КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Предмет курса

В промышленности осуществляются разнообразные процессы, в которых исходные материалы в результате химического взаимодействия претерпевают глубокие превращения, сопровождающиеся изменением агрегатного состояния, внутренней структуры и состава вещества.

Процессы и аппараты, общие для различных отраслей технологии, получили название основных процессов и аппаратов.

К числу основных аппаратов относятся тарельчатые и насадочные колонны, применяемые для проведения процессов ректификации, для извлечения компонентов из газовых или паровых смесей жидким поглотителем, очистки газов от пыли и т.п.

Насосы, компрессоры, фильтры и центрифуги, теплообменники и сушилки также относятся к числу основных аппаратов и машин, которые в различных сочетаниях составляют типовое оборудование большинства химических производств.

Классификация процессов

Технологические процессы в соответствие с кинетическими закономерностями, характеризующими их протекание, классифицируются на 4 основные группы (рис. 1):

Рис. 1. Классификация процессов

1. *Гидромеханические процессы,* скорость $j_г$ которых определяется законами гидродинамики – науки о движении жидкостей и газов.

$$j_г = \frac{dV}{F\,d\tau} = \frac{\Delta p}{R_1} = K_1 \Delta p\,, \qquad (1)$$

где V – объем протекающей жидкости; F – площадь поверхности сечения аппарата; τ – время; K_1 – коэффициент скорости процесса (величина, обратная гидравлическому сопротивлению R_1); Δp – перепад давления (движущая сила процесса).

К ним относятся перемещение жидкостей, сжатие и перемещение газов, разделение взвешенных в жидкой или газообразной среде частиц в поле сил тяжести (отстаивание), в поле центробежных сил (центрифугирование и сепарирование), под действием сил электрического поля, а также под действием разности давлений при движении через пористый слой (фильтрование) и перемешивание жидких и твердых зернистых материалов.

2. *Тепловые процессы,* скорость $j_т$ которых определяется законами

теплопередачи – науки о способах распространения теплоты.

$$j_m = \frac{dQ}{F\,d\tau} = \frac{\Delta T}{R_2} = K_2 \Delta T\,, \quad (2)$$

где Q – массовая доля переданной теплоты; F – поверхность теплообмена; K_2 – коэффициент теплопередачи (величина, обратная термическому сопротивлению R_2); ΔT – средняя разность температур между обменивающимися теплотой материалами (движущая сила процесса).

В эту группу входят процессы нагревания, охлаждения, замораживания, выпаривания и конденсации паров.

Скорость тепловых процессов в значительной степени зависит от гидродинамических условий (скоростей, режимов течения), при которых осуществляется перенос теплоты между обменивающимися средами.

3. *Массообменные (диффузионные) процессы* характеризуются переносом одного или нескольких компонентов исходной смеси из одной фазы в другую через поверхность раздела фаз. Скорость $j_м$ этих процессов определяется законами массопередачи.

$$j_м = \frac{dM}{F\,d\tau} = \frac{\Delta c}{R_3} = K_3 \Delta c\,, \quad (3)$$

где M – количество вещества, перенесенного из одной фазы в другую; F – площадь поверхности контакта фаз; K_3 – коэффициент массопередачи (величина, обратная диффузионному сопротивлению R_3); Δc – разность между равновесной и рабочей концентрациями вещества в фазах (движущая сила процесса).

К диффузионным процессам относятся абсорбция, жидкостная экстракция, экстрагирование из твердых веществ, адсорбция, тепломассообменные (сушка, кристаллизация, перегонка и ректификация, растворение и др.).

4. *Механические процессы*, скорость которых определяется законами механики твердых тел. Они включают в себя: измельчение твердых

материалов, перемешивание, сортирование (классификацию) сыпучих материалов и формообразование (прессование, формование, гранулирование, экструзия и др.).

Теория подобия

Теория подобия – это учение о подобных явлениях, т. е. учение о методах исследования явлений в своих, характерных для каждого явления, переменных, представляющих собой безразмерные степенные комплексы, составленные из величин, определяющих сущность явления.

Различают подобия:

Геометрическое подобие предполагает, что сходственные размеры данного тела и ему подобного параллельны, а их отношение выражается постоянной величиной. В геометрии подобными называются фигуры одинаковой формы, у которых сходственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны. У подобных фигур (рис. 1) отношение сходственных сторон и высот

$$\frac{l_1}{l_1^{'}} = \frac{l_2}{l_2^{'}} = \frac{l_3}{l_3^{'}} = \frac{h_1}{h_1^{'}} = c_{l1}, \qquad (1)$$

т. е. представляет собой постоянную величину c_{l1}, которая носит название *константы подобия или коэффициента подобного преобразования.*

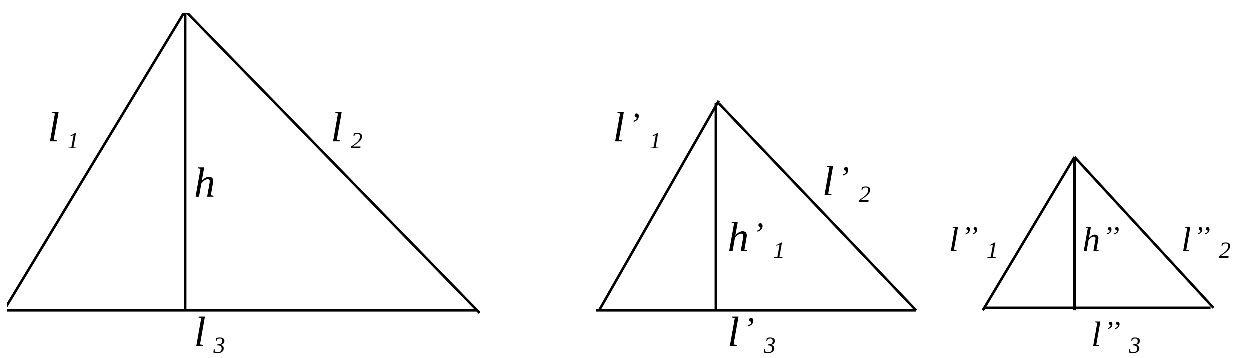


Рис. 1. Геометрическое подобие

С помощью константы подобия можно сравнивать между собой только две подобные фигуры:

$$\frac{l_1}{l_1''} = \frac{l_2}{l_2''} = \frac{l_3}{l_3''} = \frac{h_1}{h_1''} = c_{l2}; \qquad c_{l1} \neq c_{l2}. \tag{2}$$

Если же в качестве масштаба измерения взять один из линейных размеров треугольника (сходственную сторону или высоту треугольника), то для всех подобных треугольников

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2'}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_1''} = i_1; \qquad \frac{l_1}{h_1} = \frac{l_1'}{h_1'} = \frac{l_1''}{h_1''} = i_2, \tag{3}$$

где i – инвариант подобия.

Временное подобие требует, чтобы сходственные точки или части геометрически подобных систем, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходили геометрически подобные пути в промежутки времени, отношение которых выражается постоянной величиной. Временное подобие соблюдается, если отношение между сходственными интервалами времени процесса выражается постоянной величиной. Сходственными интервалами времени процесса – это интервалы, в течение которых завершаются аналогичные стадии рассматриваемых процессов. Временное подобие процессов называют *гомохронностью* (однородностью во времени).

Временное подобие характеризуется константой временного подобия:

$$\tau_1'' / \tau_1' = \tau_2'' / \tau_2' = \tau_3'' / \tau_3' = \ldots \tau_i'' / \tau_i' = c_\tau.$$

где $\tau_1', \tau_2', \tau_3', \tau_i'$ – интервалы времени в первом процессе; $\tau_1'', \tau_2'', \tau_3'', \tau_i''$ – интервалы времени во втором процессе.

Физическое подобие требует, чтобы в рассматриваемых подобных системах отношение физических констант двух любых сходственных точек или частиц, подобно размещенных в пространстве и во времени, были постоянными;

Предпосылкой подобия полей физических явлений обязательно должно быть геометрическое подобие, т. е. физические поля подобны, если в сходственных точках геометрически подобных систем отношение физических величин выражено постоянными значениями соответствующих констант подобия:

$$p^{'} / p = c_p; \qquad \mu^{'} / \mu = c_\mu; \qquad \lambda^{'} / \lambda = c_\lambda; \qquad c^{'} / c = c_c. \qquad (4)$$

Подобие начальных и граничных условий предполагает, что начальное состояние и состояние на границах систем подобны при условии наличия геометрического, временного и физического подобий.

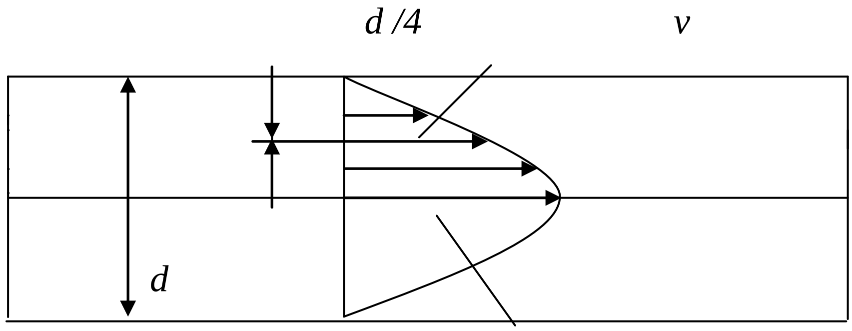
Безразмерные числа отношений называют ***инвариантами подобия*** и обозначают буквой *i* – первой в слове *idem* (тоже самое). Если инварианты подобия представляют отношение простых однородных величин, то они называются *симплексами.* Инварианты подобия, выраженные отношением сложных разнородных величин, называются *критериями подобия.*

Информация, которой должны быть дополнены основные уравнения, описывающие процесс, представляет собой *условия единственности решения***.**

Аналитическое исследование уравнений необходимо дополнить *граничными условиями.* В основных уравнениях не отражено начало процесса, поэтому вводится понятие о *начальных условиях.* Граничные и начальные условия вместе составляют *краевые условия*.

Кинематическое подобие. Примером может служить подобие движения жидкости (рис. 2). Оно также требует наличия геометрического подобия, т. е. если необходимо изучить распределение скоростей потока жидкости в сечении круглой трубы, то подобный поток должен быть осуществлен так же в трубе круглого сечения. При этом сравниваться между собой должны скорости в точках, отвечающих геометрическому подобию (2).

При этом должно быть обеспечено подобие физических полей, т. е. в сходственных точках. В результате можно получить $w/w' = c_u$.



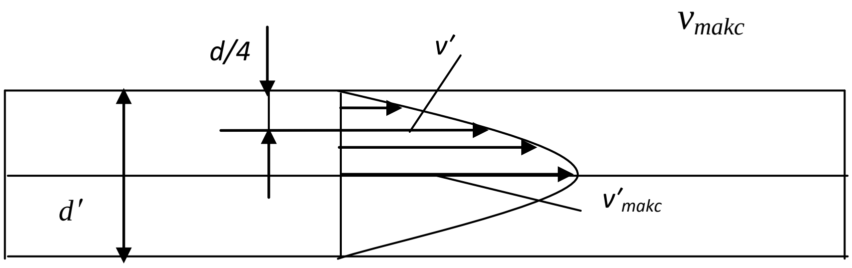


Рис. 2. Кинематическое подобие

Теоремы подобия

Первая теорема подобия была сформулирована И. Ньютоном. Согласно теореме, при подобии систем всегда могут быть найдены такие безразмерные комплексы величин, которые для сходственных точек данных систем одинаковы, т. е. *подобные между собой явления имеют численно равные критерии подобия.*

Первая теорема подобия может быть сформулирована также следующим образом: *у подобных явлений, индикаторы подобия равны единице.*

Вторая теорема подобия была доказана Бэкингемом, Федерманом и Афанасьевой-Эренфест. Согласно теореме *любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление, может быть представлена в виде зависимости между соответствующими критериями в форме уравнения подобия* (критериального уравнения).

Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют *определяющими*.

Критерии, включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса и сами зависят от этих условий, называют *определяемыми*. Какой из критериев является определяемым, зависит от формулировки задачи. Таким образом, если определяемым является некоторый критерий K_1, то уравнение удобнее представлять в виде степенной функции, выражающей зависимость определяемого критерия K_1, содержащего искомую величину, от определяющих критериев K_2, K_3, …, K_n, отражающих различные стороны процесса:

$$K_1 = CK_2^m K_3^n \ldots K_n^r. \tag{13}$$

Такие уравнения называют уравнениями в обобщенных переменных (обобщенными) или критериальными уравнениями. Число и вид критериев, необходимых для описания процесса, могут быть во многих случаях найдены чисто аналитическим путем общего вида системы дифференциальных уравнений данного процесса либо на основе теории размерностей.

Коэффициенты C, m, n, r, входящие в уравнения подобия, определяются опытным путем.

Из критериального уравнения, представляющего собой функциональную зависимость между критериями подобия, рассчитав предварительно значения определяющих критериев, находят значение определяемого критерия, а из него – значение интересующей величины.

Вторая теорема подобия отвечает на вопрос, как обрабатывать результаты опытов, проведенных на моделях: их надо представлять в виде функциональной зависимости между критериями подобия.

Другим преимуществом критериальных уравнений является их универсальность, т. к. использование в них обобщенных переменных (критериев) позволяет применять их для целой группы подобных между собой явлений, а не только для данного единичного явления.

Третья теорема подобия (теорема М.В. Кирпичева и А.А. Гухмана) формулирует необходимые и достаточные условия подобия явлений: *подобны те явления, которые описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений и у которых соблюдается подобие условий однозначности.*

Подобию же условий однозначности при идентичности дифференциальных уравнений, описывающих процессы, отвечает равенство определяющих критериев подобия. Значит, третья теорема подобия может быть сформулирована и так: *явления подобны, если их определяющие критерии численно равны.*

Условиями однозначности называют граничные и начальные условия, позволяющие из бесконечно большого числа решений системы дифференциальных уравнений (неопределенное интегрирование) выделить единственное, отвечающее условиям данной задачи.

Критерии, содержащие хотя бы одну величину, не входящую в условия однозначности, называют *неопределяющими*.

Из третьей теоремы следует, например, что для подобия явлений движения жидкости в трубах необходимо, чтобы профили скоростей на входе были подобны друг другу.

Критериальные уравнения выражают собой зависимость неопределяющего критерия от определяющих. С учетом постановки задачи в соответствии с конкретными условиями однозначности один и тот же критерий может быть в одном случае определяющим, в другом – неопределяющим.

Анализ размерностей

Многие процессы химической технологии зависят от такого большого числа различных факторов, что для них не удается получить полного математического описания; можно лишь в самом общем виде представить зависимость между различными переменными, влияющими на протекание процесса.

Если, некоторая величина K_1 зависит от параметров K_2, K_3, K_4 и K_5, то общий вид зависимости между данными величинами

$$K_1 = f(K_2, K_3, K_4, K_5). \tag{14}$$

Для отыскания конкретного вида этой функциональной зависимости, т. е. для нахождения расчетного уравнения, может быть применен метод анализа размерностей.

В основу метода положена **π-теорема** Бэкингема, согласно которой *общую функциональную зависимость, связывающую между собой n переменных величин при m основных единиц их измерения, можно* *представить в виде зависимости между (n − m) безразмерными комплексами этих величин, а при наличии подобия − в виде связи между (n − m) критериями подобия.*

Так, например, если рассматриваемое явление описывается соотношением (2.14), связывающим пять каких-то физических величин, и если эти величины выражаются посредством трех основных единиц измерения, то $n = 5$ и $m = 3$. Следовательно, $(n - m) = 2$, и указанная функциональная зависимость может быть представлена в виде функции между некоторыми двумя безразмерными комплексами π_1 и π_2:

$$\pi_1 = f(\pi_2). \tag{15}$$

Структура функции должна обеспечивать свободу выбора единиц всех первичных величин и независимость отношения двух любых значений вторичной величины от выбора этих единиц (принцип абсолютности отношений). Таким свойством обладают только гомогенные функции. Эти функции могут быть представлены только степенными произведениями:

$$K = k_1^{a_1}\ k_2^{a_2}\ \ldots k_m^{a_m}, \tag{16}$$

где K – множитель преобразования вторичной величины, k_i – множители преобразования первичных величин.

Показатель степени a_i называется *размерностью* вторичной величины в отношении данной первичной. Совокупность размерностей принято записывать в виде *формулы размерности*, т. е. в виде символического уравнения, которое получается из последнего уравнения при замещении множителей преобразования величин их символами. При этом символ вторичной величины обычно берется в прямые скобки. Например, формула размерности для скорости (символ V) записывается в виде

$$[V] = LT^{-1}, \tag{17}$$

где L – символ длины, T – символ времени.

Понятие размерности условно можно распространить и на первичные величины, считая размерность первичной величины в отношении самой себя равной единице, а в отношении любой другой первичной величины – нулю. При таком соглашении формула размерности первичной величины совпадает с ее символом. Окончательные формулы размерности должны быть приведены к первичным величинам. Например, для силы (символ F) имеем

$$\left[F\right]=M\left[A\right]=MLT^{-2} \tag{18}$$

где M – символ массы; A – символ ускорения.

Метод анализа размерностей основывается на следующих положениях.

Формулу размерностей производных единиц можно представить в виде степенного комплекса основных единиц. Если обозначить физическую величину через W, ее размерность в СИ можно записать

$$dimW=\left(L\right)^{\alpha}\left(M\right)^{\beta}\left(T\right)^{\gamma}.$$

Пусть величина W является функцией n размерных величин

$$W = f(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Можно доказать, что эта зависимость заменится уравнением

$$П=f(1, 1, ..., 1, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-1}), \tag{19}$$

где роль размерных величин играет n-k безразмерных величин. В гидродинамических исследованиях основная система состоит из трех единиц (кг, м, с) значит k=3, и вместо n величин изучаемое явление представляется в виде зависимости между n-3 безразмерными комплексами этих величин. Зависимость (19) – то критериальное уравнение, которое исследователь должен установить, анализируя опытные данные в виде комбинаций безразмерных комплексов.

Покажем применение метода анализа размерностей на примере определения перепада давлений при движении жидкости в трубопроводе. При этом допустим, что дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, отсутствует.

Известно, что при установившемся движении жидкости в прямой трубе перепад давлений Δp зависит от скорости жидкости v, ее плотности ρ, динамической вязкости μ, ускорения свободного падения g, длины трубы l и ее диаметра d.

Таким образом, известна лишь функциональная зависимость общего вида

$$\Delta p = f\,(v, \rho, \mu, g, l, d). \tag{20}$$

В данном случае число переменных n = 7, число единиц измерения (длины, времени и массы) k = 3. Тогда, согласно π -теореме, число безразмерных комплексов, описывающих процесс, должно быть равно (n - k) = 4.

Представим функциональную зависимость (20) в степенном виде

$$\Delta p = x\, v^y \rho^z \mu^u g^r l^s d^t, \tag{21}$$

где x, y, z, u, r, s, t – неизвестные числовые коэффициенты.

Единицы измерения в СИ и их размерности величин, входящих в (21):

$$\Delta p = [Па] = \left[Н/м^2 \right] = \left[кг/м \cdot с^2 \right] = \left[ML^{-1}T^{-2} \right];$$

$$v = \left[м/с \right] = \left[LT^{-1} \right];$$

$$\rho = \left[кг/м^3 \right] = \left[ML^{-3} \right];$$

$$\mu = [Па \cdot с] = \left[Н \cdot с/м^2 \right] = \left[кг/м \cdot с \right] = \left[ML^{-1}T^{-1} \right];$$

$$g = \left[м/с^2 \right] = \left[LT^{-2} \right];$$

$$l = [м] = [L];$$

$$d = [м] = [L].$$

Учитывая, что размерности обеих частей уравнения (21) одинаковы, а x – безразмерный коэффициент, заменим в нем все величины их размерностями

$$[\Delta p] = [v]^y [\rho]^z [\mu]^u [g]^r [l]^s [d]^t$$

или при подстановке конкретного выражения размерностей каждой величины получаем

$$ML^{-1}T^{-2} = \left[LT^{-1} \right]^y \left[ML^{-3} \right]^z \left[ML^{-1}T^{-1} \right]^u \left[LT^{-2} \right]^r [L]^s [L]^t. \tag{22}$$

Раскрывая скобки в правой части (2.22) и группируя однородные члены, находим

$$ML^{-1}T^{-2} = M^{z+u} \cdot L^{y-3z-u+r+s+t} \cdot T^{-y-u-2r}. \qquad (23)$$

Приравнивая показатели степеней при одинаковых членах, т. е. основных единицах в обеих частях уравнения (23), получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 1 &= z + u \\ -1 &= y - 3z - u + r + s + t \\ -2 &= -y - u - 2r \end{aligned}\right\}. \qquad (24)$$

В системе (24) из трех уравнений – шесть неизвестных, поэтому любые три из этих переменных можно выразить через три других

$$z = 1 - u;$$
$$t = r - s - u;$$
$$y = 2 - 2r - u.$$

Подставим значения показателей степеней z, t, y в степенную зависимость (21)

$$\Delta p = x\ v^{2-2r-u}\rho^{1-u}\mu^{u} g^{r} l^{s} d^{r-s-u} \text{ или } \Delta p = x\ v^{2}v^{-2r}v^{-u}\rho^{1}\rho^{-u}\mu^{u} g^{r} l^{s} d^{r} d^{-s} d^{-u}. \qquad (25)$$

Сгруппировав отдельные величины в (25), находим обобщенную зависимость для определения перепада давлений

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = x\left(\frac{vd\rho}{\mu}\right)^{-u}\left(\frac{v^2}{gd}\right)^{-r}\left(\frac{l}{d}\right)^{s}. \qquad (26)$$

Таким образом, искомая функция, в соответствии с π-теоремой, представлена в виде соотношения между четырьмя безразмерными комплексами величин – критериями подобия Эйлера, Рейнольдса, Фруда и симплексом геометрического подобия. Числовые значения коэффициента x и показателей степеней u, r, s должны быть найдены опытным путем.

Величины, численные значения которых не зависят от выбора основных единиц измерения, называются *безразмерными*.

Методы подобия и размерностей тесно связаны между собой и указывают, как должен быть поставлен эксперимент, как составить программу исследований и каким требованиям должна удовлетворять модель, какие величины надо измерять в опытах и какие приборы при этом надо использовать, как следует обрабатывать полученные результаты и на какие явления их можно распространить, как обобщать и анализировать данные экспериментов.

Безразмерные степенные комплексы, составленные из величин, существенных для данного процесса, называются *числами подобия.* Число подобия, содержащее только заданные по условию задачи параметры, называется *критерием подобия* и обозначается первыми двумя буквами фамилий известных ученых, работавших в соответствующей области.

Безразмерные комплексы

Наименование	Обозначение	Сопоставляемые эффекты	Примечания
Число Рейнольдса	$Re \equiv \dfrac{vd\rho}{\mu}$	Силы инерции и трения (или перенос количества движения конвекцией и внутренним трением)	v – скорость, l – длина, μ – динамический коэффициент вязкости
Число Фруда	$Fr \equiv \dfrac{v^2}{gl}$	Силы инерции и гравитации	g – ускорение свободного падения
Число Эйлера	$Eu \equiv \dfrac{\Delta p}{\rho v^2}$	Силы давления и инерции	Δp – перепад давления, ρ – плотность
Число Лагранжа	$La \equiv \dfrac{\Delta p l}{\mu v}$	Силы давления и трения	μ– динамический коэффициент вязкости
Число Галилея	$Ga \equiv \dfrac{gl^3}{v^2}$	Силы гравитации и трения	—
Число Архимеда	$Ar \equiv \dfrac{gl^3}{v^3} \cdot \dfrac{\Delta p}{p}$	Подъемная сила и сила трения	$\Delta\rho$– разность плотностей
Число Грасгофа	$Ga \equiv \dfrac{gl^3}{v^3} \beta\Delta T$	Термическая подъемная сила и сила трения	β – коэффициент объемного расширения, T – разность температур
Число Нуссельта	$Nu \equiv \dfrac{\alpha l}{\lambda}$	Перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью через неподвижный пристеночный слой жидкости	α – коэффициент теплоотдачи, λ – теплопроводность жидкости
Число Пекле	$Pe \equiv \dfrac{v l}{a}$	Перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью	—

Критерий Био	$Bi \equiv \frac{\alpha\, l_o}{\lambda}$	Внутреннее и внешнее термические сопротивления	λ – теплопроводность твердой стенки, l_0 – определяющий размер
Число Фурье	$Fo \equiv \frac{a\, r}{l_2}$	Темпы изменения температуры в окружающей среде и внутри тела	—
Критерий Прандтля	$Pr \equiv \frac{\nu}{a}$	Перенос количества движения и теплоты посредством молекулярного механизма	—