

## Лабораторная работа № 1

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

#### ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПРИБОРЕ ОБЕРБЕКА

#### Теоретическое введение

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения.

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются угол поворота (угловое перемещение)  $\vec{\varphi}$ , угловая скорость  $\vec{\omega}$ , угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$ .

Твердое тело, способное вращаться вокруг неподвижной оси, приобретает под действием момента внешних сил угловое ускорение.

При этом вектор момента сил  $\vec{M}$  и вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  связаны соотношением

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $J$  – момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

Соотношение (1) является основным законом динамики вращательного движения тела относительно оси вращения и по виду напоминает второй закон Ньютона,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , для поступательного движения тел. В соотношении (1) вместо векторной суммы сил  $\vec{F}$  входит результирующий момент сил  $\vec{M}$ , вместо ускорения  $\vec{a}$  – угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$ . Инертные свойства тела при его вращательном движении определяются моментом инерции  $J$ .

#### Содержание работы

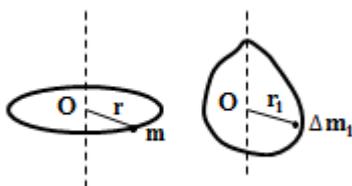


Рис. 1.

Момент инерции можно определить экспериментально, например, на приборе Обербека.

Момент инерции твердого тела зависит от распределения масс тела относительно оси вращения.

Для материальной точки массы  $m$ , удаленной на расстоянии  $r$  от оси вращения, момент инерции имеет вид (см. рис. 1)

$$J = mr^2. \quad (2)$$

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции материальных точек, из которых состоит тело, то есть

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad \text{или}$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^V \rho r^2 dV \quad (3)$$

Интегрирование проводится по объему тела  $V$ ,  $\rho$  – плотность тела.

Прибор Обербека представляет собой крестообразный маховик (см. рис. 2), приводимый в движение грузом массы  $m_0$ . Маховик имеет двухступенчатый диск с радиусам  $r_1$  и  $r_2$ . На четырех стержнях 2, закрепленных на крестовине маховика, расположены грузы 3 одинаковой массы  $m$  на равных расстояниях  $R$  от оси вращения.

Нить, на которой закреплен подвижный груз  $m_0$ , наматывается предварительно на один из шкивов двухступенчатого диска, рис. 2.

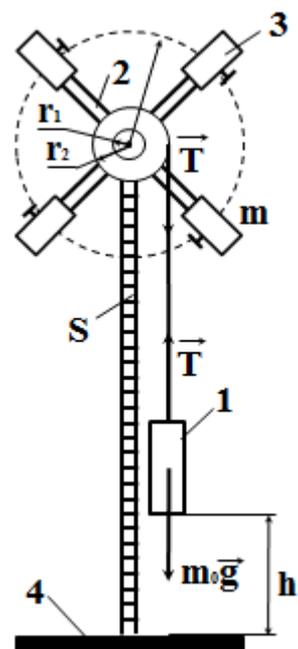


Рис. 2.

На подвижный груз действует сила тяжести  $m_0 \vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{T}$ . На основании 2-го закона Ньютона имеем

$$m_0 g - T = m_0 a, \quad (4)$$

где  $a$  – ускорение поступательного движения груза массой  $m_0$ .

В (4) указаны проекции сил и ускорения на вертикальную координатную ось.

На крестообразный маховик действует момент силы натяжения нити

$$M = Tr = m_0(g - a)r. \quad (5)$$

Основной закон динамики вращательного движения тела относительно оси вращения имеет вид

$$M = J\varepsilon \quad \text{или с учетом (4)} \quad m_0(g - a)r = J\varepsilon, \quad (6)$$

где  $M$  – проекция момента силы натяжения нити на ось вращения,  $\varepsilon$  – проекция углового ускорения на ту же ось,  $J$  – момент инерции

крестообразного маховика относительно оси вращения. Величина  $r$  принимает два значения:  $r_1$  и  $r_2$ .

Ускорение поступательного движения подвижного груза массой  $m_0$  численно равно тангенциальной составляющей ускорения  $a_\tau$  любой точки поверхности шкива двухступенчатого диска, на которую намотана нить.

Последнее утверждение справедливо, если нить нерастяжима и отсутствует скольжение нити относительно поверхности шкива. С учетом последних предположений справедливы следующие равенства

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Совместное решение уравнений (4), (5), (6), (7) имеет вид

$$a = \frac{m_0 g}{m_0 + \frac{J}{r^2}}, \quad (8)$$

где  $r$  равно или  $r_1$ , или  $r_2$ .

Из (8) следует, что подвижный груз  $m_0$  движется равноускоренно. Для равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью путь, ускорение и время движения связаны соотношением

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (9)$$

где  $h$  – путь, пройденный грузом массы  $m_0$  за время  $t$ .

Из (8) и (9) следует расчетная формула для определения момента инерции маховика по измеренным на опыте величинам  $m_0, h, r, t$ :

$$J = \frac{m_0 r^2 (gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (10)$$

### **Порядок выполнения работы**

Принадлежности: 1) крестообразный маховик с грузами; 2) секундомер;  
3) штангенциркуль; 4) измерительная линейка.

**Задание 1.** Определение момента инерции крестообразного маховика без грузов (ненагруженного маховика).

1. Снять грузы массой  $m$  со стержней крестообразного маховика.
2. Измерить штангенциркулем радиусы шкивов  $r_1$  и  $r_2$  с учетом абсолютной погрешности  $\Delta r$ .
3. Измерить время движения  $t$  груза массой  $m_0$  с определенной высоты  $h$ . Для этого, осторожно вращая маховик за спицы, поднять груз  $m_0$  на высоту  $h$ . Рекомендуемые значения  $h$  указаны в паспорте установки. Одновременно отпустить маховик и включить секундомер. В момент удара груза о пол выключить секундомер. Измерение времени  $t$  для одной и той же высоты провести 3 ÷ 5 раз и найти среднее время  $\langle t \rangle$  движения груза массой  $m_0$ .
4. По вертикальной шкале измерить высоту  $h$  с учетом погрешности  $\Delta h$ .
5. Результаты измерений, указанных в пп.2 ÷ 4, занести в таблицу 1 с указанием абсолютных погрешностей всех измеренных величин.
6. По данным измерений вычислить по формуле (10) момент инерции крестообразного маховика без грузов  $J_0$ .
7. Намотать нить на шкив другого радиуса, повторить опыт (п. 3), по данным опыта вычислить момент инерции маховика  $J'_0$ .
8. Найти среднее значение момента инерции ненагруженного крестообразного маховика:  $\langle J_0 \rangle = \frac{J_0 + J'_0}{2}$ .

Таблица 1

$m \pm \Delta m =$	
$m_0 \pm \Delta m_0 =$	
$h \pm \Delta h =$	
$r_1 \pm \Delta r_1 =$	$r_2 \pm \Delta r_2 =$
$t_1 =$	$t_1 =$
$t_2 =$	$t_2 =$
$t_2 =$	$t_2 =$
$\langle t \rangle \pm \Delta t =$	$\langle t \rangle \pm \Delta t =$
$J_0 =$	$J'_0 =$
$\langle J_0 \rangle + \Delta J_0 =$	

**Задание 2.** Определение момента инерции крестообразного маховика с грузами (нагруженного маховика).

1. Закрепить грузы массой  $m$  на спицах крестообразного маховика на равных расстояниях  $R$  от оси вращения. Значение  $R$  взять примерно равным 0,9 длины спицы.
2. Измерить расстояние  $R$  от оси вращения до центров грузов и оценить абсолютную погрешность  $\Delta R$ .
3. Измерить время движения  $t$  груза массой  $m_0$  с определенной высоты  $h$ , действуя согласно пункту 3 задания 1. Затем рассчитать момент инерции крестообразного маховика с грузами массой  $m$  (нагруженного маховика)  $J_1$  по формуле (10). Повторить измерение момента инерции  $J_1'$  крестообразного маховика с грузами массой  $m$ , используя шкив другого радиуса. Найти среднее значение момента инерции  $\langle J_1 \rangle$  крестообразного маховика с грузами массой  $m$ :  $\langle J_1 \rangle = \frac{J_1 + J_1'}{2}$ .
4. Полученные значения оформить в виде таблице, форма которой аналогична таблице 1.

**Задание 3.** Определение момента инерции груза массой  $m$ .

1. По данным, полученным в заданиях 1 и 2 вычислить момент инерции груза массой  $m$  по формуле:

$$J = \frac{\langle J_1 \rangle - \langle J_0 \rangle}{4}. \quad (11)$$

Последнее выражение написано на основании свойства *аддитивности* момента инерции: момент инерции составного тела равен сумме моментов инерции составных частей. Это свойство следует непосредственно из выражения (3). Следовательно, нагруженный грузами массой  $m$  маховик можно рассматривать как составное тело: ненагруженный маховик + четыре груза массой  $m$ .

2. Полученное по формуле (11) значение момента инерции груза массой  $m$  сравнить с величиной момента инерции груза, вычисленного по формуле (2):

$$J_T = mR^2, \quad (12)$$

где  $R$  — расстояние от центра масс грузов до оси вращения. В последнем случае грузы массой  $m$  рассматриваются как материальные точки.

**Задание 4.** Проверка основного закона динамики вращательного движения.

1. По данным, полученным в задании 2 для маховика с грузами массой  $m$ , вычислить по формуле (9) величины ускорений  $a_1$  и  $a_2$  груза массой  $m_0$  для радиусов шкива  $r_1$  и  $r_2$  и затем найти с помощью формулы (7) соответствующие угловые ускорения крестообразного маховика  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .
2. С помощью формулы (4) найти силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$ , соответствующие радиусам шкивов  $r_1$  и  $r_2$ . Вычислить моменты сил натяжения  $M_1$  и  $M_2$  для радиусов шкива  $r_1$  и  $r_2$ , используя формулу (5).
3. Убедиться в справедливости соотношения (6) непосредственной подстановкой найденных значений  $M_1, M_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ : 
$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2}.$$

**Задание 5.** Определение погрешности измерений.

По данным одного из измерений оценить максимальную погрешность в определении момента инерции крестообразного маховика.

Формулу (10) можно упростить, написав ее в виде:

$$J = \frac{m_0 r^2 g t^2}{2h}, \quad (13)$$

учитывая, что  $a \ll g, \frac{gt^2}{2h} \gg 1$ .

1. На основании выражения (13) составить формулу для максимальной относительной ошибки косвенного измерения момента инерции.
2. Вычислить относительную и абсолютную ошибки измерения момента инерции крестообразного маховика без грузов и с грузами. Абсолютные погрешности  $\Delta J_0$  и  $\Delta J_1$  занести в соответствующие в таблицы.

### **Контрольные вопросы**

1. Как направлены вектора углового перемещения, угловой скорости, углового ускорения вращательного движения?
2. Дайте определение момента инерции относительно оси вращения. От чего зависит момент инерции?
3. Что называется моментом силы относительно оси вращения? Как определяется направление момента силы?
4. Дайте наиболее общую характеристику основного закона динамики вращательного движения.
5. Дайте сравнительную характеристику вращательному и поступательному движениям, их основным кинематическим и динамическим характеристикам, а также уравнениям и способам их решения.
6. Опишите устройство прибора Обербека и его работу.
7. Укажите, какие величины, описывающие работу прибора Обербека, являются векторными, а какие скалярными.
8. Объясните вывод расчетной формулы для момента инерции груза.
9. Укажите источники потерь энергии в приборе Обербека.
10. Как влияют на точность измерений момента инерции неодинаковые значения расстояний, на которых закрепляются тела на стержнях крестовины?
11. При каких условиях сила натяжения нити и сила тяжести груза равны?
12. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения с учетом сил трения.