

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра геодезии и картографии

О. В. Кравченко

Конспект лекций по дисциплине
СПУТНИКОВЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

для специальностей:

1-31 02 03 «Космоаэрокартография»

1-31 02 01 «География» (по направлениям)

направление 1-31 02 01-03 «География» (геоинформационные системы)

ЛЕКЦИЯ 1. Предмет и задачи курса «Инженерная геодезия»

1. ***Предмет и задачи курса. Связь с другими дисциплинами.***
2. ***Изыскания для строительства.***
3. ***Состав инженерно-геодезических изысканий.***
4. ***Виды инженерных сооружений.***

1. Предмет и задачи курса. Связь с другими дисциплинами.

Геодезия - наука, изучающая форму и размеры Земли, геодезические приборы, способы измерений и изображений земной поверхности на планах, картах, профилях и цифровых моделях местности.

Геодезия одна из древнейших наук, возникла с началом земледелия и её название образовано из двух греческих слов - "гео" - "земля" и "де" - "разделяю" (землеразделение). По разнообразию решаемых народнохозяйственных задач геодезия подразделяется на ряд самостоятельных дисциплин, каждая из которых имеет свой предмет изучения:

Высшая геодезия, занимается определением фигуры, размеров, гравитационного поля Земли. Топография ("топос" - место, "граф" пишу), занимается детальным изучением конкретных участков Земли (земной поверхности), путём создания топографических карт на основе съёмочных работ (наземные, воздушные).

Фотограмметрия занимается обработкой фото-, аэрофото- и космических снимков для составления карт и планов. Спутниковая геодезия, (космическая), в её задачи входит рассмотрение теории и методов использования искусственных спутников Земли для решения различных практических задач геодезии.

Картография, это наука о картографическом отображении земной поверхности, о методах создания карт и их использовании. Маркшейдерия - область геодезии, обслуживающая горнодобывающую промышленность и строительство тоннелей.

Инженерная геодезия, изучает методы, технику и организацию геодезических работ, выполняемых при изысканиях, проектировании, строительстве, монтаже технологического оборудования и эксплуатации различных сооружений.

Основными задачами инженерной геодезии являются: • выполнение топографо-геодезических изысканий на строительных площадках и трассах и получение топографических материалов, необходимых для проектирования и застройки территории;

• выполнение геодезических расчетов при разработке проектной документации на объекты строительства, горизонтальной и вертикальной планировки территории застройки и определение объемов земляных работ; • перенесение в натуру главных осей зданий, сооружений и коммуникаций, дорог и т.д.,

- геодезическое обеспечение установки строительных конструкций и технологического оборудования ;
- контроль за формой и размерами сооружения в целом, исполнительные съемки готовых частей строящегося объекта;
- измерение осадки фундаментов при сжатии оснований, определение крена (наклона) высотных зданий, башен, труб;

- проверки, совершенствования методов расчета устойчивости объектов строительства и своевременного выявления опасных деформаций сооружений. Методы решения задач инженерной геодезии основываются на законах математики и физики. Инженерная геодезия связана также с астрономией, геологией, геофизикой, геоморфологией, географией и другими науками.

2. Изыскания для строительства.

Инженерные изыскания – это комплексное изучение природных условий предполагаемого участка строительства для получения необходимых данных при проектировании и строительстве для принятия технически правильных и экономически целесообразных решений.

По направленности изыскания делятся на экономические и технические. Экономические изыскания проводят для определения географического района размещения и экономической целесообразности строительства, реконструкции или расширения существующего объекта строительства.

Технические изыскания заключаются во всестороннем изучении природных условий района строительства, для рационального размещения зданий и сооружений на местности, а также для разработки проектных решений. Технические (инженерные) изыскания, в зависимости от изучаемого фактора, подразделяются на следующие виды:

- инженерно-геодезические (топографогеодезические);

- инженерно-геологические, гидрогеологические, гидрологические, гидрометеорологические, почвенно-грунтовые, климатологические, геоботанические;
- изыскания месторождений местных строительных материалов;
- сбор данных для составления проекта организации строительства и смет.

Технические изыскания выполняют в три периода: подготовительный, полевой и камеральный. В подготовительный период собирают и изучают необходимые данные по объекту изысканий и намечают организационные мероприятия по проведению изыскательских работ.

В полевой период, кроме полевых работ, производят часть камеральных и лабораторных работ, необходимых для обеспечения непрерывности полевого изыскательского процесса и контроля полноты и точности полевых работ. В камеральный период осуществляют обработку всех полевых материалов.

Производство инженерных изысканий регламентируется государственными стандартами и нормативными документами. На

территории Республики Беларусь основными нормативными документами являются:

- СНБ 1.02.01-96 «Инженерные изыскания для строительства»;
- СТБ 21.03.03-99 «Система проектной документации для строительства».

3. Состав инженерно-геодезических изысканий

В состав инженерно-геодезических изысканий для строительства входят:

- 1) сбор и обработка материалов изысканий прошлых лет, топографогеодезических, картографических и других материалов и данных;
- 2) рекогносцировочное обследование территории;
- 3) создание (развитие) опорных геодезических сетей;
- 4) создание планово-высотных съемочных геодезических сетей;
- 5) Топографическая съемка, включая съемку подземных и надземных сооружений;
- 6) обновление топографических и кадастровых планов в графической, цифровой, фотографической и иных формах;
- 7) инженерно-гидрографические работы;
- 8) геодезические работы, связанные с переносом в натуру точек инженерных изысканий;
- 9) геодезические наблюдения за деформациями оснований зданий и сооружений;
- 10) создание и издание инженернотопографических планов, кадастровых и тематических карт и планов, атласов специального назначения (в графической, цифровой и иных формах);
- 11) камеральная обработка материалов;
- 12) составление технического отчета.

4. Виды инженерных сооружений.

К инженерным сооружениям относят различного назначения здания, дорожнотранспортные, гидротехнические сооружения, инженерные сети, специальные сооружения.

Здания – это сооружения, имеющие помещения для жилья, культурнобытовых или производственных целей. Различают промышленные, гражданские и сельскохозяйственные здания. По этажности различают одноэтажные и многоэтажные здания.

К промышленным зданиям относят производственные, вспомогательные, энергетические, складские и другие здания. Гражданские здания делятся на жилые (дома, гостиницы, общежития) и общественные (школы, театры, магазины, больницы). Сельскохозяйственные – это здания для содержания скота и птицы, хранения и ремонта сельскохозяйственной техники.

Дорожно-транспортные сооружения: железные и автомобильные дороги, тоннели метрополитена, трубопроводы, водный и воздушный транспорт и специальные (подвесные дороги, мостовые переходы, эстакады). Гидротехнические сооружения: плотины ГЭС, каналы, шлюзы, затворы, судоподъемники, лесопропускные и гидротехнические тоннели, водохранилища, дамбы, волнобой и др.

Инженерные сети: воздушные линии электропередач (ЛЭП) и кабельные сети (электросети высокого и низкого напряжения, телефон, телеграф, сигнализация). Специальные сооружения: ускорители, телескопы, радиотелескопы, телевизионные башни, технологические линии, башенные сооружения, высотные здания (16 и более этажей).

Лекции 2-3. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОСТРОЕНИИ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ, СЕТЕЙ СГУЩЕНИЯ И СЪЕМОЧНЫХ СЕТЕЙ

- 1. Общие сведения о геодезической сети.**
- 2. Государственная геодезическая сеть.**
- 3. Государственная геодезическая сеть Республики Беларусь.**
- 4. Сети сгущения и съёмочные сети.**

1. Общие сведения о геодезической сети.

Геодезическая сеть представляет собой совокупность закрепленных на местности пунктов, для которых в единой системе определены координаты и высоты. Основной принцип построения геодезической сети – от общего к частному.

Он заключается в том, что вначале с высокой точностью определяется взаимное положение сравнительно небольшого числа пунктов, расположенных на большой территории. Затем, используя эти пункты, переходят к построению более густой сети меньшей точности. Такой метод позволяет быстро распространить единую координатную систему на большие территории.

Геодезические сети могут быть плановыми, высотными или одновременно теми и другими. Плановая сеть устанавливает взаимное положение точек на плоскости или на поверхности земного сфероида. Создается она методами триангуляции, полигонометрии, трилатерации и GPS.

При методе триангуляции в треугольниках измеряют все углы и минимум две стороны на разных концах сети (вторая сторона для контроля). Остальные стороны вычисляют, используя теорему синусов. Метод триангуляции (от лат. *triangulum* – треугольник) был предложен голландским ученым Снеллиусом около 1610 г.

Метод полигонометрии заключается в построении сети ходов, в которых измеряются все углы и стороны. Полигонометрические ходы отличаются от

теодолитных более высокой точностью измерений. Метод трилатерации (от лат. *trilaterus* – трехсторонний) отличается от триангуляции тем, что в треугольниках измеряются не углы, а стороны.

В последнее время появилась возможность определять координаты пунктов и длины линий по наблюдениям искусственных спутников Земли, так называемым GPSметодом. GPS (Global Positioning System) – система глобального позиционирования. Имеет параллельное название – NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging).

Параллельно с американской GPS в России развивается система ГЛОНАСС (ГЛОбальная Навигационная Спутниковая Система).



а) - ГЛОНАСС (3 орбиты по 8 спутников); б) - GPS (6 орбит по 4 спутника).

Задача определения координат пунктов GPSметодом решается следующим образом. Запускаются специальные искусственные спутники Земли на высоту 19100 км (спутник ГЛОНАСС) и 20150 км (спутник GPS) с траекториями в разных плоскостях с таким расчетом, чтобы из любой точки земной поверхности одновременно наблюдалось несколько спутников. За спутниками постоянно ведется наблюдение с опорных пунктов. В результате для любого момента времени координаты спутников будут известными.

Зная координаты спутников для данного момента времени и расстояния до них, вычисляют координаты определяемого пункта. Затем от пространственных координат в мировой системе WGS-84 переходят к системе координат, принятой в данном государстве.

Высотная геодезическая сеть создана для распространения по всей территории страны единой системы высот. Она создается методами геометрического, тригонометрического и барометрического нивелирования. Геодезические сети подразделяются на 3 вида: 1. Государственная геодезическая сеть (ГГС). 2. Геодезические сети сгущения (ГСС). 3. Съёмочные сети.

2. Государственная геодезическая сеть.

Государственной геодезической сетью (ГГС) называют сеть закрепленных точек земной поверхности, обеспечивающей распространение единой системы координат на территорию государства и являющейся исходной для создания других геодезических сетей. ГГС является главной геодезической основой топографических съемок всех масштабов.

Геодезическая основа Республики Беларусь реализована в виде ГГС, ранее созданной на территории бывшего СССР. Государственная (опорная) геодезическая сеть СССР подразделялась на: а) сети триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1, 2, 3 и 4 классов; б) нивелирные сети I, II, III, IV классов.

Триангуляция 1 класса строилась в виде системы замкнутых полигонов периметром 800–1000 км. Полигоны образовывали триангуляционными рядами, которые стремились разместить в направлении меридианов и параллелей. Длина звена около 200 км. В местах пересечения звеньев измеряли базисные стороны. На обоих концах базисных сторон определяли астрономические широты, долготы и азимуты.

В закрытых, залесенных районах звенья триангуляции могли заменяться звеньями полигонометрии 1 класса.

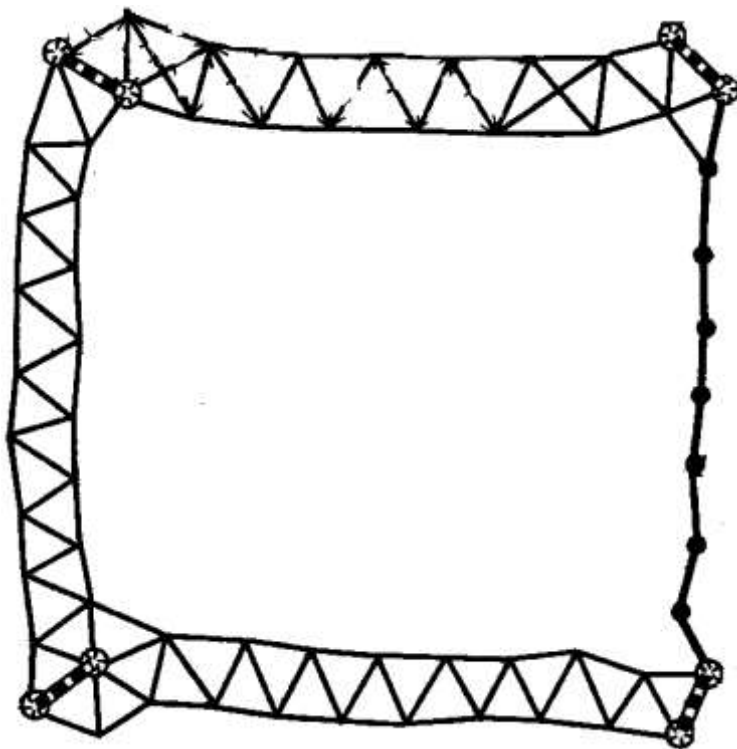
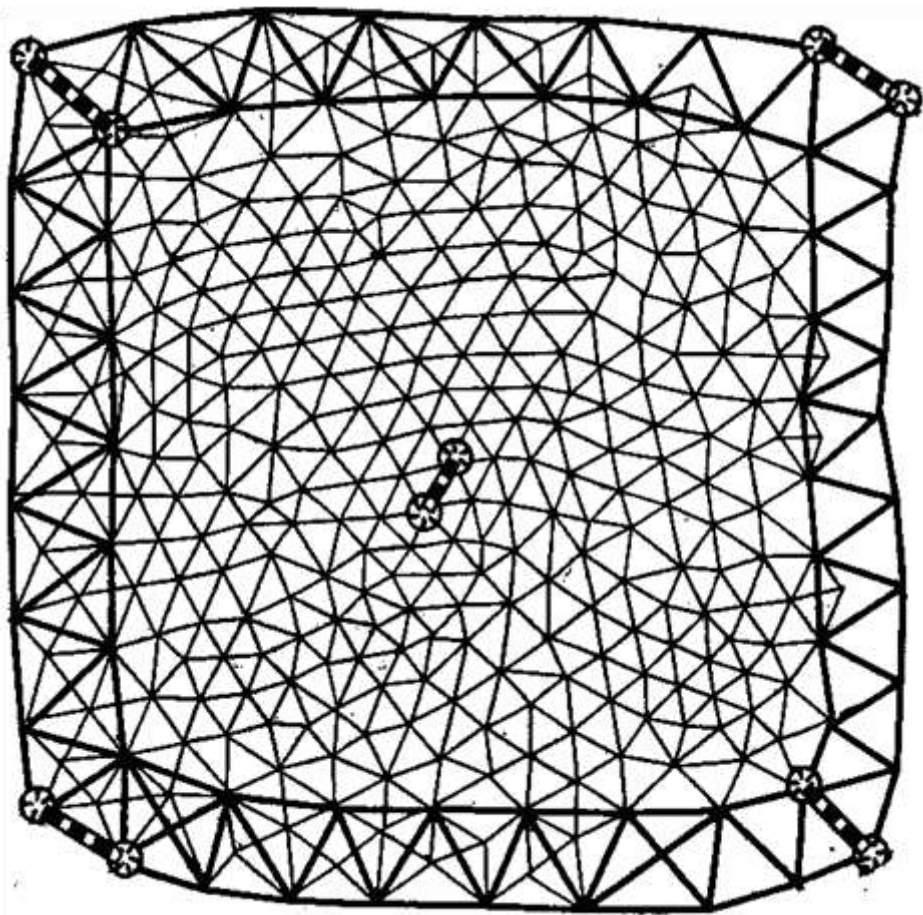


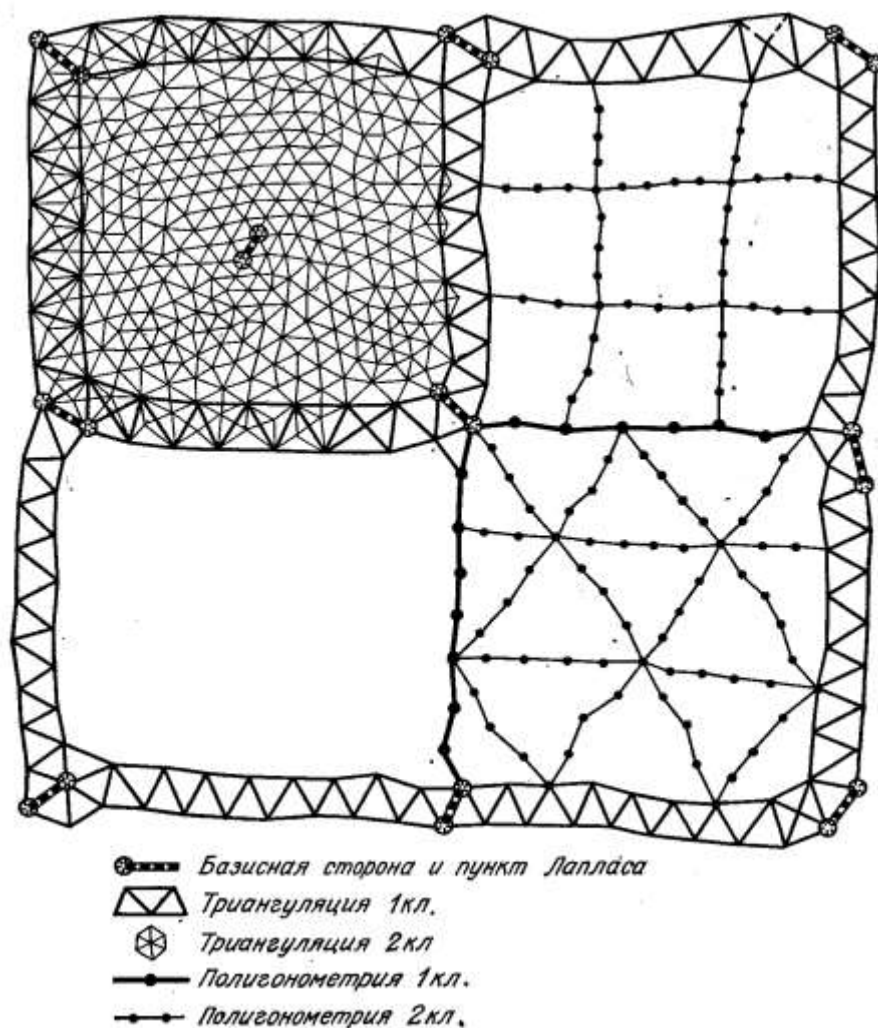
Схема построения триангуляции 1 класса

Триангуляция 2 класса строилась в виде сплошных сетей треугольников, заполняющих полигоны триангуляции 1 класса.

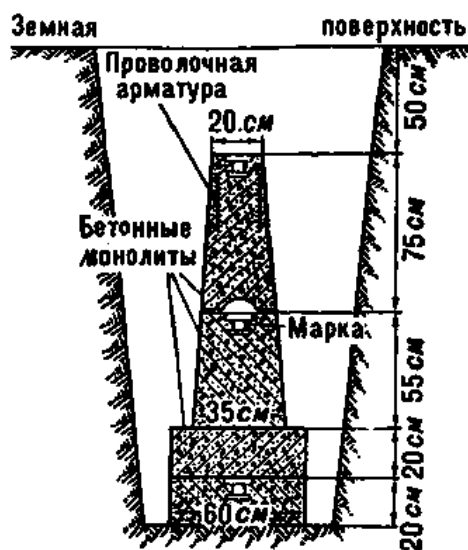


Триангуляция 3 и 4 классов является дальнейшим сгущением ГГС для целей крупномасштабного картографирования и обоснования строительства.

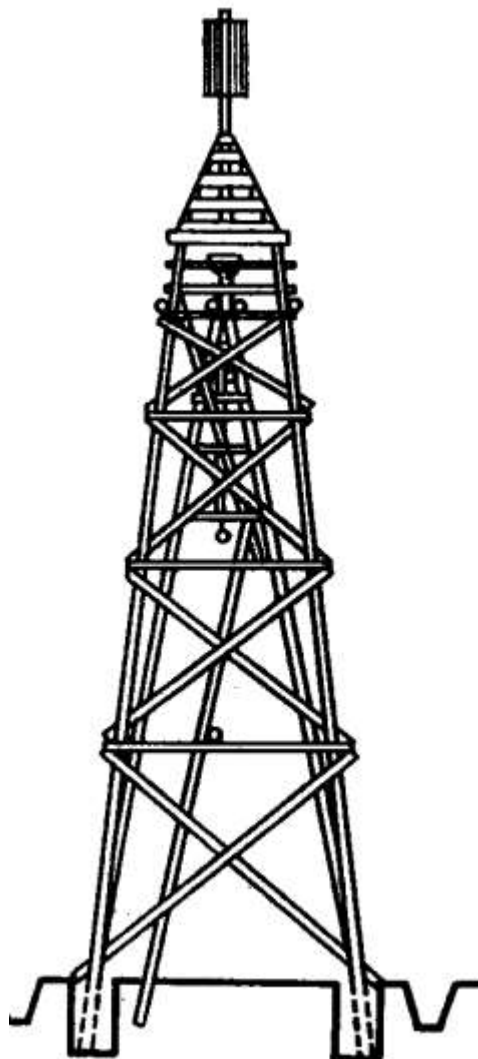
Государственная полигонометрия 1 класса строится в виде ходов, заменяющих ряд триангуляции 1 класса. Полигонометрические сети 2 класса строятся по особо разработанной программе. При построении сетей 3 и 4 классов прокладывают системы полигонометрических ходов или одиночные ходы, опирающиеся на пункты высшего класса.



В целях долговременной сохранности сетей их пункты закрепляют на местности особо надёжными сооружениями – центрами. В районах неглубокого промерзания грунта (1,5 м) применяют центр из трех бетонных монолитов. Верхняя марка закладки монолитов находится на глубине 50 см от поверхности. Нижний монолит закладывается на 50 см ниже промерзания грунта.



Над центрами пунктов сооружают наружные знаки, которые служат визирными целями при измерении углов и линий (туры, пирамиды, простые сигналы, сложные сигналы).



Геодезический сигнал.

Для каждого пункта сети определяется его высота методом геометрического или тригонометрического нивелирования. Государственная нивелирная сеть является главной высотной основой для решения научных и инженерно-технических задач. Создается методом геометрического нивелирования. Сети I и II классов обеспечивают единую систему высот на территории всей страны, а также используются для научных целей. Сети III и IV классов служат для обеспечения топографических съёмок и решения инженерных задач.

Предельные невязки в превышениях нивелирных ходов определяются по формулам

I кл.

$$f_h \leq 3 \text{ мм} \sqrt{L_{\text{км}}}$$

II кл.

$$f_h \leq 5 \text{ мм} \sqrt{L_{\text{км}}}$$

III кл.

$$f_h \leq 10 \text{ мм} \sqrt{L_{\text{км}}}$$

IV кл.

$$f_h \leq 20 \text{ мм} \sqrt{L_{\text{км}}}$$

Рассмотренная ГГС строилась по единой программе на территорию всего Советского Союза в течение многих десятилетий. Она включала около 164 тыс. пунктов 1 и 2 классов. На территории Беларуси таких пунктов было около 2,5 тыс. Плановые сети в течение многих лет не обновлялись. По своему состоянию и точности они уже не отвечают современным требованиям. Поэтому в России и Республике Беларусь разработаны программы модернизации ГГС на основе спутниковых методов определения координат.

3. Государственная геодезическая сеть Республики Беларусь

Государственная геодезическая сеть представляет собой сеть закрепленных точек земной поверхности, относящейся к территории Республики Беларусь, положение которых определено в общих для них системах координат.

ГГС предназначена для: - распространения единых установленных систем координат на территории Республики Беларусь; - геодезического обеспечения картографирования территории Республики Беларусь; - геодезического обеспечения изучения земельных ресурсов и землепользования, создания кадастров, строительства, разведки и освоения природных ресурсов Республики Беларусь;

- обеспечения исходными геодезическими данными средств наземной и аэрокосмической навигации, аэрокосмического мониторинга природной и техногенной сред Республики Беларусь; - изучения поверхности и гравитационного поля Земли и их изменений во времени; - изучения геодинамических явлений.

ГГС является носителем геодезической системы координат и высот Республики Беларусь. Началом единого отсчета плановых координат служит центр круглого зала Пулковской обсерватории в Санкт-Петербурге. При производстве геодезических и картографических работ государственного назначения на территории Республики Беларусь применяется единая система геодезических координат 1942 года и Балтийская система высот 1977 года.

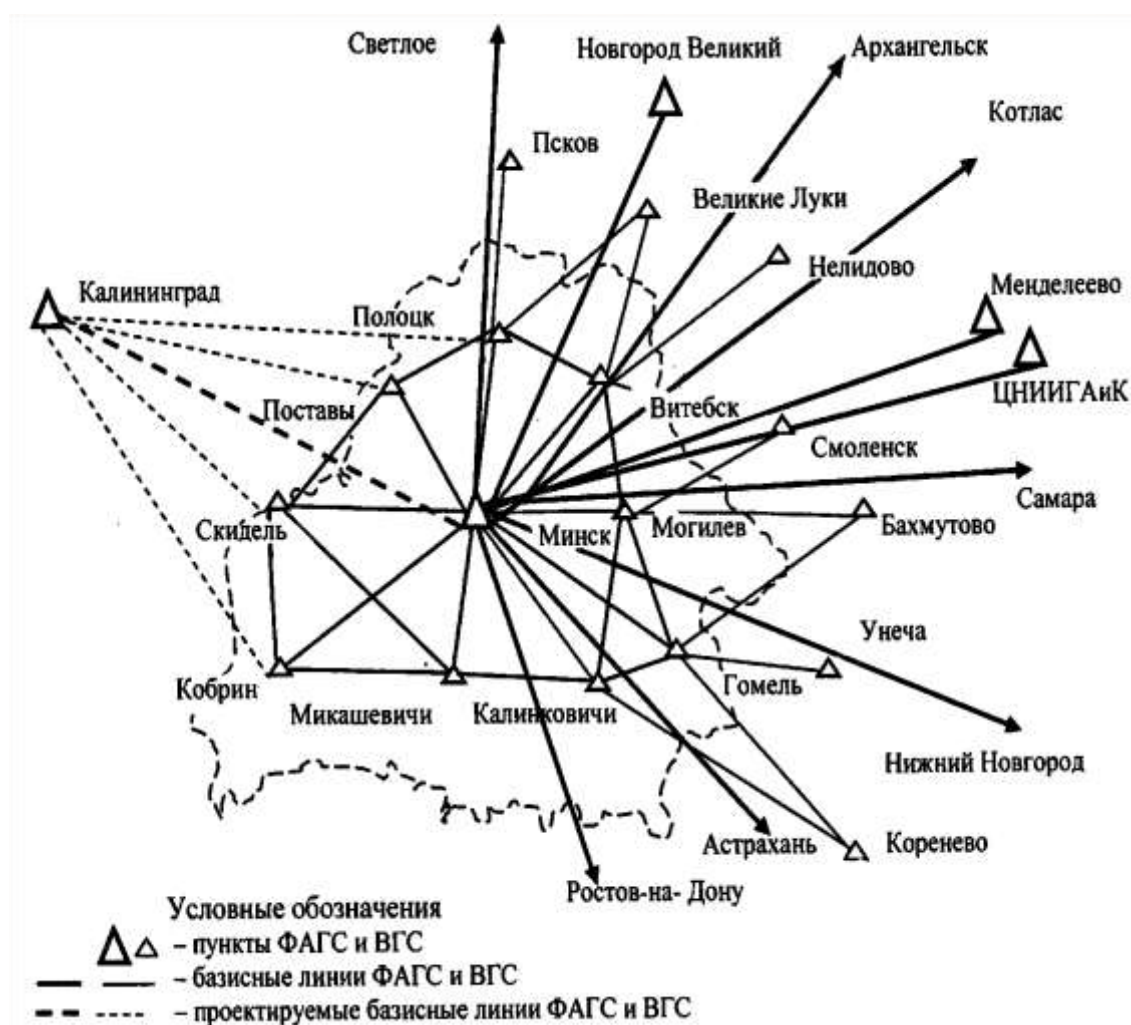
ГГС состоит из взаимосвязанных геодезических сетей различных классов точности, создаваемых по принципу от общего к частному.

ГГС включает:

- фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС);
- высокоточную геодезическую сеть (ВГС);
- спутниковую геодезическую сеть 1-го класса (СГС1);
- геодезические сети сгущения (ГСС).

Плотность пунктов ГГС должна составлять не менее одного пункта на 30 кв. км земной поверхности.

В основу создания ГГС РБ положен принцип сохранения единства геодезических сетей Беларуси и России. На первом этапе развития и модернизации ГГС в течение 2000 г. создан один пункт ФАГС «Минск». Пункт ФАГС должен иметь связь не менее чем с четырьмя пунктами астрономогеодезической сети (АГС).



Следующим этапом модернизации ГГС стало создание ВГС, представленной пунктами Поставы, Полоцк, Витебск, Могилев, Гомель, Калинковичи, Микашевичи, Кобрин и Скидель.

ВГС представляет собой пространственное геодезическое построение, опирающееся на пункт ФАГС и геодезические пункты других государств. Расстояние между пунктами ВГС должно составлять 150–300 км. Спутниковая геодезическая сеть 1 класса (СГС-1) представляет собой пространственное

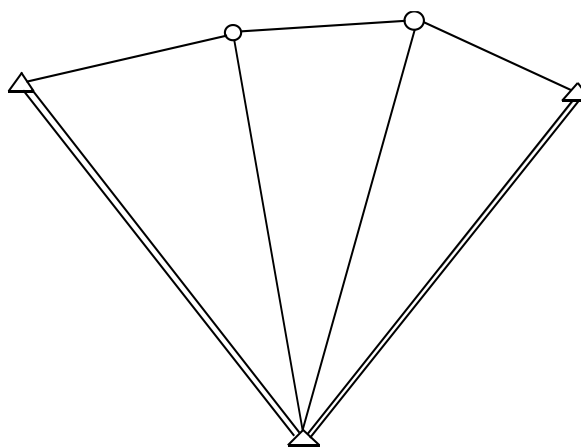
геодезическое построение, опирающееся на пункты ФАГС и ВГС. Расстояние между пунктами СГС-1 должно составлять 15–25 км, а на территориях городов, больших промышленных объектов – 8–12 км.

Геодезическая сеть сгущения (ГСС) построены в соответствии с требованиями стандарта. Новые пункты ГСС определяются относительными методами космической геодезии, а также традиционными геодезическими методами: триангуляции, полигонометрии, трилатерации и с применением астрономических измерений.

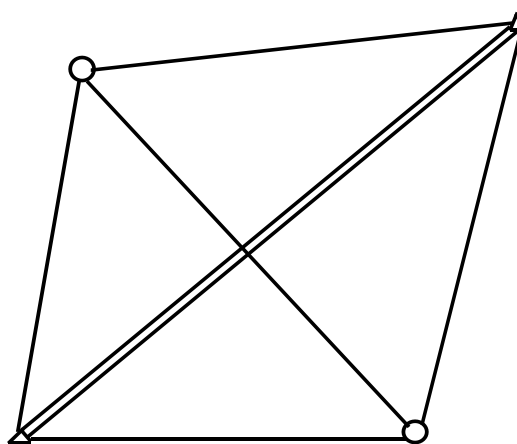
4. Сети сгущения и съёмочные сети.

Геодезические сети сгущения создаются на основе государственной сети для обоснования топографических съёмок масштабов 1:5000– 1:500. При этом в основном применяются те же методы, как и в государственных сетях. Они подразделяются на аналитические сети триангуляции 1 и 2 разрядов, полигонометрические сети 1 и 2 разрядов и сети технического нивелирования. В настоящее время сети сгущения включены в ГГС.

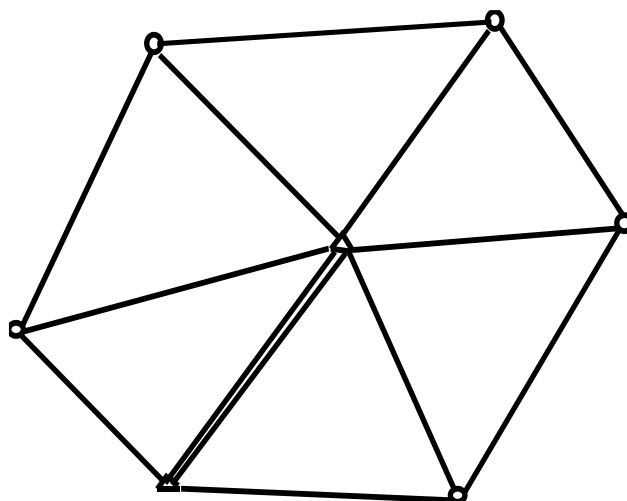
Триангуляция 1 и 2 разряда обычно строится в виде типовых фигур



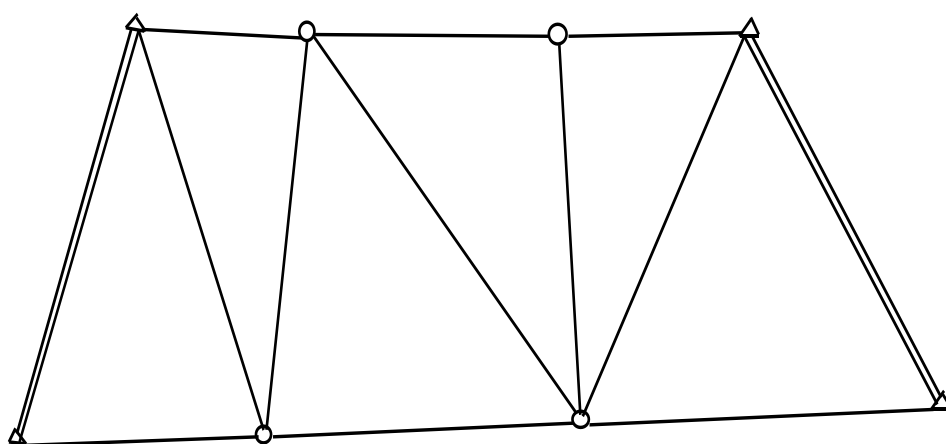
вставка в угол



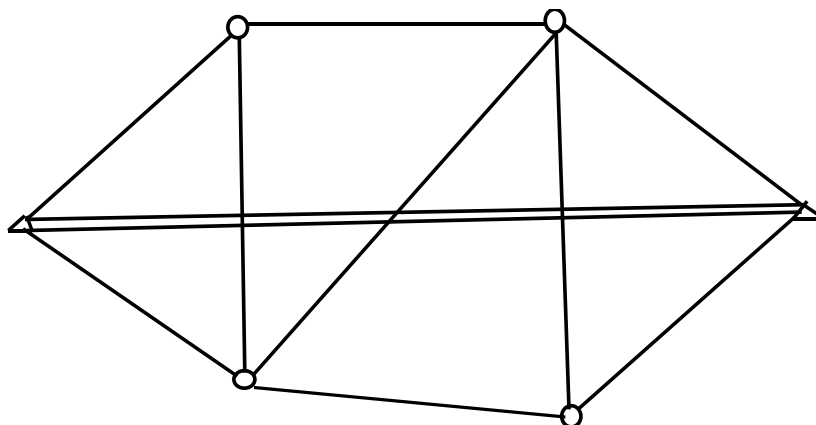
геодезический четырехугольник



центральная система



цепь треугольников между исходными сторонами



цепь треугольников между исходными пунктами

Минимальный угол в сплошной сети 1 и 2 разрядов – 20° , в цепочке треугольников – 30° . Число треугольников между исходными пунктами не более 10. Минимальная длина выходной стороны 1 км. Плановые сети сгущения можно создавать также методом трилатерации, полярнолучевым методом и др.

Высотные сети сгущения создаются техническим нивелированием. Длины визирного луча допускается до 150 м. Предельная невязка в сумме превышений определяется по формуле

$$f_{h_{\text{дон}}} \leq 10 \text{ мм} \sqrt{n}$$
$$f_{h_{\text{дон}}} \leq 50 \text{ мм} \sqrt{L}$$

где L – длина хода в км, n – число станций в ходе.

Съемочные сети являются непосредственной основой съёмок всех масштабов и других геодезических работ. Они могут строиться на основе государственных сетей, сетей сгущения или в условной системе координат. Точность съёмочных сетей устанавливаются соответствующими инструкциями. При создании плановых съёмочных сетей применяется метод триангуляции, трилатерации, теодолитные хода, полярно-лучевой метод, различные засечки и др. Высоты точек съёмочного обоснования определяются геометрическим или тригонометрическим нивелированием.

Допустимые невязки в превышениях определяются по формулам:

$$f_{h_{\text{дон}}} \leq 5 \text{ см} \sqrt{L} \quad \text{– при техническом нивелировании};$$

$f_{h_{\text{дон}}} \leq 10 \text{ см} \sqrt{L}$ – при нивелировании горизонтальным лучом теодолитом или кипрегелем;

$$f_{h_{\text{дон}}} \leq 20 \text{ см} \sqrt{L} \quad \text{– при тригонометрическом нивелировании}$$

Лекции 5-6. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ

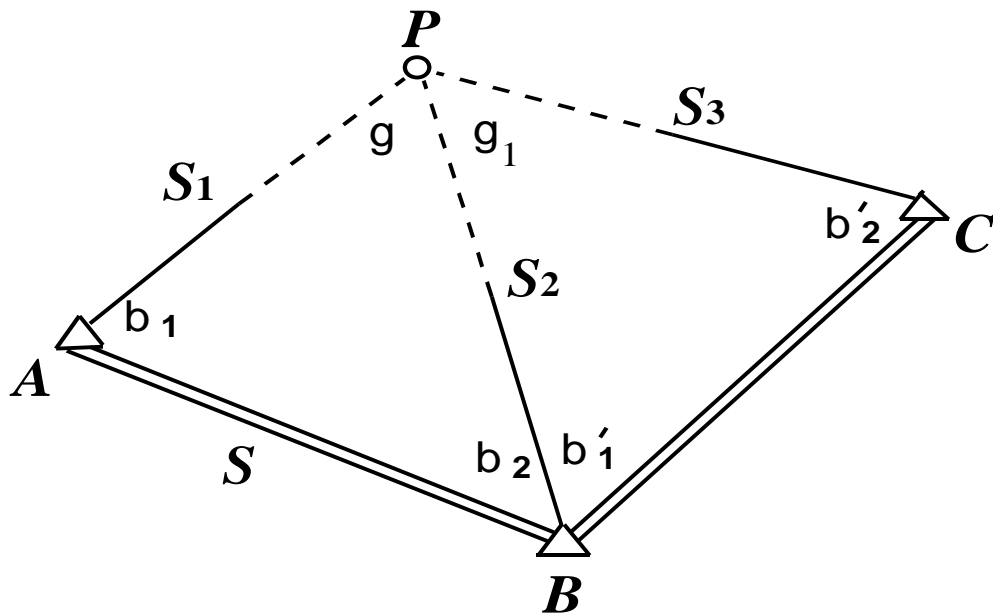
- 1. Прямая засечка.**
- 2. Обратная засечка.**
- 3. Линейная засечка.**
- 4. Снесение координат с вершин знака на землю.**

1. Прямая засечка.

Для решения прямой засечки, заключающейся в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных пунктов и измеренным при них углам, предложено много различных формул.

а) Даны координаты точек A , B , C . Измерены углы β_1 , β_2 , β_1' , β_2' . Требуется определить координаты точки $P(x, y)$.

Если встать между исходными пунктами и смотреть на определяемый пункт P , то пункт A будет левым, а B – правым.



Условимся обозначать соответствующими индексами координаты исходных пунктов и измеренные углы.

Тогда формулам Юнга можно придать следующий вид:

$$X_P = \frac{X_{\Lambda} \operatorname{ctg} \Pi + X_{\Pi} \operatorname{ctg} \Lambda - Y_{\Lambda} + Y_{\Pi}}{\operatorname{ctg} \Lambda + \operatorname{ctg} \Pi}, \quad (1),$$

$$Y_P = \frac{Y_{\Lambda} \operatorname{ctg} \Pi + Y_{\Pi} \operatorname{ctg} \Lambda + X_{\Lambda} - X_{\Pi}}{\operatorname{ctg} \Lambda + \operatorname{ctg} \Pi}, \quad (2)$$

где Λ и Π – значения углов при левом и правом пунктах ($\Lambda = \beta_1$, $\Pi = \beta_2$). В целях контроля находят угол

$$\gamma = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2,$$

а затем по координатам пункта B (левый) и координатам пункта P (правый) по формулам (1) и (2) вычисляют координаты пункта A , которые должны совпадать с заданными.

Для полного контроля полевых измерений и выписки исходных данных нужно решить, задачу, используя координаты точек B и C .

Расхождение между абсциссами и ординатами при первом и втором решении должны удовлетворять условию

$$r = \sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} \leq 3M_r;$$

где M_r – среднее квадратическое расхождение в положении пункта P из двух решений.

В свою очередь,

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

где M_1 и M_2 – СКО положения пункта P из первого и второго решения.

СКО положения пункта P , определяемого прямой засечкой, вычисляется по формуле

$$M = \frac{m\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\rho \sin \gamma}, \quad (3)$$

где m – СКО измерения углов;

s_1 и s_2 – расстояние от исходных пунктов до определяемого (можно вычислить по координатам точек);

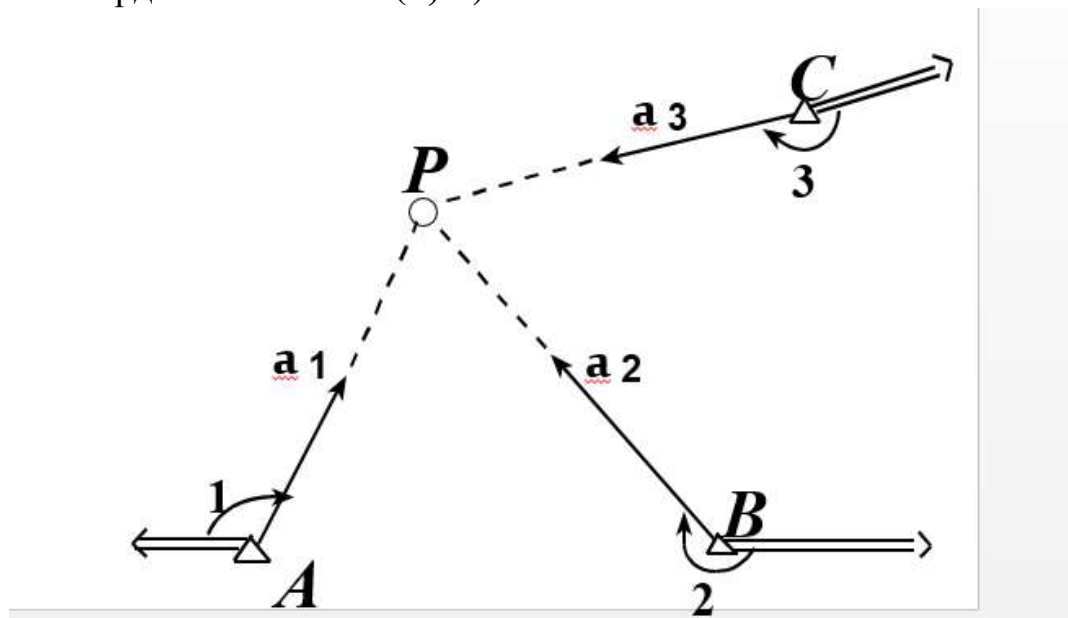
γ – угол засечки.

б) Формулы Гаусса.

При определении точки прямой засечкой может не быть видимости между смежными точками A, B и C .

В таком случае целесообразно пользоваться **формулами Гаусса**, в которые входят дирекционные углы направлений с данных пунктов на определяемый.

Известны координаты точек A, B, C . Измерены углы $1, 2, 3$. Требуется определить координаты точки $P (X, Y)$.



По измеренным углам и дирекционным углам направлений на другие исходные пункты, находим дирекционные углы направлений на определяемую точку α_1, α_2 и α_3 .

Запишем соответствие

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{Y - Y_A}{X - X_A},$$

откуда

$$Y - Y_A = (X - X_A)\operatorname{tg}\alpha_1. \quad (4)$$

Аналогично получим

$$Y - Y_B = (X - X_B)\operatorname{tg}\alpha_2. \quad (5)$$

Найдем разность

$$Y_B - Y_A = X(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2) - X_A\operatorname{tg}\alpha_1 + X_B\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Отсюда

$$X = \frac{X_A\operatorname{tg}\alpha_1 - X_B\operatorname{tg}\alpha_2 + Y_B - Y_A}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}. \quad (6)$$

Вместо (4) и (5) можно записать

$$Y = Y_A + (X - X_A)\operatorname{tg}\alpha_1, \quad (7)$$

$$Y = Y_B + (X - X_B)\operatorname{tg}\alpha_2. \quad (8)$$

Нахождение ординат по двум формулам (7) и (8) позволяет проконтролировать вычисления.

Таким образом, формулы (6), (7) и (8) – формулы Гаусса для определения координат.

Для контроля правильности полевых измерений вычисляют координаты точки **P** вторично, используя другую пару исходных пунктов **B** и **C** и соответствующие дирекционные углы.

2. Обратная засечка (задача Потенота)

Сущность обратной засечки заключается в определении положения четвертого пункта (точки стояния) по трем исходным.

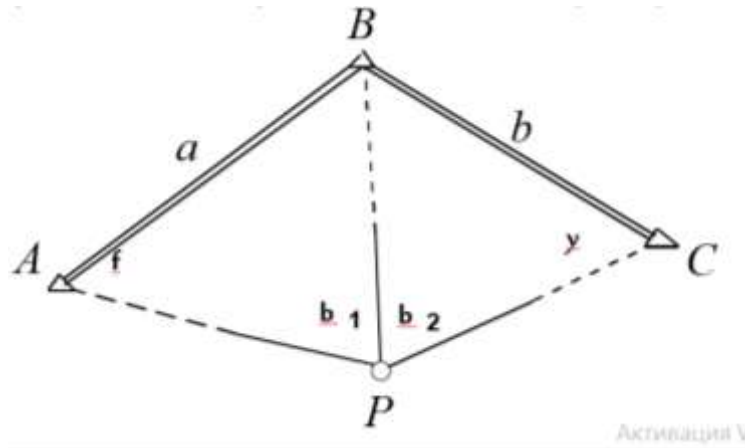
Эта задача встречается при создании съёмочных сетей, привязке аэрофотоснимков, выносе проектов в натуру и других случаях.

На основе трех исходных пунктов задача решается без контроля правильности измерения углов и выборки исходных данных. Поэтому на практике используют четыре исходных пункта.

Точность определения положения пункта обратной засечкой зависит от ошибок измерения углов, ошибок исходных данных и взаимного расположения пунктов.

Обратную засечку рекомендуется делать с предвычислением точности.

Даны координаты пунктов A, B, C . Измерены углы β_1, β_2 . Требуется определить координаты точки $P(X, Y)$.



В начале решением обратных геодезических задач определим дирекционные углы и длины исходных линий:

$$(AB) = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A};$$

$$(CB) = \arctg \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C}$$

$$a = \frac{Y_B - Y_A}{\sin(AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos(AB)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2},$$

$$b = \frac{Y_B - Y_C}{\sin(CB)} = \frac{X_B - X_C}{\cos(CB)} = \sqrt{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}.$$

Далее задача сводится к определению углов φ и γ .

Определим полусумму углов φ и γ , которую обозначим как A

$$\frac{1}{2}(\varphi + \gamma) = \frac{1}{2}[360^\circ - \beta_1 - \beta_2 + (CB) - (AB)] = A$$

Определим полуразность этих углов, которую обозначим через B

$$\frac{1}{2}(\varphi - \gamma) = B.$$

Определим диаметры описанных окружностей около треугольников ABP и BCP :

$$D_1 = \frac{a}{\sin \beta_1},$$

$$D_2 = \frac{b}{\sin \beta_2}.$$

Выразим сторону BP через D_1, D_2 и углы φ и γ .

$$BP = D_1 \sin \varphi, \quad BP = D_2 \sin \gamma.$$

Откуда

$$D_1 \sin \varphi = D_2 \sin \gamma.$$

Разделив две части этого равенства на $D_1 \sin \gamma$, получим

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}$$

Образуем пропорцию и введем обозначение N :

$$\frac{D_2 - D_1}{D_2 + D_1} = \frac{\sin \varphi - \sin \gamma}{\sin \varphi + \sin \gamma} = N.$$

С учетом формул для определения D_1 и D_2

$$N = \left(\frac{b}{\sin \beta_2} - \frac{a}{\sin \beta_1} \right) : \left(\frac{b}{\sin \beta_2} + \frac{a}{\sin \beta_1} \right).$$

С учетом тригонометрических формул

$$\frac{\sin \varphi - \sin \gamma}{\sin \varphi + \sin \gamma} = \frac{2 \cos \frac{\varphi + \gamma}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \gamma}{2} \cos \frac{\varphi - \gamma}{2}} = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} B = N.$$

Отсюда

$$B = \operatorname{arctg}(N \operatorname{tg} A)$$

Вычислив значения A и B , определим углы φ и γ

$$\begin{aligned} \varphi &= A + B, \\ \gamma &= A - B. \end{aligned}$$

Далее определим длину линии AP

$$AP = \frac{a}{\sin \beta_1} \sin(\varphi + \beta_1)$$

Координаты точки P :

$$X_P = X_A + AP \cos[(AB) + \varphi],$$

$$Y_P = Y_A + AP \sin[(AB) + \varphi].$$

Для контроля координат точки P можно вычислить второй раз, используя формулы

$$CP = \frac{b}{\sin \beta_2} \sin(\gamma + \beta_2)$$

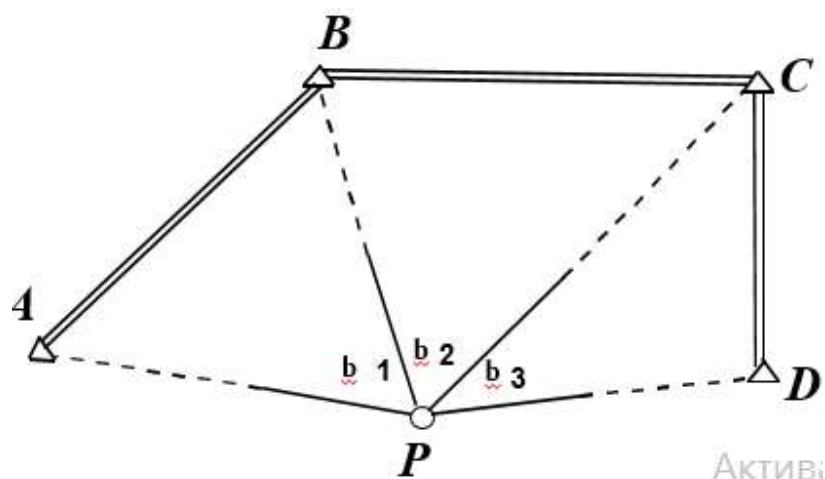
$$X_P = X_C + CP \cos[(CB) - \gamma],$$

$$Y_P = Y_C + CP \sin[(CB) - \gamma].$$

Рассмотренная обратная засечка *по трем исходным пунктам* называется *однократной*.

В таком виде она, как правило, не допускается, т.к. не контролируется правильность измерения углов и выписка исходных данных.

Для полного контроля наблюдается не **3**, а минимум **4 пункта**.



Задача решается дважды при различном сочетании исходных пунктов. Например, первый раз используются пункты A, B, C и второй раз пункты B, C, D .

Для каждого варианта решения определяется СКО положения пункта M .

Ожидаемое среднее квадратическое значение M_r расхождения в положении пункта P при двух решениях составит

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Отсюда допустимое расхождение в значениях вычисленных координат можно установить по формуле

$$\sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} < 3M_r,$$

где X', Y' – координаты точки из 1-го решения;

X'', Y'' – координаты точки из 2-го решения.

За окончательное значение координат пункта P берут среднее арифметическое, которое будет иметь ошибку

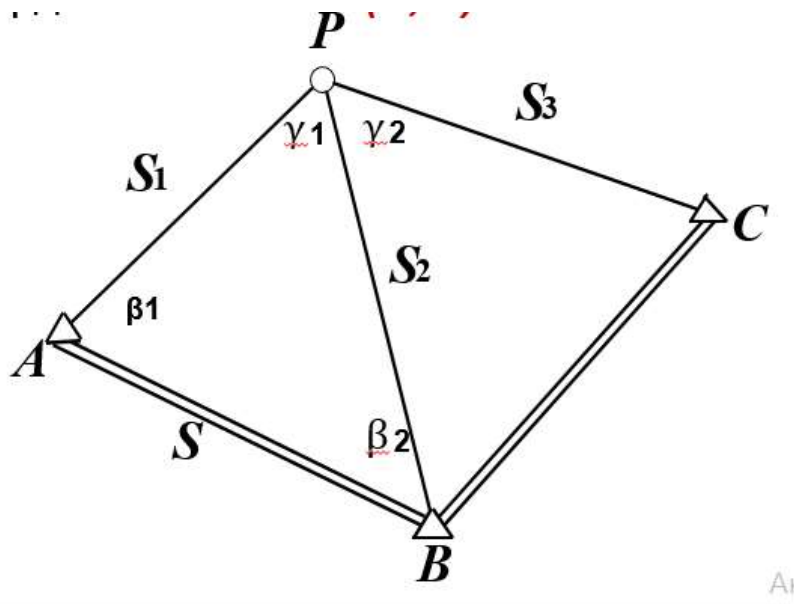
$$M = \frac{M_r}{2}.$$

3. Линейная засечка.

Задача линейной засечки заключается в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных пунктов и измеренным расстояниям от определяемого пункта до исходных (однократная засечка).

Для контроля определения используются координаты третьего исходного пункта и расстояния до него от определяемого.

Даны координаты пунктов A, B, C . Измерены линии S_1, S_2, S_3 . Требуется определить координаты точки $P (X, Y)$.



Рассмотрим однократную засечку с использованием пунктов A и B .

1. Решением обратной геодезической задачи определим дирекционный угол и длину линии AB :

$$(AB) = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

$$S = \frac{Y_B - Y_A}{\sin(AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos(AB)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

2. Определим угол β_1 , используя теорему косинусов:

$$S_2^2 = S^2 + S_1^2 - 2SS_1 \cos \beta_1,$$

$$\beta_1 = \arccos \frac{S^2 + S_1^2 - S_2^2}{2SS_1}$$

3. Определим дирекционный угол линии AP

$$(AP) = (AB) - \beta_1.$$

4. Определим координаты точки P :

$$X_P = X_A + S_1 \cos(AP),$$

$$Y_P = Y_A + S_1 \sin(AP).$$

Для контроля решения задачи вычисляется длина линии BP и сравнивается с измеренной

$$BP = \sqrt{(X_P - X_B)^2 + (Y_P - Y_B)^2}.$$

Расхождение не должно превышать 3-х единиц последнего знака в измеренном значении линии S_2 .

Для полного контроля определения вычисляется сторона CP и сравнивается с измеренной S_3

$$CP = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2}.$$

Допускается

$$|CP - S_3| < 6m_s$$

где m_s – СКО измерения расстояний S_3 .

Однако в целях повышения точности окончательных значений искомым координат задачу лучше решать дважды.

При втором решении используют исходные пункты B, C и расстояния S_2, S_3 .

Допустимое расхождение в координатах определяют по формуле

$$r = \sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} < 3M_r.$$

В свою очередь

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{m_{S_1}^2 + m_{S_2}^2}}{\sin \gamma_1},$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{m_{S_2}^2 + m_{S_3}^2}}{\sin \gamma_2},$$

где M_1 и M_2 – СКО положения пункта P , определенного линейной засечкой в первом и втором вариантах;

γ – угол засечки.

Величину угла засечки (для первого решения) можно найти из выражения

$$\gamma_1 = \arcsin \frac{S \sin \beta_1}{S_2}$$

За окончательное значение координат пункта P берут среднее арифметическое, которое будет иметь ошибку

$$M = \frac{M_r}{2}.$$