$$

где u – параметр достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение W_i максимально:

$$W = max W_i$$

Данный критерий применим в следующем случае:

1. Имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться.
2. Принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций.
3. При малом числе реализации допускается некоторый риск.

Пример решения статистической игры.

Рассмотрим пример решения статистической игры в экономической задаче.

Сельскохозяйственное предприятие производит капусту. Оно имеет возможность хранить произведённую капусту в течение всего сезона реализации – с осени до начала лета следующего года. Хозяйство может выбрать одну из трёх стратегических программ реализации капусты в течение сезона реализации:

A1 – реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки;

A2 – заложить часть капусты на хранение и реализовать её в течение осенних и зимних месяцев;

A3 – заложить всю капусту на хранение и реализовать её в весенние месяцы.

Сумма затрат на производство, хранение и реализацию капусты для хозяйства при выборе им каждой из стратегий составляет соответственно 20, 30 и 40 тыс. денежных единиц.

На региональном рынке капусты может сложиться одна из следующих трёх ситуаций:

S1 – поступление капусты на рынок происходит равномерно в течение всего сезона реализации и рынок не испытывает сезонных колебаний цен реализации продукта;

S2 – в осенние месяцы на рынок поступает капусты немного больше, чем зимой и весной. В связи с этим наблюдаются небольшие сезонные колебания цен – в начале зимы цены немного возрастают по сравнению с осенним уровнем и держатся стабильными в течение всех последующих месяцев сезона реализации;

S3 – в осенние месяцы на рынок поступает капусты значительно больше, чем зимой и весной. Объёмы капусты, поступающей в течение сезона реализации, постоянно уменьшаются. Поэтому рынок испытывает значительные сезонные колебания цен.

Значения суммы выручки предприятия от реализации капусты при выборе каждой из стратегий реализации и формировании различных ситуаций на рынке представлены в таблице 32.

Таблица 32.

Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.

Стратегии хозяйства	**Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.**		
	S1	S2	S3
A1	30	25	22
A2	30	40	33
A3	30	40	60

В задаче необходимо определить:

1. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если известны значения вероятностей состояний рынка капусты региона: 0,3, 0,6 и 0,1 соответственно.

2. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо:

а) получить минимально гарантированный выигрыш;

б) учесть значения риска от принятия различных решений;

в) определить наиболее выгодную стратегию, если коэффициент пессимизма равен 0,3.

3. Определить наиболее выгодную стратегию, если информация о вероятностях состояний рынка не является вполне достоверной и параметр достоверности информации равен 0,7.

4. Дать экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Решение.

1. Составим платёжную матрицу данной игры. Её коэффициентами будут значения прибыли от производства капусты, получаемые как разница суммы выручки от реализации капусты и затрат на производство, хранение и реализацию капусты (рис. 27.).

	S1	S2	S3
A1	10	5	2
A2	0	10	3
A3	-10	0	20

Рис. 27. Платёжная матрица задачи определения наиболее выгодной стратегии реализации капусты

2. Определим наиболее выгодную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша:

$$W_1 = 10 \times 0,3 + 5 \times 0,6 + 2 \times 0,1 = 6,2$$
$$W_2 = 0 \times 0,3 + 10 \times 0,6 + 3 \times 0,1 = 6,3$$
$$W_3 = -10 \times 0,3 + 0 \times 0,6 + 20 \times 0,1 = -1$$

	S1	S2	S3	W_i
P_j	0,3	0,6	0,1	
A1	10	5	2	6.2
A2	0	10	3	6.3
A3	-10	0	20	-1

Рис. 28. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по критерию максимального математического ожидания

$$W = maxW_i = W_2$$

Оптимальной по данному критерию при указанных значениях вероятностей состояния рынка капусты будет стратегия А2 ($W = 6,3$) (рис. 28.).

3. Определим наиболее выгодные стратегии предприятия по ММ-критерию, критерию недостаточного основания Лапласа (НО-критерий) и критерию пессимизма-оптимизма (на рисунке – ПО-критерий, рис. 29).

	S1	S2	S3	W_i (ММ)	W_i (НО)	W_i (ПО)
A1	10	5	2	2	5,67	7,6
A2	0	10	3	0	4,33	7
A3	-10	0	20	-10	3,33	11

Рис. 29. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по максиминному критерию, критерию недостаточного основания Лапласа и критерию пессимизма-оптимизма

Значения W_i для ММ-критерия:

$$W_1 = min(10,5,2) = 2$$
$$W_2 = min(0,10,3) = 0$$
$$W_3 = min(-10,020) = -10$$
$$W = maxW_i = W_1$$

Оптимальной стратегией по максиминному критерию является стратегия А1 ($W = 2$).

Определим оптимальную стратегию по критерию недостаточного основания Лапласа. По данному критерию оптимальной является стратегия А1 ($W = 5,67$).

По критерию пессимизма-оптимизма при коэффициенте пессимизма, равном 0,3 – стратегия А3 ($W = 11$).

4. Определим наиболее выгодную стратегию по критерию минимаксного риска. Для этого рассчитаем матрицу рисков (рис. 30).

	S1	S2	S3	R_i
A1	0	5	18	18
A2	10	0	17	$\boxed{17}$
A3	20	10	20	20

Рис. 30. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по критерию минимаксного риска с помощью построения матрицы рисков

Оптимальной стратегией по критерию минимаксного риска является стратегия А2 ($W = 17$).

5. Определим наиболее выгодную стратегию предприятия по критерию Ходжа-Лемана (рис. 31).

	S1	S2	S3	W_i
P_j	0,3	0,6	0,1	
A1	10	5	2	$\boxed{4{,}94}$
A2	0	10	3	4,41
A3	-10	0	20	-3,7

Рис. 31. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по критерию Ходжа-Лемана

По критерию Ходжа-Лемана оптимальной для хозяйства будет стратегия А1 ($W = 4{,}94$).

6. Проведём экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Если предприятие имеет информацию о вероятностях состояния рынка капусты и значения этих вероятностей соответствуют исходным данным задачи, наиболее выгодной стратегией является продажа части капусты в осенние месяцы и хранение оставшейся капусты для реализации в течение зимних месяцев (прибыль составит 6,3 тыс. д.е.). Эта же стратегия является наиболее эффективной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо минимизировать степень возможного риска потери прибыли в процессе принятия решения (значение возможного риска составит 17 тыс. д.е.).

В случае, когда при отсутствии информации о состоянии рынка наиболее существенным для предприятия является не максимизация прибыли в абсолютном выражении, а получение её гарантированного объема, хотя бы и минимального, наиболее целесообразным решением является реализация всей капусты в осенние месяцы (прибыль составит 2 тыс. д.е.). Это же стратегия является наиболее выгодной, если предприятие имеет информацию о вероятностях состояний рынка, соответствующую исходным данным, но эта информация не вполне достоверна (в случае, если информация имеет достоверность 0,7, прибыль составит 4,94 тыс. д.е.).

В случае, если информация о вероятностях состояний рынка отсутствует и риск значительных потерь не является для предприятия определяющим фактором при принятии решения, или если есть основания для оптимистической оценки ситуации на рынке капусты, при котором предприятие имеет возможность получить наибольшую прибыль от производства капусты, ему следует сохранить произведённую продукцию и реализовать её в весенние месяцы (прибыль составит соответственно 5.7 и 11 тыс. д.е.).

Литература.

Основная литература:
1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2008. – 392 с.
2. Литвак Б.Г. Управленческие решения. – М.: Дело, 2008. – 254 с.
3. Смирнов Э.А. Разработка управленческих решений. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 272 с.
4. Фатхутдинов Р.А. Разработка управленческого решения: Учеб. пособ. – М.: Бизнес-школа, Интел-Синтез, 2007. – 272 с.

Дополнительная литература:
1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, принятие решений в экономике – М.: Финансы и статистика, 2007. – 368с.
2. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений: Научно-практическое издание. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.
3. Варфоломеев В.И., Воробьев С.Н. Принятие управленческих решений: Учеб пособие для вузов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2007. – 288 с.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 656 с.
5. Ашихмин А.А. Разработка и принятие управленческих решений: формальные модели и методы выбора. – М.: МГТУ, 2005.
6. Вентцель Е.С. Исследование операция. – М.: Советское радио, 1972.
7. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
8. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982/
9. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.
10. Лапшин К.А., Светлов Н.М. Прогграммный комплекс «Линейная оптимизация» – методические указания для студентов экономического факультета. – М.: МСХА, 1994.
11. Лесик, А. И., Чистяков, Ю. Е. Теоретико-игровые модели взаимодействия экономических субъектов производственной системы. – М. : ВЦ РАН, 1994.
12. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.
13. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
14. Платов В.Я. Деловые игры: разработка, организация, проведение. – М.: Профиздат, 1991.
15. Сысоев, В. В. Теоретико-игровые модели принятия решений многоцелевого управления в задачах выбора и распределения ресурсов / Воронеж : Воронеж. гос. технол. акад., 2000.
16. Giblons R. Game theory for applied economists. Princeton University press, Princeton, New Gersey, 1992.

Вопросы для самопроверки:
1. Дайте определение игры.
2. Дайте определение хода и стратегии.
3. По каким принципам производится классификация игр?
4. Как подразделяются игры по числу игроков?
5. Как подразделяются игры в зависимости от количества стратегий?
6. Как подразделяются игры по характеру взаимодействия между игроками?
7. Как подразделяются игры по виду выигрышей?
8. Как подразделяются игры по виду функции выигрышей?
9. Как записать игру с нулевой суммой в виде платёжной матрицы?
10. Что такое нижняя и верхняя цена игры?

11. Что такое оптимальная чистая стратегия? При каких условиях существует оптимальная чистая стратегия?

12. Как уменьшить размерность платёжной матрицы?

13. Приведите примеры решения матричных игр в задачах реальной экономики.

14. Существует ли решение матричной игры, нижняя цена которой не равна верхней? Как называется такая игра?

15. Что такое смешанная стратегия игрока?

16. Что такое активная стратегия?

17. Что такое цена матричной игры со смешанным расширением?

18. В каком интервале находится цена матричной игры со смешанным расширением?

19. Каким будет значение выигрыша в матричной игре, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии?

20. Что такое решение матричной игры со смешанным расширением?

21. Какими методами решается матричная игра со смешанным расширением?

22. Сформулируйте математическую запись задачи определения оптимальной смешанной стратегии в матричной игре для каждого игрока.

23. Какое преобразование коэффициентов платёжной матрицы необходимо произвести перед началом решения матричной игры со смешанным расширением? Каков смысл этого преобразования?

24. Как определить значение цены игры и вероятности выбора стратегий игроков по результатам решения задачи?

25. Приведите примеры решения матричных игр со смешанным расширением в задачах реальной экономики.

26. Что такое статистическая игра? В каких ситуациях возникает необходимость решения статистических игр?

27. Как называется игрок в статистической игре? С чем взаимодействует игрок в статистической игре?

28. Является ли статистическая игра игрой с нулевой суммой?

29. От чего зависит выбор критерия принятия решения в статистической игре?

30. По каким критериям принятия решения определяется наиболее выгодная стратегия ЛПР в ситуации, когда известны вероятности состояний окружающей среды?

31. Какие критерии принятия решения применяются в случае отсутствия информации о вероятностях состояний окружающей среды?

32. Какие критерии принятия решения используются в условиях значительного риска потери выигрыша?

33. Какие критерии принятия решения используются в условиях необходимости получения минимально гарантированного выигрыша?

34. Какие критерии принятия решения используются в условиях недостоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды?

35. Что такое критерий азартного игрока? В каких случаях он применяется?

36. Что такое коэффициент пессимизма? Как он определяется?

37. Что такое матрица рисков? Как рассчитываются коэффициенты матрицы рисков?

38. Приведите примеры решения статистических игр в задачах реальной экономики.

39. В каких ситуациях возникает необходимость определения экономического эффекта информации с помощью методов теории игр?

40. Из каких компонентов складывается эффект прогноза для ЛПР?