ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Время выполнения – 4 часа.

Цель работы

Изучить основы алгебры логики.

Задачи лабораторной работы

В результате прохождения занятия студент должен:

1) знать:

– определения основных понятий (простое и сложное высказывания, логические операции, логические выражения, логическая функция);
– порядок выполнения логических операций;
– алгоритм построения таблиц истинности;
– схемы базовых логических элементов;
– законы логики и правила преобразования логических выражений;

2) уметь:

– применять загоны логики для упрощения логических выражений;
– строить таблицы истинности;
– строить логические схемы сложных выражений.

Общие теоретические сведения

Логической основой компьютера является алгебра логики, которая рассматривает логические операции над высказываниями.

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример: «3 – простое число» является высказыванием, поскольку оно истинно.

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Пример: предложение «Давайте пойдем в кино» не является логическим высказыванием. Вопросительные и побудительные предложения логическими высказываниями не являются.

Высказывательная форма – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Пример.

«$x+2>5$» – высказывательная форма, которая при $x>3$ является истинной, иначе ложной.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения – является ли оно истинным или ложным. Слова и словосочетания «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными (сложными)**. Высказывания, которые не являются составными, называются **элементарными (простыми)**.

Пример.

Высказывание «Число 6 делится на 2» - простое высказывание. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - составное высказывание, образованное из двух простых с помощью логической связки «и».

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают **имена**.

Пример.

Обозначим через A простое высказывание «число 6 делится на 2», а через B простое высказывание «число 6 делится на 3». Тогда составное высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» можно записать как «A и B». Здесь «и» – логическая связка, A, B – логические переменные, которые могут принимать только два значения – «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение (табл. 1).

Таблица 1. Основные логические операции

Обозначение операции	Читается	Название операции	Альтернативные обозначения
$\neg$	НЕ	Отрицание (инверсия)	Черта сверху
$\wedge$	И	Конъюнкция (логическое умножение)	$\cdot$ &
$\vee$	ИЛИ	Дизъюнкция (логическое сложение)	$+$
$\rightarrow$	Если … то	Импликация	$\supset$
$\leftrightarrow$	Тогда и только тогда	Эквиваленция	$\sim$
XOR	Либо …либо	Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)	$\oplus$

НЕ Операция, выражаемая словом «не», называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком ¬). Высказывание ¬A истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Пример.

Пусть A=«Сегодня пасмурно», тогда ¬A=«Сегодня не пасмурно».

И Операция, выражаемая связкой «и», называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio – соединение) или логическим умножением и обозначается знаком $\wedge$ (может также обозначаться знаком & или точкой «$\cdot$»). Высказывание A $\wedge$ B истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Пример.

Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 больше 10» - ложно.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой «или» (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio – разделение) или логическим сложением и обозначается знаком $\vee$ (или плюсом). Высказывание A$\vee$B ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Пример.

Высказывание «Число 6 делится на 2 или число 6 больше 10» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 5 или число 6 больше 10» - ложно.

ЕСЛИ … ТО Операция, выражаемая связками «если …, то», «из … следует», «... влечет …», называется **импликацией** (лат. implico – тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$. Высказывание A$\rightarrow$B ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Пример.

Высказывание «если студент сдал все экзамены на «отлично», то он получит стипендию». Очевидно, эту импликацию следует признать ложной лишь в том случае, когда студент сдал на «отлично» все экзамены, но стипендии не получил. В остальных случаях, когда не все экзамены сданы на «отлично» и стипендия получена (например, в силу того, что студент проживает в малообеспеченной семье) либо когда экзамены вообще не сданы и о стипендии не может быть и речи, импликацию можно признать истинной.

РАВНОСИЛЬНО Операция, выражаемая связками «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «... равносильно …», называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или $\sim$. Высказывание A$\leftrightarrow$B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

Пример.

Высказывание «Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Число является нечетным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» - ложно.

ЛИБО … ЛИБО Операция, выражаемая связками «Либо … либо», называется **исключающее ИЛИ** или сложением по модулю 2 и обозначается XOR или $\oplus$. Высказывание A$\oplus$B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B не совпадают.

Пример.

Высказывание «Число 6 либо нечетно либо делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Либо число 6 четно либо число 6 делится на 3» – ложно, так как истинны оба высказывания входящие в него.

Замечание. Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$.

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Исключающее ИЛИ можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$A \text{ XOR } B = (\neg A \wedge B) \vee (\neg \mathrm{B} \& \mathrm{A})$

Вывод. Операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания («не»), затем конъюнкция («и»), после конъюнкции – дизъюнкция («или») и исключающего или и в последнюю очередь – импликация и эквиваленция.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой (логическим выражением).

Логическая формула – это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).

Логическая функция – это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

Пример.

$F(\mathrm{A,B}) = \mathrm{A} \& \mathrm{B} \vee A$ – логическая функция двух переменных A и B.

Значения логической функции для разных сочетаний значений входных переменных – или, как это иначе называют, наборов входных переменных – обычно задаются специальной таблицей. Такая таблица называется **таблицей истинности**.

Приведем таблицу истинности основных логических операций (табл. 2)

Таблица 2.

A	B	$\neg A$	A&B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \text{ XOR } B$
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Опираясь на данные таблицы истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для более сложных формул.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:
– количество строк = 2^n + строка для заголовка,
– n - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:

количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;

– определить количество переменных (простых выражений);

– определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример.

Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A\&B)$.

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк $=2^2+1=5$.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности для логической операции $\neg(A\&B)$

A	B	$A\&B$	$\neg(A\&B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \vee B)$.

Таблица 4. Таблица истинности для логической операции $\neg(A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Примечание: И–НЕ называют также «штрих Шеффера» (обозначают |) или «антиконъюнкция»; ИЛИ–НЕ называют также «стрелка Пирса» (обозначают ↓) или «антидизъюнкция».

Пример.

Составить таблицу истинности логического выражения $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$.

Решение:

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: A и B, поэтому n=2 и количество строк=2^2+1= 5.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (A и B) и пяти логических операций (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 7.

Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности для логической операции $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \& B$	$A \& \neg B$	C
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

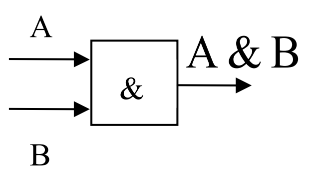
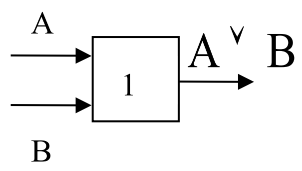
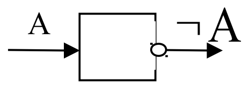
Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

логический элемент «И» – логическое умножение – конъюнктор;

логический элемент «ИЛИ» – логическое сложение – дизъюнктор;

логический элемент «НЕ» – инверсию – инвертор.

конъюнктор	дизъюнктор	инвертор
		

Поскольку любая логическая операция может быть представлена в виде комбинации трех основных, любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации, могут быть собраны из базовых логических элементов, как из “кирпичиков”.

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс – логический смысл сигнала – 1, нет импульса – 0. На входы логического элемента поступают сигналы-значения аргументов, на выходе появляется сигнал-значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задается таблицей состояний, которая фактически является таблицей истинности, соответствующей логической функции, только представлена в форме логических схем. В такой форме удобно изображать цепочки логических операций и производить их вычисления.

Алгоритм построения логических схем.

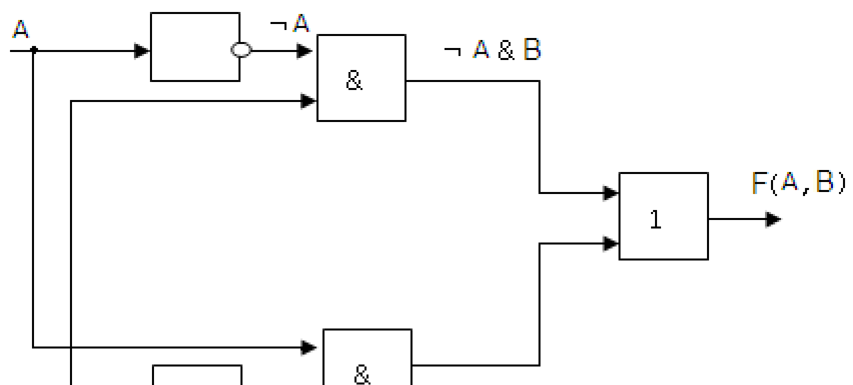
1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример.

По заданной логической функции $F(\text{A,B}) = \neg\text{A}\&\text{B} \vee \text{A}\&\neg B$ построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (А и В).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция). Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).



Задания

1. Составить таблицу истинности логического выражения C.

Варианты задания:

№ варианта	C
1	$(\neg(\mathrm{A\&B}))\leftrightarrow(A\vee\neg B)$ XOR A
2	$(\mathrm{A\&B})\leftrightarrow(\neg\mathrm{A\&B})$ XOR B
3	$(\mathrm{A\&B})\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$ XOR A
4	$\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg\mathrm{A}\&\neg B)$ XOR B
5	$(A\vee B)\leftrightarrow\neg(\mathrm{A}\&\neg B)$ XOR B
6	$\neg(\mathrm{A\&B})\leftrightarrow(\neg A\vee B)$ XOR A
7	$\neg(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$ XOR A
8	$(\neg\mathrm{A\&B})\leftrightarrow(\neg B\rightarrow A)$ XOR B
9	$(A\vee\neg B)\leftrightarrow\neg(\mathrm{B\&A})$ XOR A
10	$(\neg\mathrm{B\&A})\leftrightarrow(A\rightarrow\neg B)$ XOR B
11	$(\neg A\vee\neg B)\leftrightarrow(\neg\mathrm{B\&A})$ XOR A
12	$(\neg B\rightarrow\neg A)\leftrightarrow(A\vee B)$ XOR B
13	$\neg(B\vee A)\leftrightarrow(\neg A\rightarrow B)$ XOR A
14	$(\neg(\mathrm{A\&B}))\leftrightarrow(\neg A\rightarrow B)$ XOR B
15	$(\neg A\rightarrow\neg B)\leftrightarrow(\mathrm{B\&A})$ XOR B
16	$(\neg A\vee\neg B)\leftrightarrow(B\vee\neg A)$ XOR A

2. Построить логическую схему функции F(A,B).

Варианты задания:

№ варианта	F(A,B)
1	¬(A & B) ∨ (¬(B ∨ A))
2	¬(A ∨ B) & (A & ¬B)
3	¬(A ∨ B) & (A ∨ ¬B)
4	¬((¬A ∨ B) & (¬B ∨ A))
5	(¬A ∨ B) & (¬B ∨ ¬A)
6	(¬A ∨ B) & ¬(A ∨ ¬B)
7	¬(¬A & ¬B) ∨ (A ∨ B)
8	(¬A ∨ B) ∨ ¬(A & B)
9	(A & B) ∨ ((A ∨ B) ∨ ¬A)
10	¬((¬A ∨ B) & A) & ¬B
11	¬(A ∨ ¬B) ∨ ¬(A ∨ B)
12	¬A & ¬B ∨ ¬(A ∨ B)
13	¬A ∨ B ∨ ¬(¬B ∨ A)
14	(¬A & ¬B) ∨ (¬A & B)
15	(¬A & B) ∨ (A & ¬B)
16	¬(A & (B ∨ A) ∨ ¬B)

3. Составить таблицу истинности и логическую схему для функции X.

№ варианта	D
1	$X = \neg(\neg A \vee B) \vee A \vee \neg B \,\&\, C$
2	$X = \neg(C \vee B) \,\&\, A \vee \neg B \vee \neg C$
3	$X = A \vee \neg B \,\&\, A \vee (\neg A \vee C)$
4	$X = \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \vee \neg B) \,\&\, C$
5	$X = \neg A \vee (B \vee A \vee \neg B) \,\&\, C$
6	$X = \neg A \vee B \vee C \vee \neg B \,\&\, A$
7	$X = \neg(\neg A \vee B \vee C) \vee \neg B \vee \neg C$
8	$X = \neg(C \vee B) \,\&\, A \vee \neg B \,\&\, A$
9	$X = \neg(\neg A \vee B) \vee A \vee \neg B \,\&\, \neg C$
10	$X = \neg C \vee A \vee A \vee \neg B \,\&\, C$
11	$X = \neg(\neg A \vee B) \,\&\, C \vee \neg B \vee A$
12	$X = \neg A \vee C \,\&\, A \vee \neg B \,\&\, \neg C$
13	$X = \neg(\neg A \vee B) \vee A \vee \neg B \vee C$
14	$X = \neg(A \vee B) \,\&\, C \vee \neg B \,\&\, B$
15	$X = \neg(\neg B \,\&\, A) \vee A \vee \neg B \vee C$
16	$X = \neg(\neg A \vee C) \vee A \vee \neg A \,\&\, \neg B$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными.

1	$A \,\&\, (\neg A \vee B)$ $A \vee B$
2	$\neg(X \vee \neg Y) \vee \neg Y \,\&\, Z$ $\neg X \,\&\, (Y \vee Z)$
3	$A \,\&\, (B \vee C)$ $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
4	$\neg(\neg A \,\&\, B \vee A \,\&\, (B \vee \neg C))$ $\neg B \,\&\, (\neg A \vee C)$
5	$\neg (A \,\&\, B) \,\&\, \neg C$ $\neg A \vee B \vee \neg C$
6	$\neg (\neg A \vee B) \vee \neg C$ $(A \,\&\, \neg B) \vee \neg C$
7	$\neg(A \vee \neg B \vee C)$ $\neg A \,\&\, B \,\&\, \neg C$
8	$A \vee (\neg A \,\&\, B)$ $A \,\&\, B$

9	A & ¬ (¬B ∨ C) A & B & ¬C
10	A ∨ (B & C) (A & B) ∨ (A & C)
11	¬ (A & B) & ¬C (¬A ∨ ¬B) & ¬C
12	¬ (¬A ∨ B) ∨ ¬C ¬A ∨ B ∨ ¬C
13	¬ C ∨ ¬ B ∨ ¬ (A ∨ ¬ C) ¬ A & B ∨ ¬ C & B
14	¬(A ∨ ¬ B ∨ C) A & ¬B & C
15	¬ C ∨ ¬ B ∨ ¬ (A ∨ ¬ C) ¬ A & ¬ B ∨ ¬ C
16	A & ¬ (¬B ∨ C) A & ¬B & ¬C

5. Определить истинность или ложность высказываний.

1	(X>4) & ¬ (X>1) & (X>4) при X=1
2	X>1 & (¬ (X<5) & (X<3)) при X=2
3	¬((X>3) & (X<3)) & (X<1) при X=3
4	(X>4) & ¬(X>1) & (X>4) при X=4
5	(¬(X < 5) & (X < 3)) & (¬ (X< 2) & (X < 1)) при X=1
6	¬(¬(X>2) & (X>3)) при X=2
7	(X>4) ∨ ¬(X>1) ∨ (X>4) при X=3
8	¬((X>2) ∨ (X<2)) ∨ (X>4) при X=4
9	(X>4) ∨ ¬(X>1) ∨ (X>4) при X=1

10	$\neg((X>3) \vee (X<3)) \vee (X<1)$ при X=2
11	$(\neg(X < 5) \vee (X < 3)) \; \& \; (\neg (X< 2) \vee (X < 1))$ при X=3
12	$X>1 \; \& \; (\neg (X<5) \vee (X<3))$ при X=4
13	$\neg((X>2) \vee (X<2)) \vee (X>4)$ при X=1
14	$X>1 \; \& \; (\neg (X<5) \vee (X<3))$ при X=2
15	$\neg(\neg(X>2) \vee (X>3))$ при X=3
16	$\neg((X>3) \vee (X<3)) \vee (X<1)$ при X=4

Контрольные вопросы

1. Что такое логическое высказывание? Приведите примеры истинных и ложных высказываний.
2. Что такое составное логическое высказывание (приведите примеры)?
3. Как называются и как обозначаются следующие логические операции: ИЛИ, НЕ, И, ЕСЛИ … ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ЛИБО …ЛИБО?
4. Укажите приоритеты выполнения логических операций.
5. Составьте таблицу истинности для следующих операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, исключающее или.
6. Изобразите функциональные элементы: конъюнктор, дизъюнктор, инвертор.
7. По поисковым запросам было найдено определенное количество страниц. По запросу «Информатика или Алгебра» найдено 7300 страниц, по запросу «Информатика» – 4800, по запросу «Алгебра» – 4500. Какое количество страниц будет найдено по запросу Информатика & Алгебра?
8. Для каких значений числа X приведенное логическое высказывание $((X<5)\rightarrow(X<3)) \; \& \; ((X< 2)\rightarrow(X<1))$ будет истинно?