

Лабораторная работа №4 «Задача динамического программирования.

Задача о замене оборудования»

Цели работы: научиться решать задачи динамического программирования, научиться разбивать весь процесс решения задачи на этапы, научиться выбирать оптимальную стратегию поведения.

Краткая теория

1. Понятие задачи динамического программирования

Рассматриваемые ранее задачи характеризуются тем, что в них не учитываются изменения оптимизируемых параметров во времени – процессы считаются статичными. Выбирается некоторый период времени, и для него определяются проектируемые или планируемые значения показателей. При этом предполагается, что управляемые или неуправляемые параметры системы в течение всего планового времени не будут изменяться или, по крайней мере, не претерпят серьезных изменений, требующих пересмотра принятых решений.

Однако в реальной жизни есть задачи, в которых необходимо учитывать изменения параметров систем во времени. Эти параметры могут меняться непрерывно или дискретно – от этапа к этапу. Например, из года в год меняется возраст машин и оборудования, изменяется производственная мощность и производительность труда на предприятиях. Очевидно, что необходимо принимать оптимальные решения на год (или другой срок) и одновременно на весь рассматриваемый период в целом с учётом возможных изменений параметров. Для решения такого вида задач, которые получили название **многошаговые**, разработан соответствующий математический аппарат, который получил название **динамическое программирование**.

Задача может быть сформулирована следующим образом:

Задача динамического программирования – определить u_i^* (u_i^* не только число, а может быть вектором, функцией) на каждом шаге, $i = 1, 2, \dots, m$, и тем самым u^* всей операции в целом.

Рассмотрим подход к решению данной задачи. Характерным для динамического программирования является то, что переменные рассматриваются вместе, а не последовательно – одна за другой. При этом вычислительная тема строится таким образом, что вместо одной задачи с n переменными решается серия задач с небольшим числом, а чаще с одной переменной. Сам же вычислительный процесс производится на основе метода последовательных приближений в два круга:

1. *От последнего шага к первому.*
2. *От первого шага к последнему или же наоборот, в зависимости от исходных данных.*

На первом круге ищется так называемое условное оптимальное решение. Оно выбирается так, чтобы все предыдущие шаги обеспечили максимальную эффективность последующего. Основу такого подхода составляет принцип оптимальности Беллмана, который формулируется следующим образом:

Нельзя получить оптимальное значение целевой функции i -шагового процесса, если для любого u_i , выбранного на шаге i , значение целевой функции для оставшихся $i-1$ шагов не является оптимальным при этом выбранном на i -шаге значении u_i .

Такой процесс продолжается до тех пор, пока решение не потеряет свой условный характер, т. е. до первого шага или последнего. Для него решение просто оптимально. Поэтому второй круг начинают именно с этого шага и последовательно переходят от условных к оптимальным решениям, тем самым обеспечивается оптимальность операции в целом.

Оптимальное распределение ресурсов

Пример:

Капитал 40 млн.руб. инвестор должен вложить в четыре инвестиционных проекта так, чтобы получить максимальный доход. Доходность проектов дана в таблице (вложения кратны 8 млн. руб.)

Прибыль от внедрения				
u	F4(u)	F3(u)	F2(u)	F1(u)
8	55	39	35	32
16	58	53	76	68
24	90	80	120	115
32	100	120	135	134
40	140	145	158	147

Решение:

Это задача динамического программирования. Решение состоит из двух этапов. На первом этапе (от конца к началу) ищем условное оптимальное решение, на втором (от начала к концу) – ищем оптимальное решение задачи.

1 этап.

Распределяем капитал между четырьмя проектами и считаем получаемую прибыль $L(i)$, $i=8,16,24,32,40$.

1 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый проект.

$$L(8)=55$$

$$L(16)=58$$

$$L(24)=90$$

$$L(32)=100$$

$$L(40)=140$$

2 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый и третий проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	1 шаг	f3(u)
8	<u>55</u>	<u>39</u>
16	58	53
24	90	80
32	100	120
40	140	145

$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 39\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{58; 55+39; 53\} = \max\{58; 94; 53\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{90; 58+39; 55+53; 80\} = \max\{90; 97; 108; 80\} = 108$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{100; 90+39; 58+53; 55+80; 120\} = \max\{100; 129; 111; 135; 120\} = 135$$

$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{140; 100+39; 90+53; 58+80; 55+120; 145\} = \max\{140; 139; 143; 138; 175; 145\} = 175$$

3 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий (2 шаг) и второй проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	2 шаг	f2(u)
8	55	35
16	94	76
24	108	<u>120</u>
32	135	135
40	175	158

$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 35\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{94; 55+35; 76\} = \max\{94; 90; 76\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{108; 94+35; 55+76; 120\} = \max\{108; 129; 131; 120\} = 131$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{135; 108+35; 94+76; 55+120; 135\} = \max\{135; 143; 170; 175; 135\} = 175$$

$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{175; 135+35; 108+76; 94+120; 55+135; 158\} = \max\{175; 170; 184; 214; 190; 158\} = 214$$

4 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий, второй (3 шаг) и первый проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	3 шаг	f1(u)
8	55	32
16	94	68
24	131	115
32	175	134
40	214	147

$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 32\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{94; 55+32; 68\} = \max\{94; 87; 68\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{131; 94+32; 55+68; 115\} = \max\{131; 126; 123; 115\} = 131$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{175; 131+32; 94+68; 55+115; 134\} = \max\{175; 163; 162; 170; 134\} = 175$$

$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{214; 175+32; 131+68; 94+115; 55+134; 147\} = \max\{214; 207; 199; 209; 189; 147\} = 214$$

2 этап:

На четвертом шаге выбираем максимальное из полученных значений прибыли $L(40)=214$.

И возвращаясь в обратном порядке от таблицы к таблице (от 4 шага к 1) выбираем такие значения доходов, при которых и получено значение 214.

Максимальный доход 214 млн. руб. от вложенных средств может быть получен при следующем распределении средств:

- 1 проект – 0 млн. руб.
- 2 проект – 24 млн. руб.
- 3 проект – 8 млн. руб.
- 4 проект – 8 млн. руб.

Задание

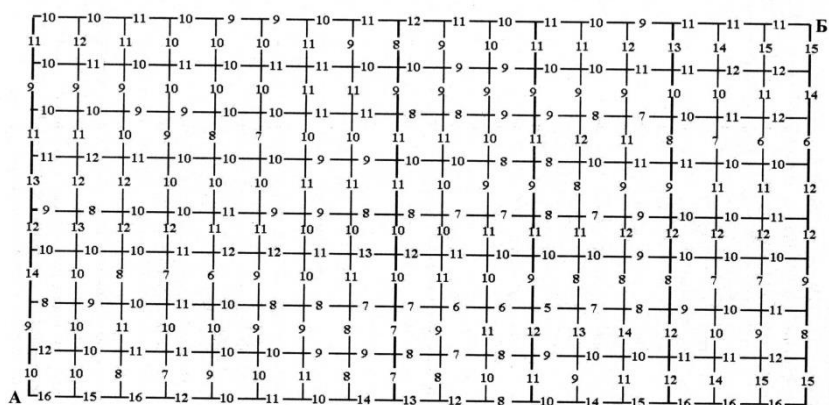
Задание 1. Распределите оптимальным образом денежные средства инвестора величиной 5 у.е. между четырьмя предприятиями. Доход каждого предприятия от вложения в него u у.е. определяется функцией дохода $f(u)$. Эти функции приведены в таблице.

u	Прибыль от внедрения по предприятиям			
	f4(u)	f3(u)	f2(u)	f1(u)
1	f4(1)	6	3	4
2	10	f3(2)	4	6
3	11	11	f2(3)	8
4	12	13	11	f1(4)
5	18	15	18	16

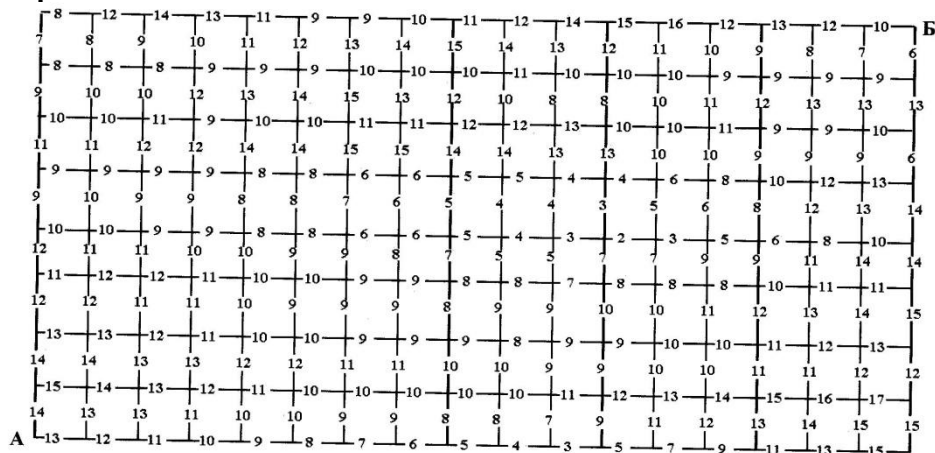
Вариант	1	2	3	4
f4(1)	9	5	6	8
f3(2)	10	10	7	7
f2(3)	7	5	8	9
f1(4)	10	9	13	15

Задание 2. Из пункта А в пункт В необходимо проложить автомобильную трассу по самому экономичному пути.

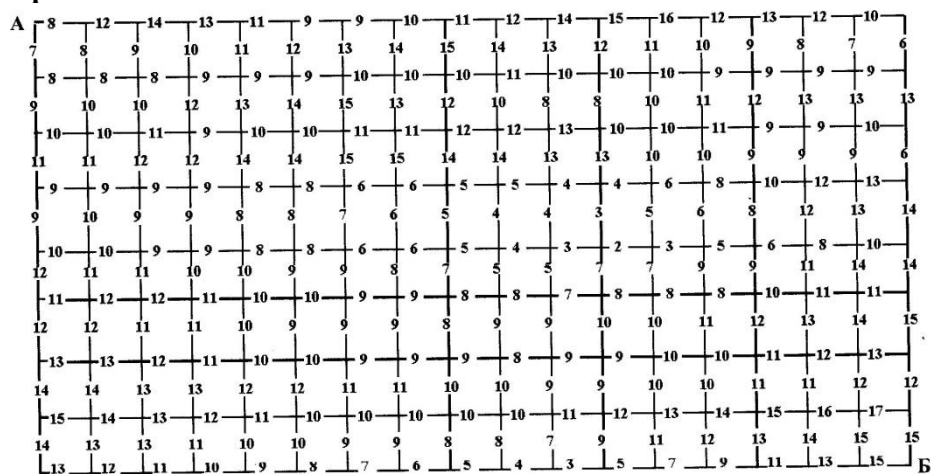
Вариант 1



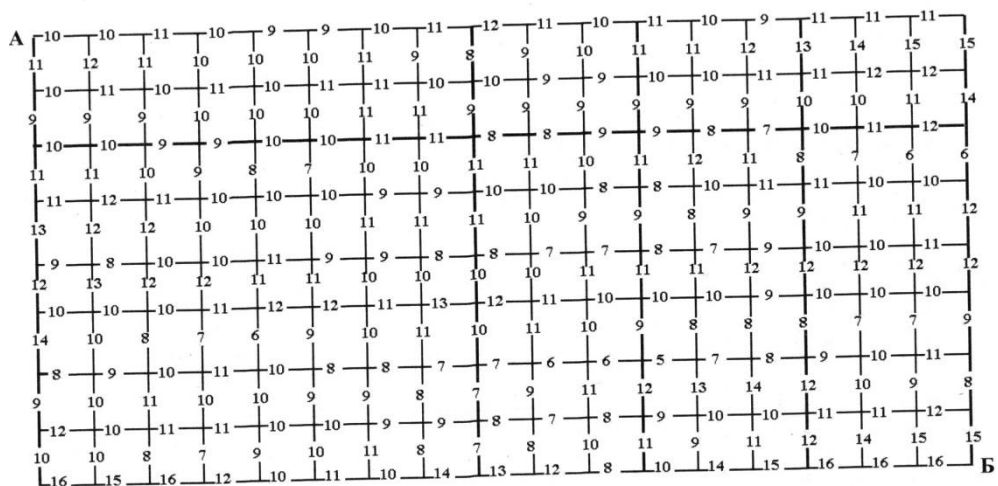
Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4



Контрольные вопросы:

1. Какие задачи можно решать методами динамического программирования?
2. В чем заключаются достоинства и недостатки динамического программирования?
3. Объясните алгоритм решения задач динамического программирования.
4. Укажите принцип выбора направления движения.
5. В чем заключается принцип оптимальности?
6. Каков алгоритм распределения ресурсов?