1.2. Лабораторная работа № 2
ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ РАМЫ

Теоретическая часть

Рама – это конструкция из ригелей и балок, жестко связанных между собой. Пусть плоская рама закреплена, нагружена силами и моментом сил; и находится в состоянии равновесия.

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю

$$\vec{R} = \sum_k \vec{F}_k = 0, \qquad \vec{M}_O = \sum_k \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0.$$

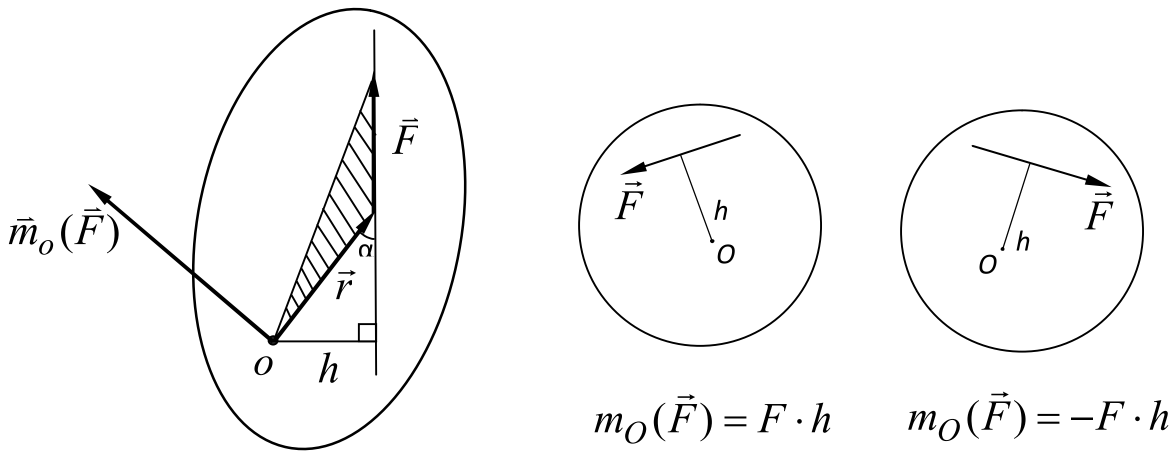
Главный вектор сил – это векторная сумма всех сил системы. Главным моментом сил относительно центра является сумма моментов всех сил относительно этого центра.

Моментом силы относительно центра называют векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы (рис. 1.13а)

$$\vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \left|\vec{m}_O(\vec{F}_k)\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h.$$

Вектор момента направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат центр (точка) и сила в ту сторону, откуда поворот под действием силы наблюдается против хода часовой стрелки. Плечо силы (h) – это кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы.

Если линии действия сил лежат в одной плоскости (плоская система сил), то используют понятие алгебраического момента – произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс, если сила стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки (рис. 1.13б).



а *б*

Рис. 1.13 Момент силы относительно центра:
а – вектор момента, *б* – алгебраический момент

Для решения задач составляют уравнения равновесия. В случае плоской системы сил составляют три уравнения равновесия

$$\sum_k F_{kx} = 0, \qquad \sum_k F_{ky} = 0, \qquad \sum_k m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Чтобы составить уравнения равновесия плоской рамы, необходимо выполнить следующие действия:

1) заменить распределённую нагрузку q сосредоточенной силой: $Q = q \cdot l$. Здесь l – длина, на которой действует распределённая нагрузка q. Точкой приложения силы $\boldsymbol{Q}$ является середина отрезка l.

2) заменить опоры, изображенные на рисунке, реактивными усилиями, которые возникают в балке в ответ на внешнюю нагрузку.

Так, подвижный шарнир характеризуется одной силой реакции, которая перпендикулярна плоскости, по которой движется шарнир (рис.1.14а). Если балка закреплена с помощью неподвижного шарнира, то в данном закреплении возникает сила реакции, направление которой в плоскости неизвестно. Поэтому, силу реакции удобно представить проекциями на оси (рис. 1.14б) $R_A = \sqrt{X_A^{\ 2} + Y_A^{\ 2}}$. При наличии жесткой заделки в балке возникает реакция, которую представляют проекциями на оси, а также возникает реактивный момент (рис. 1.14в). Более подробно с возникающими реактивными усилиями при различных видах закрепления можно ознакомиться в учебнике [1].

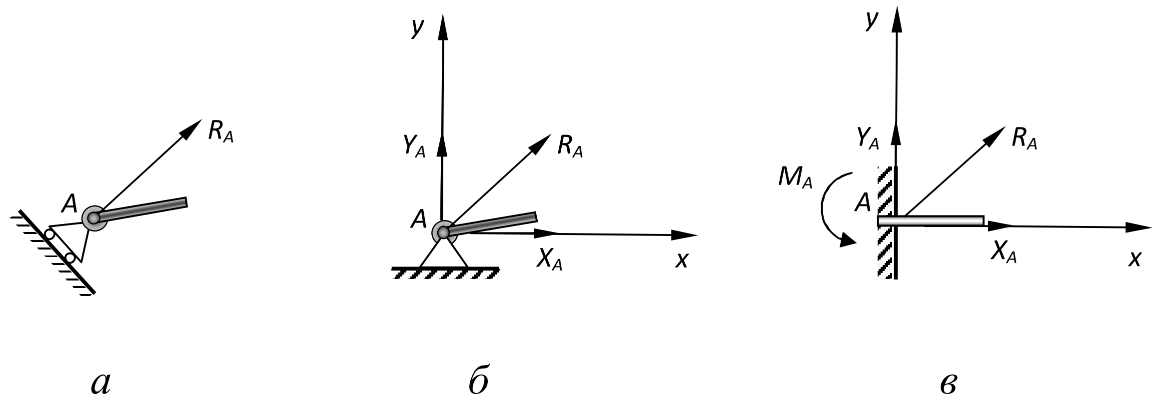


Рис. 1.14. Связи и реакции связей: *а* – подвижный шарнир, *б* – неподвижный шарнир, *в* – жесткая заделка.

3) определить проекции всех сил на оси координат.

4) составить уравнения равновесия сил $\sum_k \vec{F}_k = 0$ в проекциях на оси *Ox* и *Oy:*

$$\sum_k \vec{F}_{kx} = 0, \qquad \sum_k \vec{F}_{ky} = 0.$$

5) составить уравнение моментов относительно центра (точки). При составлении уравнения равновесия моментов

$$\sum_k \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

необходимо помнить, что удобнее в качестве центра вращения выбирать точку, в которой пересекается наибольшее количество неизвестных сил, тогда уравнение моментов будет иметь более простую запись, что способствует более простому и рациональному способу решения уравнений.

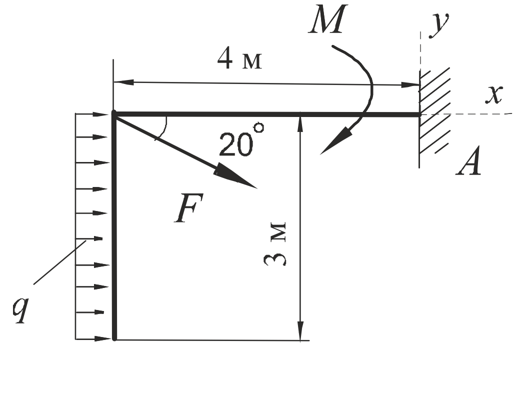
6) решить систему уравнений, начиная решение с того уравнения, в котором содержится одна неизвестная величина.

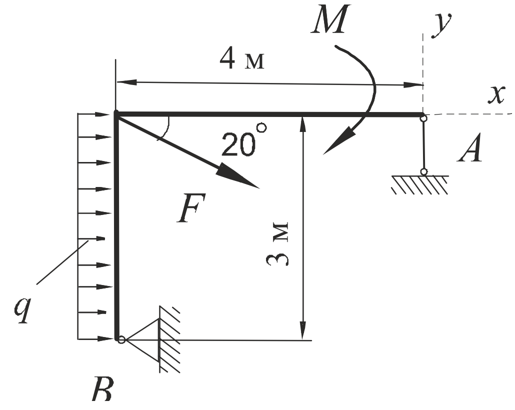
Постановка задачи, задания

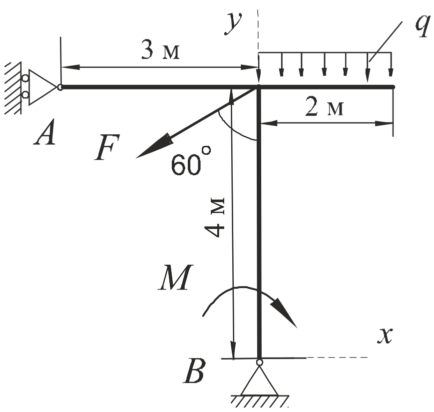
Плоская рама находится в равновесии и нагружена распределенной нагрузкой q, сосредоточенной силой F и моментом сил M. Требуется определить реакции опор плоской рамы для двух видов закрепления рамы для варианта конструкции, который задаёт преподаватель. Сравнить полученные величины реактивных усилий и сделать вывод о том, в каком случае указанная в варианте реакция опоры минимальна. Схемы конструкций приведены в табл. 1.6, необходимые для расчета данные – в табл. 1.7. Расчёты производятся с помощью программного комплекса MathCAD.

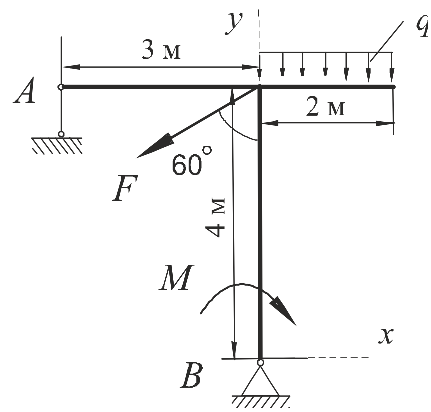
Схемы конструкций

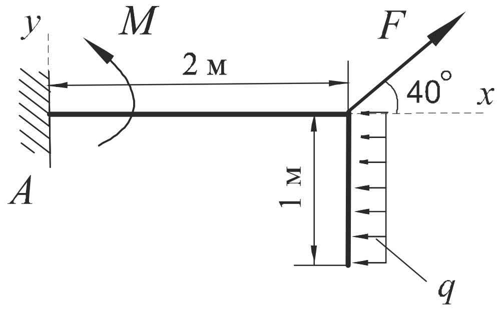
Таблица 1.6

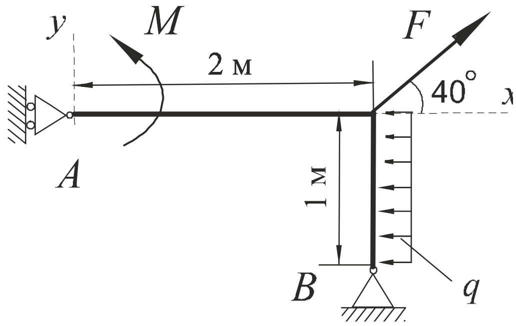
<table>
<tr><td>Вари-
ант</td><td>Схема конструкции для двух вариантов закрепления (a) и (b)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>


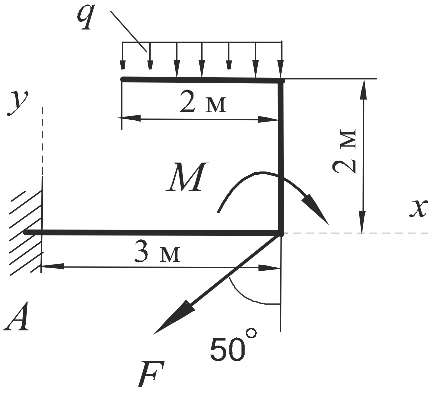
а


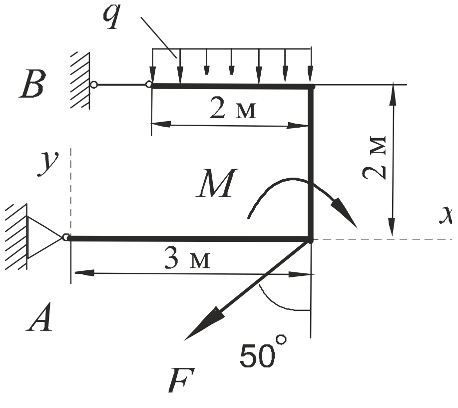
б
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>


а


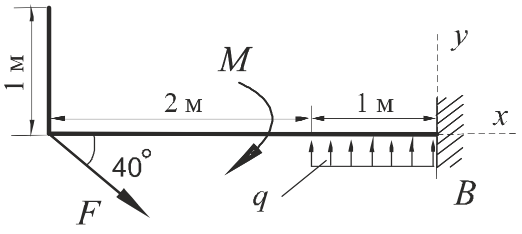
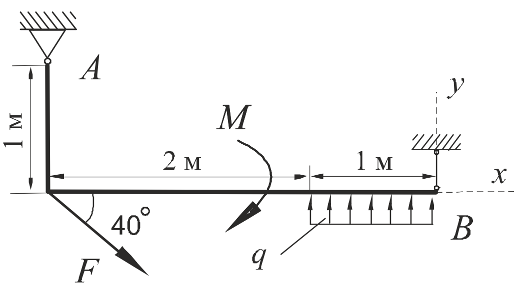
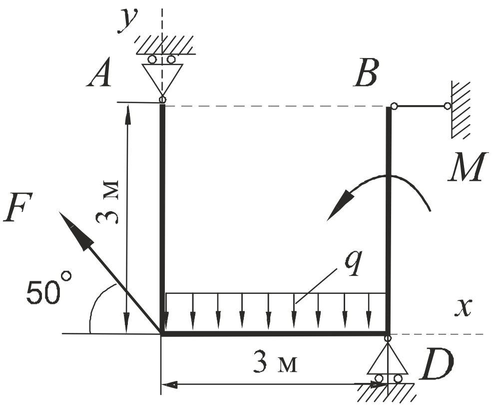
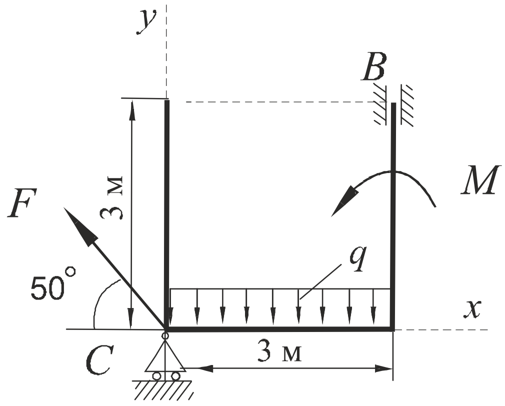
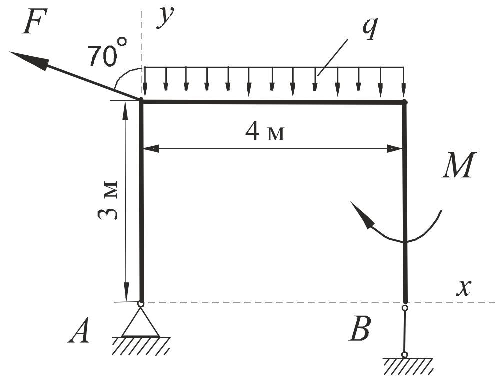
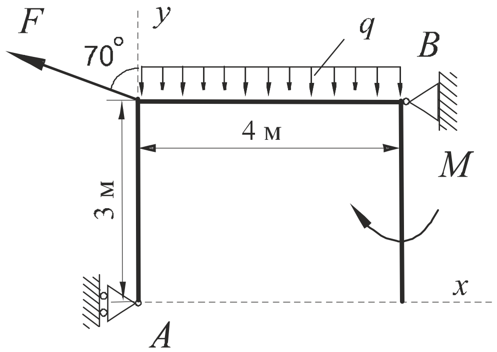
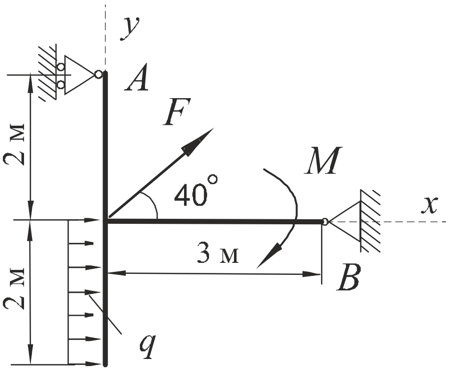
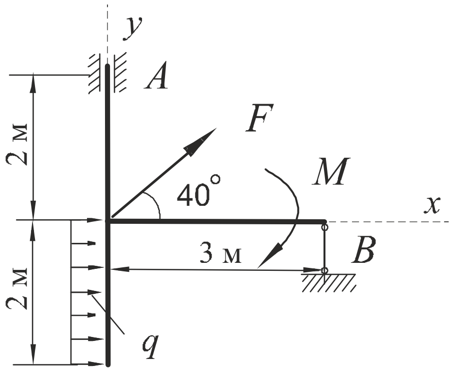
б
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>


а


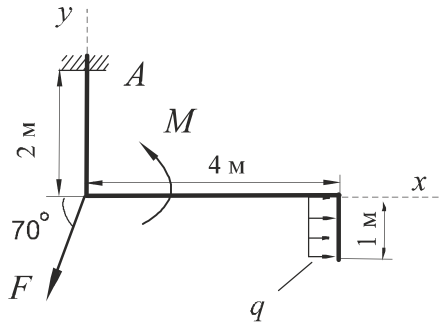
б
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>


а


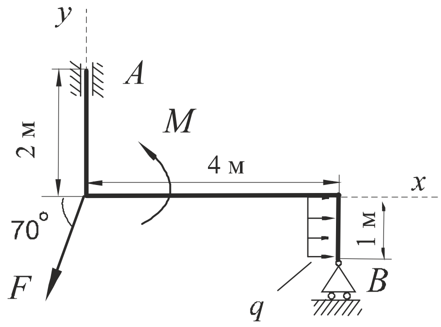
б
</td></tr>
</table>

5	 а  б
6	 а  б
7	 а  б
8	 а  б

9

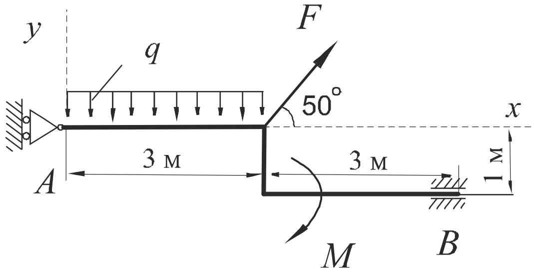


а

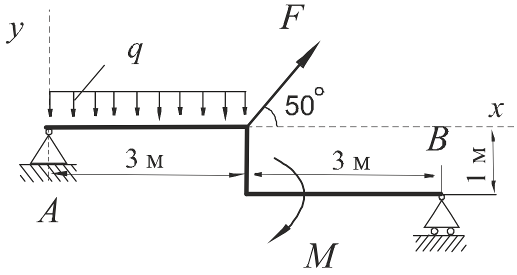


б

10

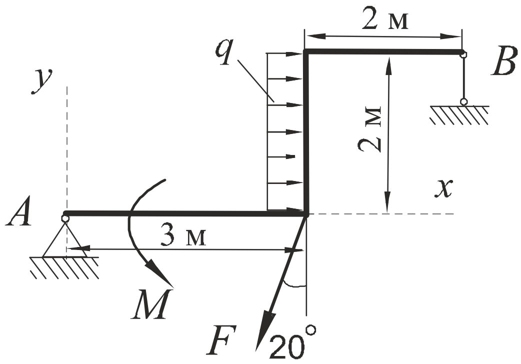


а

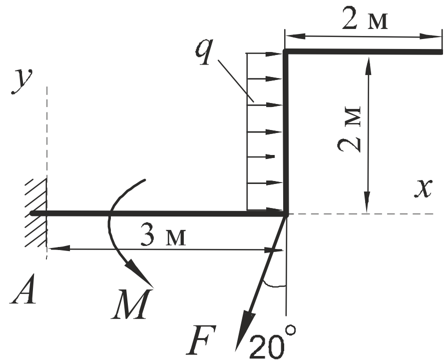


б

11

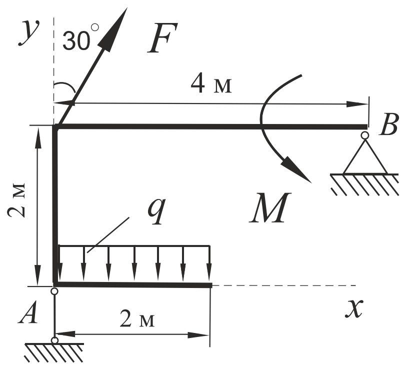


а

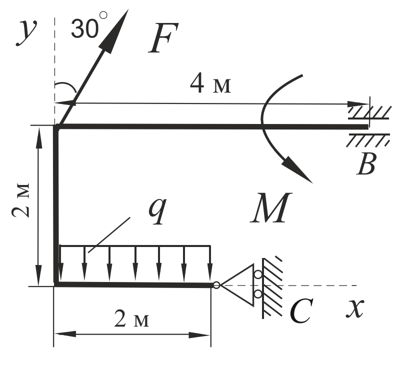


б

12

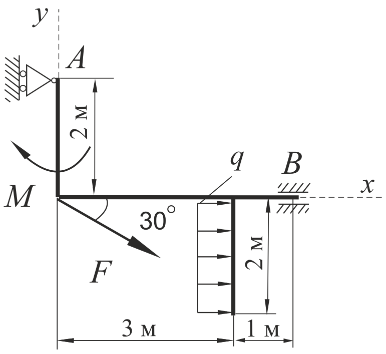


а

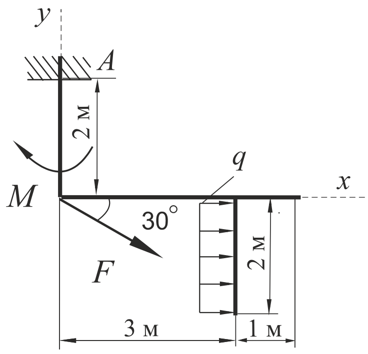


б

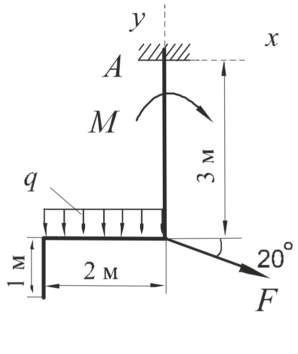
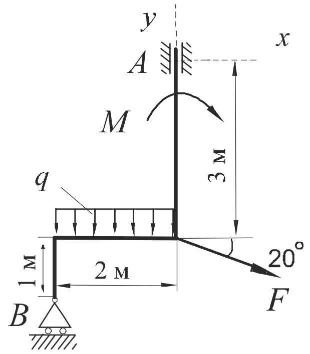
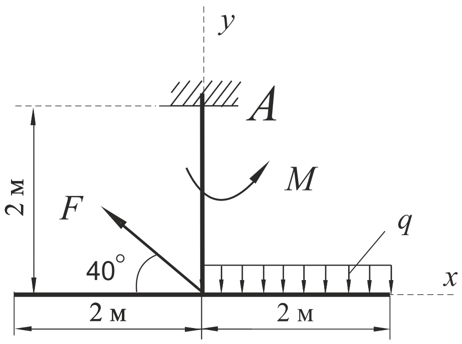
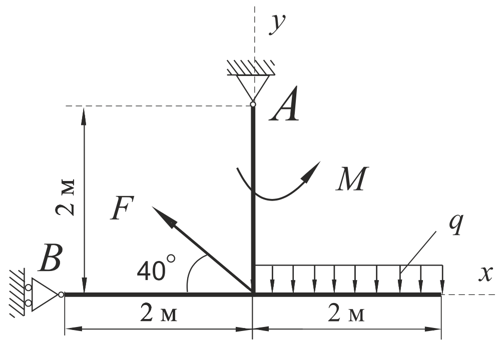
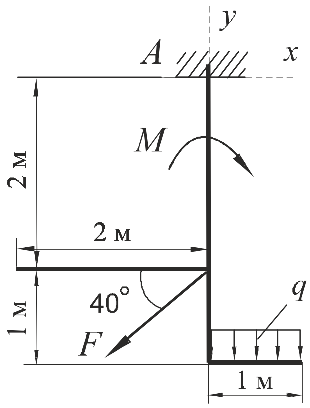
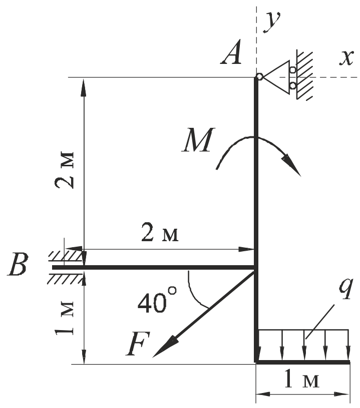
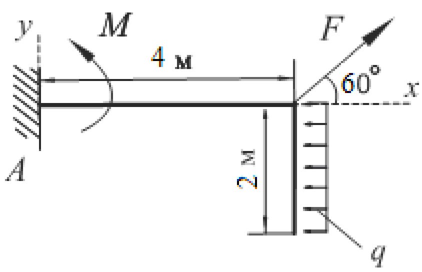
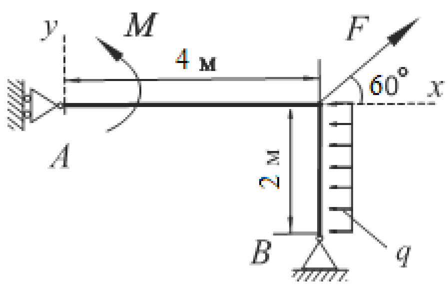
13

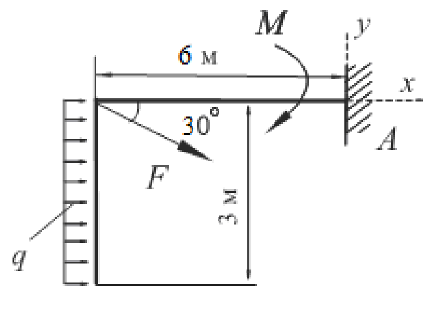


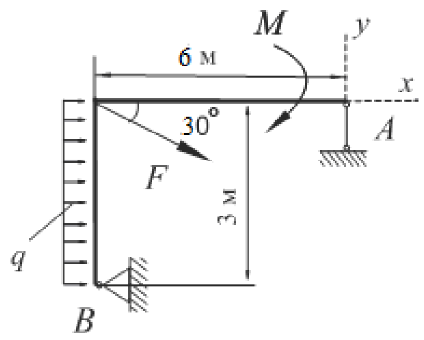
а

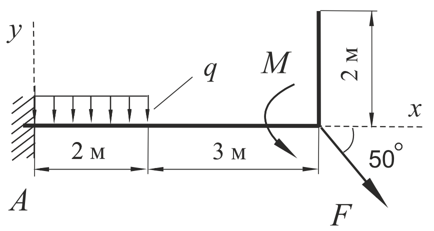


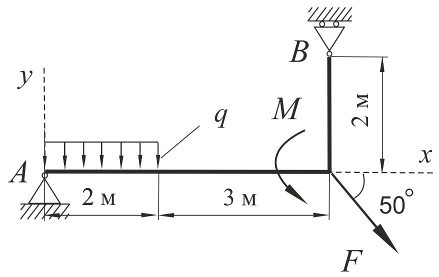
б

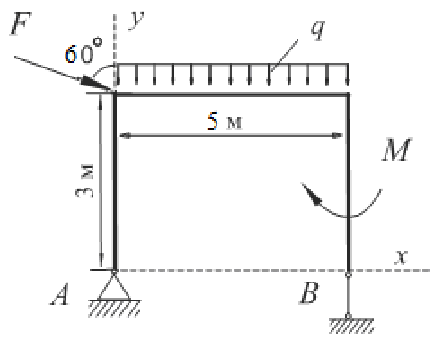
14	 *а*  *б*
15	 *а*  *б*
16	 *а*  *б*
17	 *а*  *б*

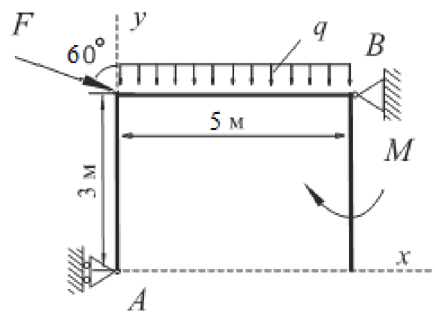
<table>
<tr>
<td>18</td>
<td>


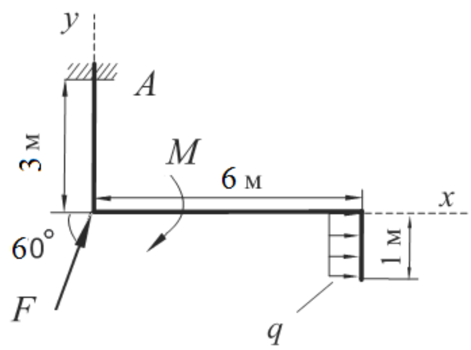
а


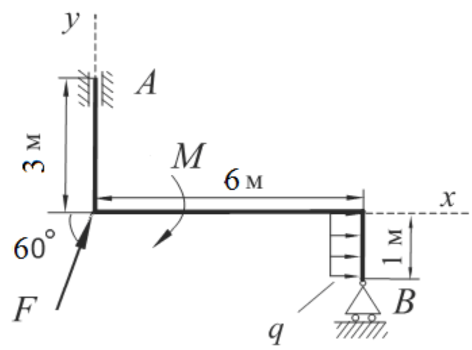
б
</td>
</tr>
<tr>
<td>19</td>
<td>


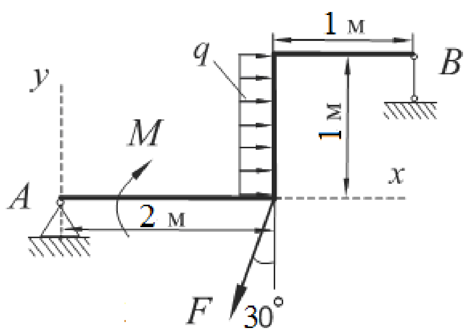
а


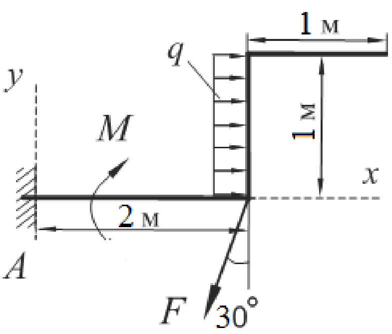
б
</td>
</tr>
<tr>
<td>20</td>
<td>


а


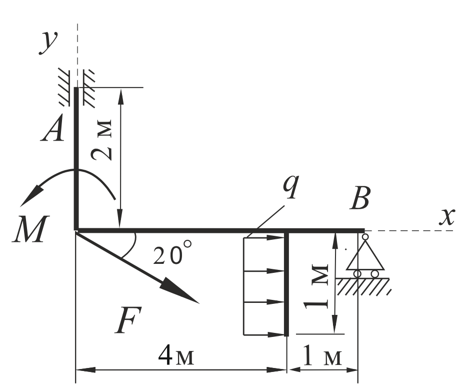
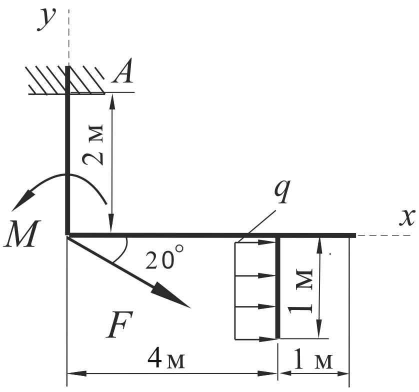
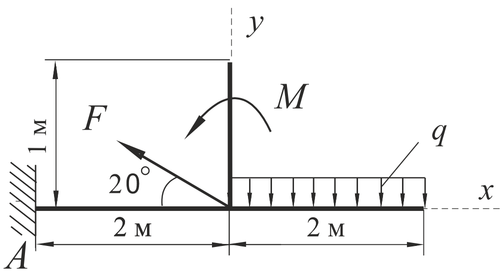
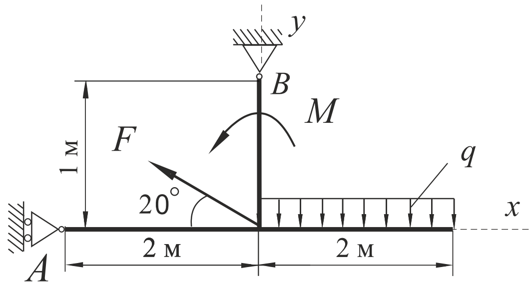
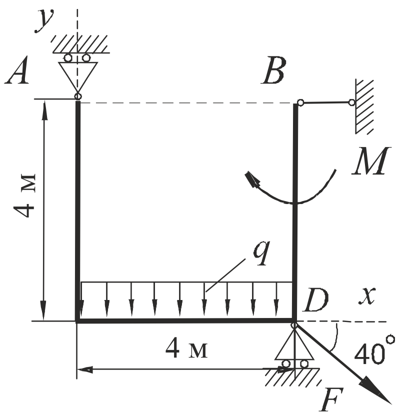
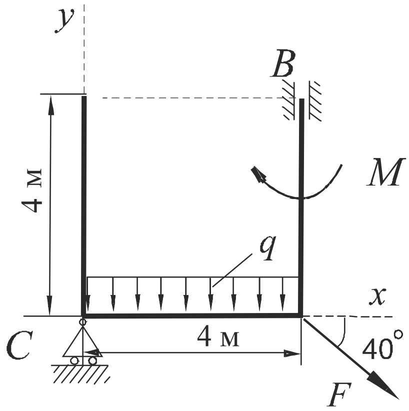
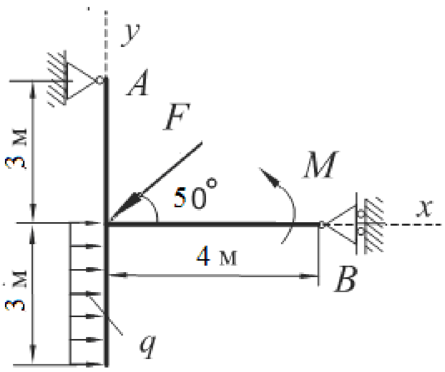
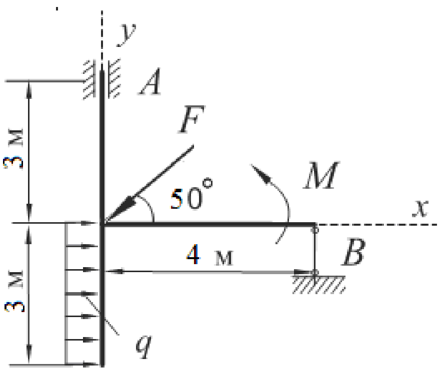
б
</td>
</tr>
<tr>
<td>21</td>
<td>


а


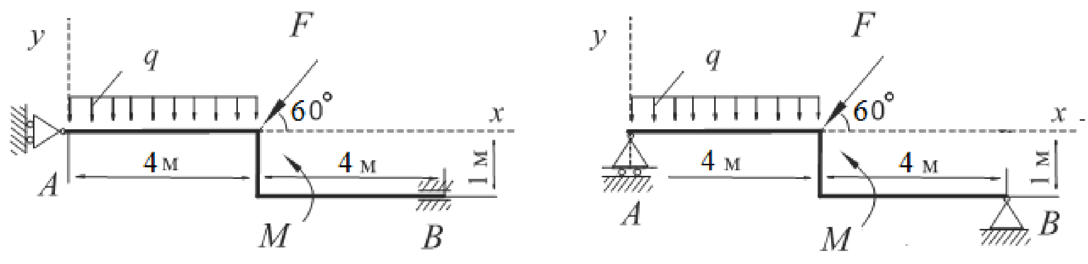
б
</td>
</tr>
<tr>
<td>22</td>
<td>


а


б
</td>
</tr>
</table>

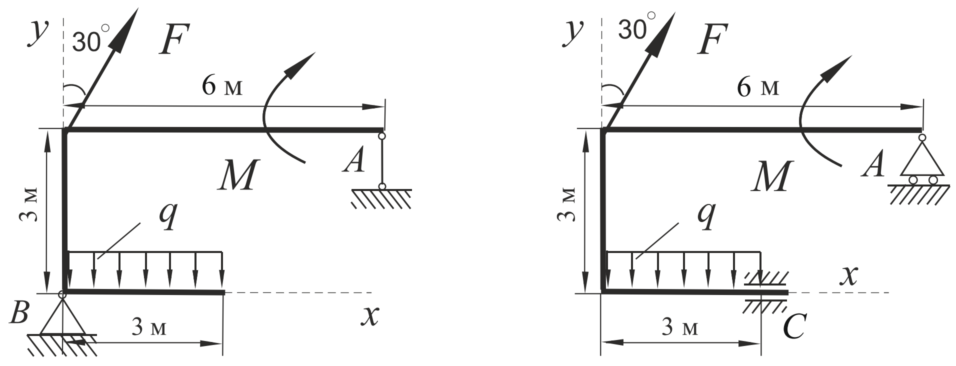
23	 а  б
24	 а  б
25	 а  б
26	 а  б

27



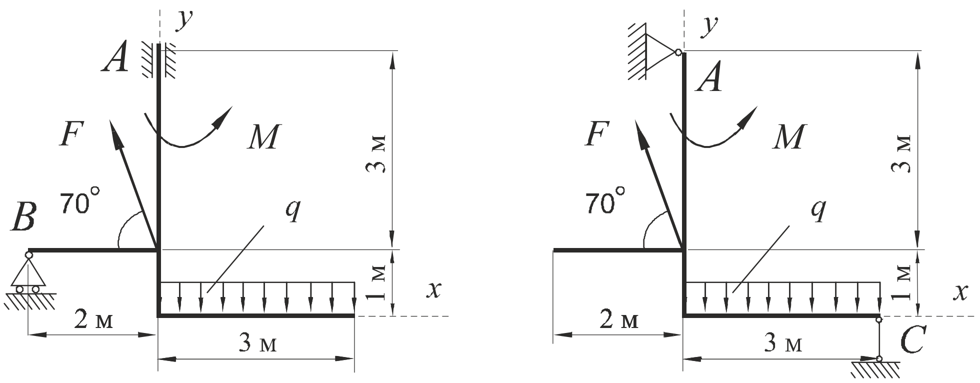
а *б*

28



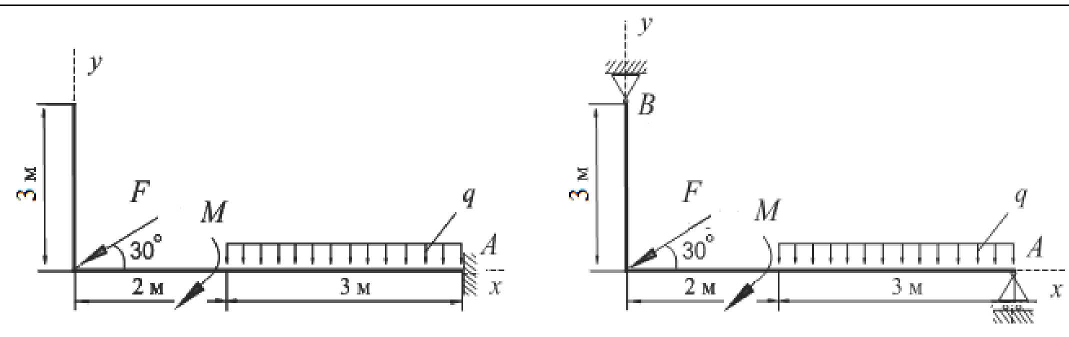
а *б*

29



а *б*

30



а *б*

Данные для расчёта конструкции

Таблица 1.7

№ Вари-анта	q, кН/м	F, кН	M, кН·м	Исследуемая реакция	№ Вари-анта	q, кН/м	F, кН	M, кН·м	Исследуемая реакция
1	2,0	5	4	Y_A	16	1,5	12	6	X_A
2	1,5	6	8	X_B	17	1,2	8	5	X_A

3	1,2	4	10	X_A	18	2,0	10	14	Y_A
4	2,0	8	6	Y_A	19	1,8	12	10	Y_A
5	1,8	10	12	Y_B	20	2,2	8	6	X_A
6	2,2	4	6	X_B	21	1,0	14	8	M_A
7	1,0	6	8	X_A	22	3,0	6	10	Y_A
8	3,0	5	12	Y_B	23	2,5	15	12	X_A
9	2,5	8	10	M_A	24	3,0	10	8	X_A
10	3,0	2	4	Y_B	25	1,5	6	10	X_B
11	1,5	10	8	Y_A	26	1,0	12	6	X_A
12	1,0	12	14	Y_B	27	2,2	16	12	Y_B
13	2,2	14	10	X_A	28	1,8	10	4	Y_A
14	1,5	8	6	M_A	29	3,0	18	8	X_A
15	2,0	5	8	Y_A	30	1,0	8	12	Y_A

Контрольные вопросы

1. Что называют рамой?
2. Дайте определение главного вектора сил.
3. Дайте определение главного момента сил.
4. В чем состоит условие равновесия для системы сил?
5. Какие уравнения равновесия необходимо составить для плоской системы сил?
6. Сформулируйте определение момента силы относительно центра (точки).
7. Что называют плечом силы?
8. Сформулируйте определение алгебраического момента.
9. В каком случае момент силы равен нулю?
10. Сформулируйте правило знаков для момента.
11. Что называют реакцией опоры (связи).
12. Какие реакции связи возникают в подвижном шарнире?
13. Какие реакции связи возникают в неподвижном шарнире?
14. Какие реакции связи возникают в жесткой заделке?
15. Какие реакции связи возникают в скользящей заделке?
16. Какую силу называют распределенной нагрузкой и как заменяют ее для удобства решения задачи?
17. Какую точку удобно выбирать в качестве центра, относительно которого составляется уравнение моментов?

18. Как можно проверить полученные результаты?

Оформление отчёта

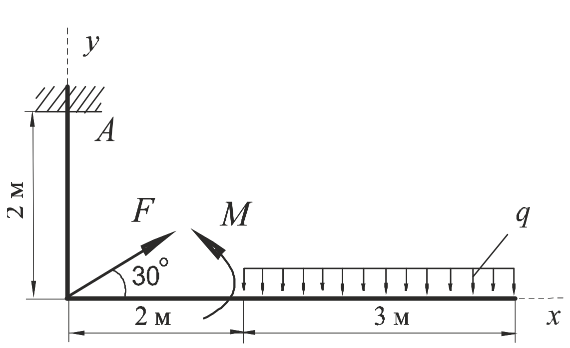
В отчёт включаются следующие пункты:

1. Постановка задачи: рисунок конструкции с указанием геометрических параметров, нагрузки и связи.
2. Расчетная схема: схема конструкции, система координат, нагрузки, опорные реакции.
3. Система уравнений равновесия.
4. Матрица коэффициентов при неизвестных величинах и матрица свободных членов системы уравнений.
5. Решение двумя способами и результаты решения, полученные с помощью программы Mathcad.
6. Проверка решения с помощью дополнительного уравнения равновесия.
7. Интерфейс с расчётами в MathCAD.

Пример выполнения задания

Постановка задачи

Дана плоская рама, изображенная на рис. 1.15, находящаяся под действием распределенной нагрузки $q = 2$ кН/м, сосредоточенной силы $F = 4$ кН и момента сил $M = 8$ кН·м. Исследуемая реакция – Y_A. Требуется определить реакции опор для двух случаев закрепления рамы (*a*) и (*b*), сделать вывод о способе закрепления с минимальной силой реакции Y_A.



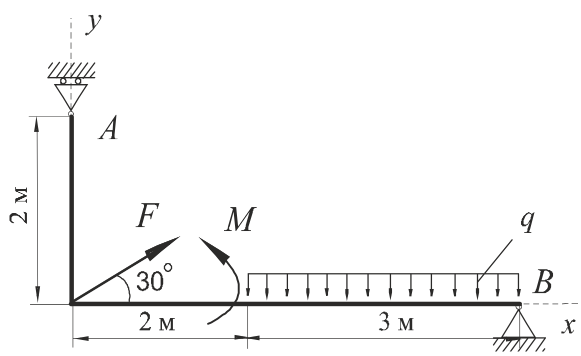


Рис. 1.15 Схема рамы

Решение задачи

1) Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой

$$Q = q \cdot l = 2\ \text{кН/м} \cdot 3\ \text{м} = 6\ \text{кН}$$

2) определим реакции опор для варианта закрепления (*a*). В данном случае рама закреплена с помощью жесткой заделки, следовательно, в точке A возникают силы реакции X_A, Y_A, которые направим в положительном направлении осей Ox и Oy, а также возникает момент сил реакции M_A, который направим против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении (см. рис. 1.16a).

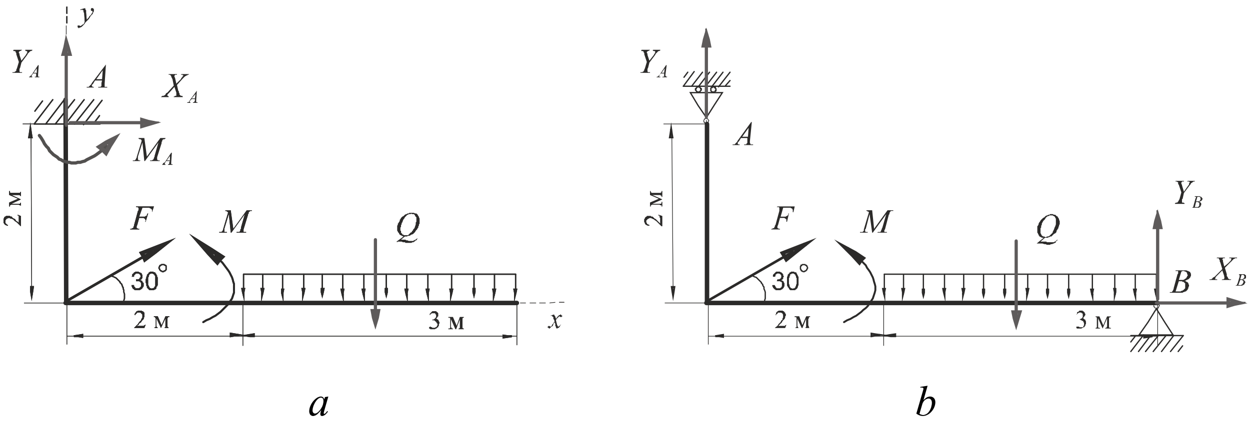


Рис. 1.16 Схема рамы с силами реакции

3) определим проекции силы F на оси координат

$$F_x = F\cos(30), \qquad F_y = F\sin(30)$$

4) составим уравнения равновесия рамы для варианта (*a*)

$$\sum_k F_{kx} = X_A + F\cos(30) = 0, \qquad \sum_k F_{ky} = Y_A + F\sin(30) - Q = 0,$$

$$\sum_k m_A(\vec{F}_k) = M + F \cdot 2\cos(30) + M_A - Q \cdot (2 + 1{,}5) = 0.$$

Здесь расстояние 2cos(30) – плечо силы F, (2+1,5) – плечо силы Q.

5) рассмотрим второй способ закрепления рамы (см. рис. 1.16*b*). В этом случае в точке A находится подвижный шарнир, т.е. возникает одна сила реакции опоры A – Y_A. В точке B находится неподвижный шарнир, значит, возникают две силы реакции X_B и Y_B по осям *Ox и Oy* соответственно. Данные силы также направим в положительном направлении осей. Уравнение моментов запишем относительно точки B, т.к. моменты двух сил реакции (X_B, Y_B) относительно этой точки обратятся в ноль.

6) составим уравнения равновесия рамы для варианта (b)

$$\sum_k F_{kx} = X_B + F\cos(30) = 0, \qquad \sum_k F_{ky} = Y_A + Y_B + F\sin(30) - Q = 0,$$

$$\sum_k m_B(\vec{F}_k) = M - Y_A \cdot 5 - F \cdot 5\sin(30) + Q \cdot 1{,}5 = 0.$$

В данной лабораторной работе полученные системы уравнений (по три уравнения в системе) для двух вариантов закрепления решаются с помощью блока решения *Given – Find*. При этом вначале на рабочем листе MathCAD вводятся данные задачи, т.е. q, F, M (см. рис. 1.17). Затем неизвестным реакциям опор присваиваются нулевые значения. Далее после записи операнда *Given* вводятся сами уравнения. В качестве знака равенства в уравнениях используется знак логического равенства (**=**), который вводится нажатием комбинации клавиш «Ctrl» + «=» или вводом знака логического равенства с использованием панели *Boolean*.

Решение находится вводом команды *Find* (X1, X2, X3) =. Справа появляется столбец из трех чисел, которые являются решением задачи, причем эти числа расположены в том порядке, в котором перечислены неизвестные X_k (k = 1,2,3) в аргументе функции *Find*. Пример решения приведён на рис. 1.17.

$q := 2 \quad F := 4 \quad M := 8$

$Q := q \cdot 3 = 6$

Решение задачи для 1-го варианта закрепления

$Xa := 0 \quad Ya := 0 \quad Ma := 0$

Given

$Xa + F \cdot \cos(30deg) = 0$

$Ya + F \cdot \sin(30deg) - Q = 0$

$M + F \cdot \cos(30deg) \cdot 2 + Ma - Q \cdot 3.5 = 0$

$$\mathrm{Find}(Xa, Ya, Ma) = \begin{pmatrix} -3.464 \\ 4 \\ 6.072 \end{pmatrix}$$

Решение задачи для 2-го варианта закрепления

$Xb := 0 \quad Yb := 0 \quad Ya := 0$

Given

$Xb + F \cdot \cos(30deg) = 0$

$$Ya + Yb + F\cdot\sin(30deg) - Q = 0$$

$$M - Ya\cdot 5 - F\cdot\sin(30deg)\cdot 5 + Q\cdot 1.5 = 0$$

$$\mathrm{Find}(Xb, Ya, Yb) = \begin{pmatrix} -3.464 \\ 1.4 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.17 Решение задачи с помощью блока Given – Find

Таким образом, при варианте закрепления (*a*) $Y_A = 4$ кН, в варианте (*b*) $Y_A = 1{,}4$ кН. Можем сделать вывод о том, что при варианте закрепления (*b*) исследуемая реакция Y_A минимальна.