ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 121

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

1.Цель работы

Экспериментальное исследование колебательного движения физического маятника на примере маятника электрических часов. Определение момента инерции физического маятника.

2.Теоретические сведения

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Простейшими колебаниями являются *гармонические*, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по законам синуса или косинуса.

В механике гармонические колебания возникают (рис.1), если на тело действует упругая сила (сила Гука)

$$F = -kx\,,$$

где x - смещение тела от положения равновесия; k - коэффициент упругости. Знак «-» указывает на то, что сила действует в сторону, противоположную смещению. Второй закон Ньютона (для одномерного движения) при действии упругой силы записывается в виде

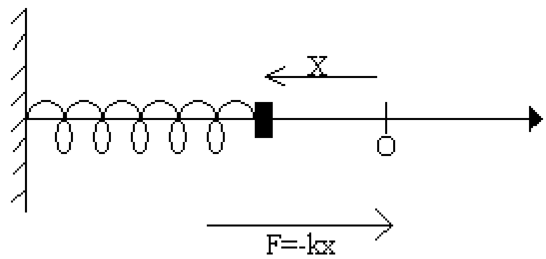

рис.1

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,.$$

Это уравнение, записанное как

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0\,, \tag{1}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Его решением будет гармоническая функция

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \alpha)\,, \tag{2}$$

где x_0 - амплитуда колебаний, равная наибольшему отклонению тела от положения равновесия; ω_0 - циклическая (круговая) частота; ($\omega_0 t$ + α) - фаза; α- начальная фазой колебаний.

Важными величинами, характеризующими гармонические колебания, являются также период T и частота ν. *Период колебаний* T - это время, за которое колебательная система возвращается в исходное положение, пройдя все промежуточные состояния. Число колебаний в единицу времени называется *частотой колебаний* ν. Циклическая частота (число колебаний за время 2π секунд) ω_0, частота и период колебаний связаны между собой соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

Любое твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести, называется *физическим маятником.*

Покажем, что маятник, отклоненный от положения равновесия на малый угол φ, будет совершать колебания, близкие к гармоническим.

Пусть J - момент инерции маятника относительно оси закрепления O , а точка A является центром тяжести тела. Силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых $\vec{P}_2$ уравновешивается реакцией опоры и не оказывает влияния на колебания. Маятник совершает колебание под действием другой составляющей $\vec{P}_1$; $P_1 = mg\sin\varphi$, образующей вращательный момент M относительно оси O: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}]$.

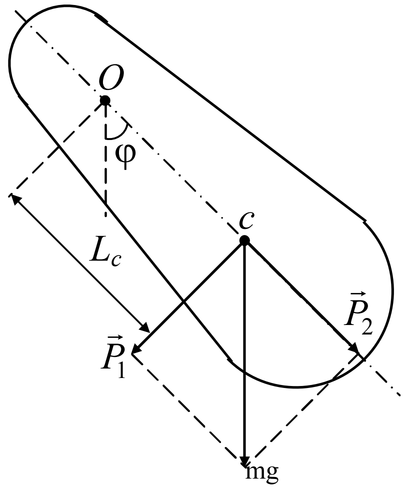

РИС.2

На основании основного закона динамики вращательного движения $M_z = J\varepsilon$, имеем

$$J\varepsilon = -mgL_c \sin\varphi, \tag{4}$$

где ε - угловое ускорение. По определению $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$, L_c - расстояние от центра тяжести до точки подвеса O.

После элементарных преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgL_c}{J}\sin\varphi = 0. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (5) не решается в элементарных функциях, однако его можно упростить для случая малых колебаний. Если угол φ, выраженный в радианной мере, не слишком велик, то справедливо приближенное равенство $\sin\varphi \approx \varphi$.

Обозначим $\omega_0^2 = mgL_c/J$, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника примет вид, аналогичный уравнению (1)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{6}$$

Решение дифференциального уравнения (6), в соответствии со сказанным ранее, может быть записано в виде

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

Период колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL_c}} . \quad (7)$$

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Под ним понимают материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити, которая совершает колебания под действием силы тяжести в вертикальной плоскости.

Поскольку момент инерции материальной точки массы m относительно оси, удаленной на расстояние L, равен mL^2, то формула (7) примет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (8)$$

При анализе колебаний физического маятника удобно пользоваться понятием *приведенной длины* физического маятника $L_{\text{пр}}$, которой называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника. Сравнивая формулы (7) и (8), получим

$$L_{\text{пр}} = J/mL_c .$$

3.Экспериментальная установка

В данной работе в качестве физического маятника используется маятник часов, показанный на рис. 3. Поскольку период колебаний физического маятника определяется формулой (7), то можно решить обратную задачу: по измеренному периоду колебаний определить момент инерции маятника относительно оси подвеса

$$J = \frac{mgL_cT^2}{4\pi^2} . \quad (9)$$

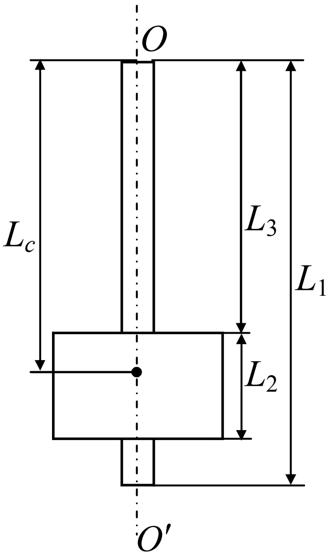

Рис.3

Такой маятник с достаточной степенью точности можно рассматривать как систему, состоящую из цилиндрического стержня массой m_1 и груза массой m_2. Для определения момента инерции по формуле (11) (9) надо знать период колебаний маятника, его общую массу и расстояние от оси закрепления до центра масс (центра тяжести) маятника L_c. Положение центра масс системы тел вычисляется по формуле

$$\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i , \quad (10)$$

где радиус-векторы $\vec{r}_i$ задают положение центров масс стержня и груза.

Из соображений симметрии центр масс маятника будет лежать на оси OO', где находятся центры масс, входящих в систему цилиндров. Применяя формулу (10), получим

$$L_c = \frac{m_1 L_1 + m_2(2L_3 + L_2)}{2(m_1 + m_2)}, \tag{11}$$

где L_c - расстояние от точки подвеса маятника O до его центра масс; L_1- длина стержня; L_2 - высота груза; L_3 - расстояние от верхнего края груза до точки O подвеса маятника.

4. Проведение измерений.

1. Измерьте время t, за которое совершается n =10 колебаний маятника, проведя 3 однотипных измерения.

2. Рассчитайте периоды колебаний для каждого опыта по формуле:

$$T_i = t_i / n, \tag{12}$$

где i - номер опыта. Результаты запишите в таблицу 1.

Таблица 1

№ опыта i	t_i (с)	T_i (с)	$J_{Эi}$ (кг·м^2)	$< J_{Эi} >$ (кг·м^2)	$\Delta J_{Эi} = J_{Эi} - < J_Э >$	$\sum_{i=1}^{N}(\Delta J_{Эi})^2$
1						
2						
3						

3. Спишите значения L_1, L_2, L_3 m_1 и m_2 со схемы, помещенной на установке.

5.Обработка результатов

1. По формуле (11) вычислите расстояние L_c от точки подвеса до центра тяжести маятника.

2. Найдите три экспериментальных значения момента инерции физического маятника $J_{Эi}$, используя формулу (9) и учитывая, что $m = m_1 + m_2$. Определите среднее арифметическое значение $< J_Э >$. Результаты расчетов запишите в таблицу 1.

3. Рассчитайте погрешность экспериментального значения момента инерции по формуле

$$\Delta J_Э = t_N(\alpha)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta J_{Эi})^2}{N(N-1)}},$$

где $t_N(\alpha)$ – коэффициент Стьюдента, $N = 3$ – число измерений. С целью контроля вычислений, записывайте промежуточные результаты в таблицу 1.

6. Анализ эксперимента.

1. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции по формуле

$$J_{\text{Т}} = m_2\left[\frac{L_2^2}{3} + L_3(L_2 + L_3)\right] + \frac{m_1 L_1^2}{3}.$$

2. Сравните теоретическое значение со средним арифметическим экспериментальным значением $< J_{\text{Э}} >$:

$$\delta J = \frac{J_{\text{Т}} - < J_{\text{Э}} >}{J_{\text{Т}}} \cdot 100\%.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение физического маятника.
2. Запишите дифференциальное уравнение, описывающие гармонические колебания. Как получается это уравнение?
3. Запишите уравнение гармонических колебаний и определите величины, входящие в него.
4. От чего зависит период колебаний физического маятника?
5. Выведите выражение, для колебаний математического маятника, исходя из соответствующего выражения для физического маятника.

Литература

1. Курс физики: Учебник для вузов. Т.1./Под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Издательство «Лань», 2000.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. М.,2009.
3. Каленков С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1990.