

Тема: Комплексные числа.

Комплексным числом z называется пара действительных чисел (a, b) , взятых в определенном порядке, так что $z = a + ib$, где i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При этом, число a называется **действительной частью** числа z ($a = \operatorname{Re} z$, от французского слова *reel* – действительный), b – **мнимой частью** ($b = \operatorname{Im} z$, от французского слова *imaginaire* – мнимый).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет **чисто мнимым**, если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет **действительным**.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно-сопряженными**.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2.$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Существуют различные формы записи комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая, показательная. Рассмотрим эти формы.

Алгебраической формой записи комплексного числа z называется его представление в виде

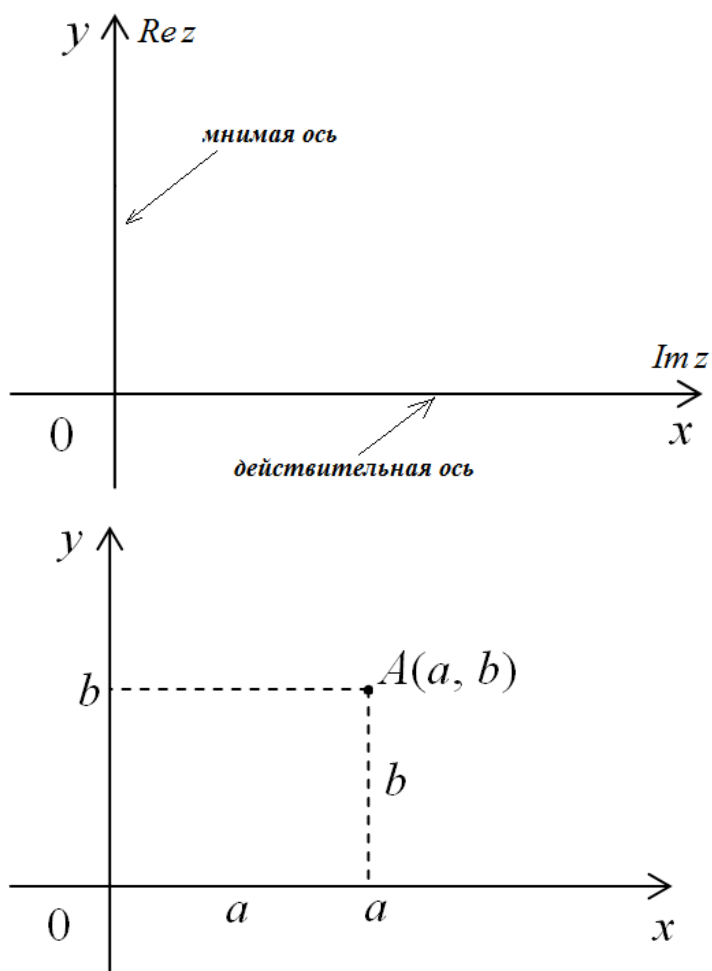
$$z = a + ib,$$

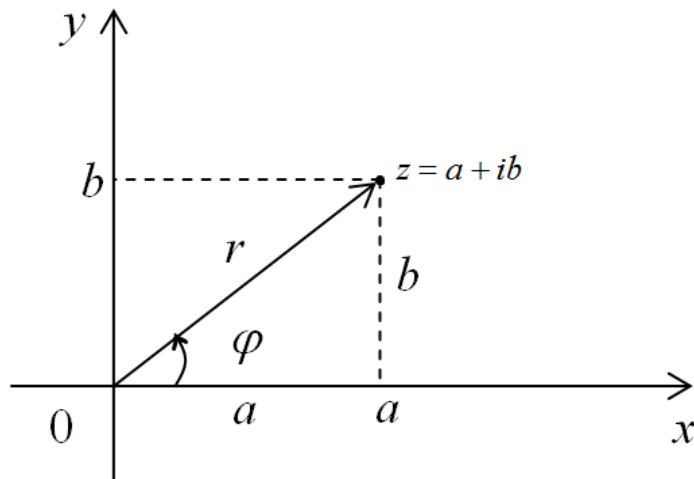
где $a, b \in \mathbb{R}$, a – действительная часть, b – мнимая часть, i – мнимая единица.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные,

действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная – мнимой осью.





Таким образом, на оси Ox располагаются действительные числа, а на оси Oy – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$.

Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ – **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \text{Arg } z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \text{Arg } z = \arctg \frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно-сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В случае комплексно-сопряженных чисел:

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра**.

(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

Приравнявая, получим $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi$.

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

5) Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $n\psi = \varphi + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right).$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера**.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Для комплексно-сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Полученное равенство и есть **показательная форма комплексного числа**.