Лекции 3. Векторы в пространстве. Уравнения плоскости.

§ 1. Компланарные векторы. Разложение вектора на составляющие

В настоящей главе понятия координат и вектора распространяется на трехмерное пространство. При этом оказывается, что многие понятия и свойства, изученные в лекции №2, переносятся на трехмерное пространство без изменений или с небольшими очевидными коррективами. Разумеется, возникают и новые понятия.

Безо всяких изменений на трехмерное пространство переносятся понятия и свойства, не связанные с координатами: определение вектора, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, а также свойства этих действий. Теорема о разложении произвольного вектора на составляющие по двум неколлинеарным векторам верна только в том случае, когда все три вектора можно расположить в одной плоскости.

Для обобщения этой теоремы введем новые понятия.

Определение. Три или более векторов называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Если компланарные векторы отложить от одной точки, то они расположатся в одной плоскости. Некомпланарные векторы этим свойством не обладают.

На рис. 5.1 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, M и N – середины боковых ребер AA_1 и BB_1.

Тройка векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{D_1B_1}$ компланарна, так как все векторы параллельны основаниям параллелепипеда.

Тройка $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{MN}$ компланарна по той же причине.

Тройка $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{BB_1}$ не компланарна, так как всякая плоскость, параллельная первым двум, параллельна основаниям, а третий вектор им не параллелен.

Очевидно, что если в тройке векторов есть два коллинеарных, то такая тройка компланарна, так как при приведении таких векторов к общему началу они располагаются в одной плоскости (рис. 5.2). В частности, если в тройке есть нулевой вектор, то тройка компланарна.

Определение. Пусть $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ...\overrightarrow{a_n}$ - векторы, $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ - действительные числа. Тогда вектор

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

называется линейной комбинацией данных векторов; данные числа называются коэффициентами линейной комбинации.

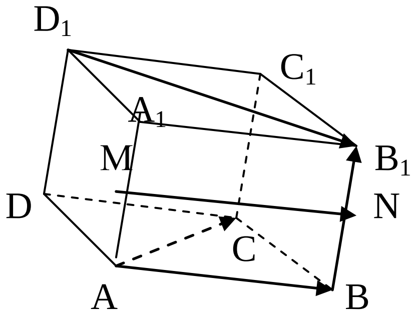


Рис. 5.1

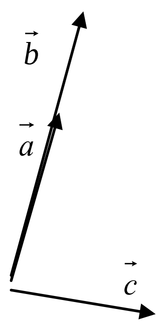


Рис. 5.2

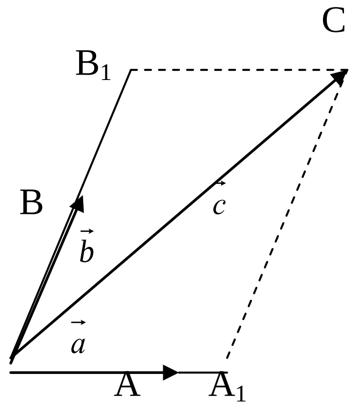
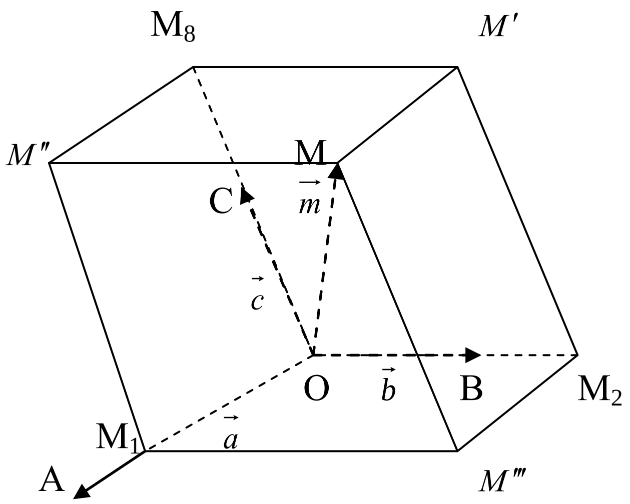


Рис. 5.3



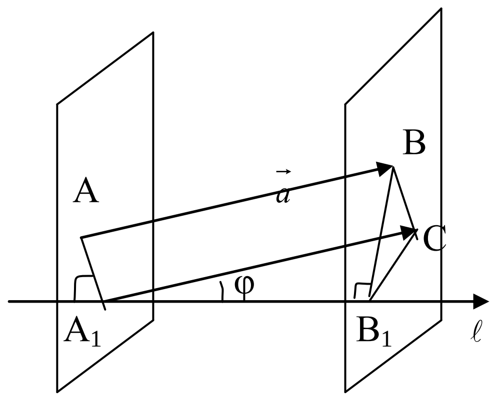


Рис. 5.4 Рис. 5.5

Теорема 2. (о разложении вектора на составляющие). Всякий вектор трехмерного пространства может быть единственным образом разложен по трем некомпланарным векторам.

Рассмотрим в трехмерном пространстве проекцию вектора на ось. Как и в плоском случае (2.6), мы ограничимся ортогональным проектированием.

Через концы A и B вектора $\overrightarrow{AB}$ проводим плоскости, перпендикулярные оси ℓ (рис. 5.5). Эти плоскости пересекают ось в точках A_1 и B_1. Длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком «+» или «-» в зависимости от направления, называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ.

На рис. 5.5 выполнено также дополнительное построение, которое поможет читателю понять, что и в этом случае проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью:

$$Пр_{\ell}\vec{a} = a\cos\varphi \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

§2. Координаты вектора

В лекции №1 были определены прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости.

Если базисные векторы имеют равные длины и попарно перпендикулярны, то система координат называется прямоугольной декартовой, в этом случае для базисных векторов применяются стандартные обозначения $\vec{i}, \vec{l}, \vec{k}$.

Определение. Координатами вектора в прямоугольной системе называются коэффициенты разложения данного вектора по базисным векторам.

Всякий вектор $\vec{a}$ согласно теореме 2 предыдущего параграфа можно единственным образом разложить по базисным векторам: $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. Числа x, y, z и есть его координаты. Напоминаем запись координат: $\vec{a}(x, y, z)$ или $\vec{a} = (x, y, z)$.

Мы знаем, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число; эти свойства верны и в пространстве. Верен и координатный признак коллинеарности: чтобы два вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Скалярное произведение двух векторов в пространстве определяется точно так же, как и на плоскости. Все бескоординатные свойства остаются в силе, а свойства, связанные с координатами, выводятся так же, как и прежде. И отличаются лишь присутствием третьей координаты. А именно, скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ выражается формулой

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

Длина вектора $\vec{a}$ равна

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

а угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{a}_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

Подчеркнем, что последние три формулы верны только в прямоугольных декартовых координатах.

Как и в двумерном случае, проекции вектора на координатные оси равны его координатам. А именно, если $\vec{m}(x, y, z)$, то

$$x = \textit{Пр}_{OX}\,\vec{m},\ y = \textit{Пр}_{OY}\,\vec{m},\ \mathrm{z} = \mathrm{Пр}_{\mathrm{OZ}}\,\vec{m} \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

Определение. Косинусы углов, которые вектор образует с осями прямоугольной декартовой системы координат, называются направляющими косинусами вектора.

Из последних формул с учетом формулы (5.1.4) получаем

$$x = m\cos\alpha,\ \mathrm{y} = \mathrm{m}\cos\beta,\ \mathrm{z} = \mathrm{m}\cos\gamma \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

Где α, β, γ – углы вектора $\vec{m}$ с осями координат. Мы выразили координаты вектора через его длину и направляющие косинусы.

По формуле (5.2.4) $m^2 = x^2 + y^2 + z^2$, поэтому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \textbf{(3.2.7)}$$

То есть сумма квадратов направляющих косинусов произвольного вектора равна 1.

Рассмотрим <u>орт вектора $\vec{m}$</u>, то есть единичный вектор $\vec{m_0}$, сонаправленный с вектором $\vec{m}$. По формулам (3.2.6) $\vec{m_0} = \frac{\vec{m}}{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, и мы приходим к выводу: <u>направляющие косинусы любого вектора равны координатам его орта.</u>

§ 3. Координаты точки. Геометрический смысл уравнений между координатами.

Определение. <u>Координатами точки</u> в аффинной (и, в частности, - в прямоугольной декартовой) системе координат называются координаты ее радиус-вектора.

Таким образом, по определению координаты точки М равны координатам вектора $\overrightarrow{OM}$.

На рис. 5.7 показано построение точки А(-2, -2, 1); в соответствии с определением строится ее радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Как и на плоскости, <u>координаты вектора равны разностям соответствующих координат концов</u>: если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Это позволяет простейшие (и в то же время – важнейшие) формулы аналитической геометрии на плоскости распространить на трехмерное пространство. Это формула длины отрезка:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

Договоримся, что <u>мы будем пользоваться только прямоугольными декартовыми координатами</u>, если нет специальной оговорки.

<u>Уравнение относительно координат</u>

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

<u>определяет в пространстве, вообще говоря, некоторую поверхность</u>; ей принадлежат те и только те точки, координаты которых удовлетворяют уравнению. Подтвердим это простыми примерами.

Пример 1. Уравнение z = 0 – это уравнение координатной плоскости ХОУ.

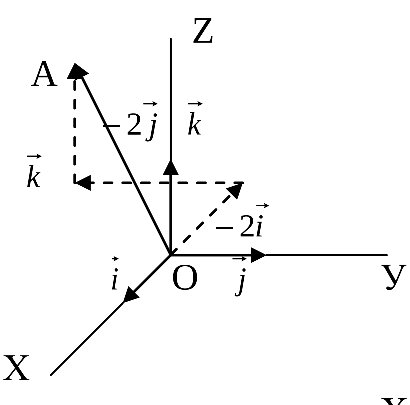


Рис. 5.7

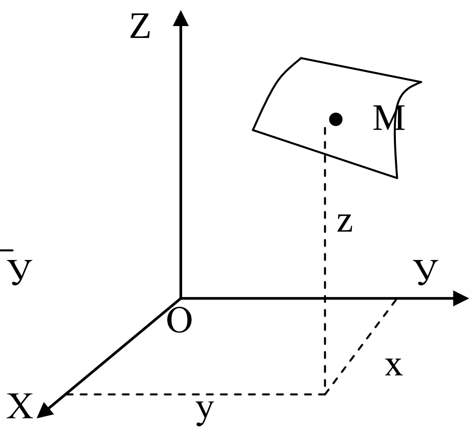


Рис. 5.8

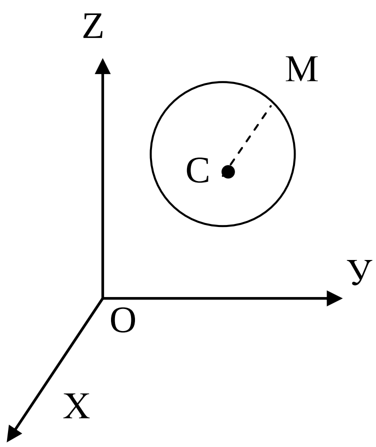


Рис. 5.9

Пример 2. Рассмотрим уравнение $z = f(x, y)$. Каждому значению пары координат (x, y) из области определения функции f соответствует значение z, то есть каждой точке плоскости ХОУ, входящей в область определения функции f, соответствует точка над ней или под ней. Таким образом, и в этом случае получается некоторая поверхность (рис. 5.8).

Пример 3. выведем уравнение сферы радиуса R с центром в точке C(a , b, c).

Решение. Пусть M(x, y, z) – некоторая точка. Она лежит на сфере, если CM = R (рис. 5.9). Но $CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, поэтому уравнение сферы таково:

$$(x-\text{a})^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей и поэтому задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z) = 0 \\ G(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

§ 4 Уравнения плоскости по точке и нормальному вектору, по точке и двум направляющим векторам

Определение. Ненулевой вектор называется нормальным вектором плоскости, если он ей перпендикулярен.

Если $\vec{n}$ - нормальный вектор плоскости, то всякий коллинеарный ему вектор, то есть вектор $\lambda\vec{n}$, где $\lambda \neq 0$, тоже нормальный вектор этой плоскости. Других векторов плоскость не имеет.

Точка, принадлежащая плоскости и нормальный вектор определяют плоскость. Поэтому следующая задача всегда имеет единственное решение.

Задача 1. Найти уравнение плоскости α по точке $A(x_0, y_0, z_0)$ и нормальному вектору $\vec{n}(a, b.c)$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ - какая-либо точка (рис. 6.1.). Тогда $M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. А так как $AM = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, то последнее условие в координатной форме имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

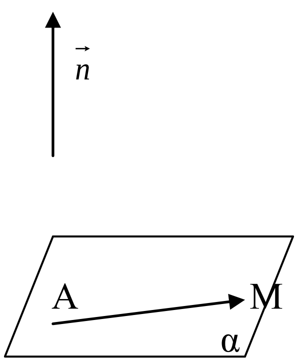


Рис. 6.1

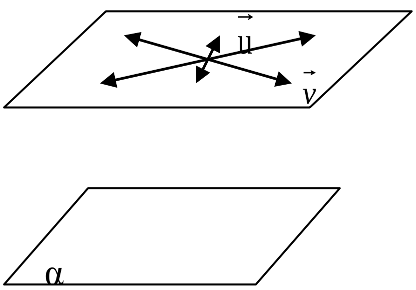


Рис. 6.2

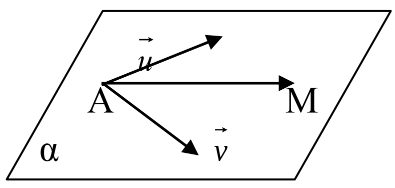


Рис.6.3

Мы получили уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

Определение. Ненулевой вектор называется направляющим вектором плоскости, если он ей параллелен или лежит в ней.

Пусть неколлинеарные векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ - направляюще векторы плоскости α (рис. 6.2). Тогда любой вектор, компланарный с ними, тоже является направляющим для этой плоскости, так как все три вектора, если их построить из одной точки, располагаются в плоскости, параллельной α. Но любой вектор, компланарный векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$, может быть разложен на составляющие по этим векторам (см. § 2.4, а также § 5.1). Поэтому все направляющие векторы плоскости α можно представить в виде $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, где $\lambda \neq 0 \vee \mu \neq 0$.

Точка плоскости и два ее направляющих вектора определяют плоскость. Поэтому следующая задача имеет единственное решение.

Задача 2. Найти уравнение плоскости α по точке $A(x_0, y_0, z_0)$ и неколлинеарным направляющим векторам $\vec{u}(p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{v}(p_2, q_2, r_2)$.

Решение. Для наглядности векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ построим из одной точки A, тогда они расположатся в плоскости α (рис. 6.3). Пусть M(x, y, z) – какая-либо точка. Она принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AM}$ компланарны. По признаку компланарности векторов определитель, составленный из координат векторов, равен нулю(это ранее не упоминалось) Согласно этому признаку условие компланарности этих векторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

Это и есть искомое уравнение плоскости по точке и двум направляющим векторам. Читателю необходимо продумать, какое значение имеет неколлинеарность направляющих векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Из уравнения (3.4.2) легко получается уравнение плоскости по трем точкам $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ не лежащим на одной прямой. Для этого достаточно записать ее уравнение по точке, например, A и двум неколлинеарным направляющим векторам, например, $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

Пример 2. Найдите уравнение плоскости, которая касается сферы $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=0$ в точке A(3, -3, 2).

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что данная точка действительно лежит на сфере.

Из уравнения сферы находим ее центр C(1, -2, 4). Вектор $\overrightarrow{AC}(-2,1,2)$ - нормальный вектор искомой плоскости (рис. 6.5). Поэтому ее уравнение можно найти по точке А и нормальному вектору $\overrightarrow{AC}$: $-2(x-3)+(y+3)+2(z-2)=0$, откуда после упрощений получаем окончательно $-2x+y+2z+5=0$.

Пример 3. Через точки А(3, 2, -2) и В(0, 1, 1) проведена плоскость перпендикулярно плоскости $x+y+z=0$. Найдите ее уравнение.

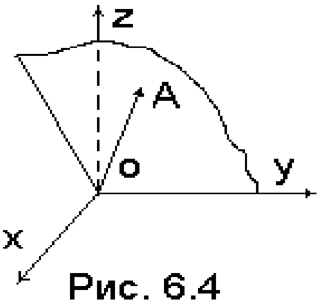


Рис. 6.4

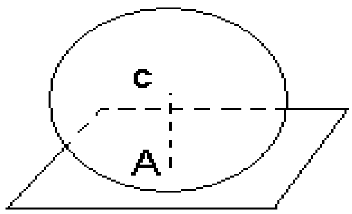


рис. 6.5

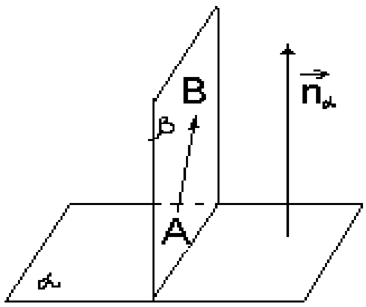


Рис. 6.6

Решение. <u>Первый способ</u>. Нормальный вектор $\overrightarrow{n_\alpha}$ данной плоскости α имеет координаты (1, 1, 1). Так как и он, и искомая плоскость β перпендикулярны плоскости α (рис. 6.6), то $\overrightarrow{n_\alpha} \parallel \beta$ и, следовательно, $\overrightarrow{n_\alpha}$ есть направляющий вектор плоскости β. Другой направляющий вектор этой плоскости – это вектор $\overrightarrow{AB}(-3,-1,3)$. Теперь уравнение искомой плоскости находится по точке А (или В) и двум направляющим векторам: $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$. Отсюда после упрощений получаем $\beta: 2x-3y+z+2=0$.

§ 5. Общее уравнение плоскости и его частные случаи

Уравнение всякой плоскости можно записать в виде (13.1.1), откуда следует, что уравнение всякой плоскости имеет первую степень относительно текущих координат x, y, z. Верно ли обратное утверждение? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, аналогичная теореме об общем уравнении прямой.

Теорема. <u>Всякое уравнение первой степени</u>

$$ax+by+cz+d=0 \quad (a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0) \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

<u>относительно текущих координат есть уравнение плоскости, вектор $\vec{n}(a,b,c)$ является нормальным вектором этой плоскости.</u>

Уравнение вида (3.5.1) называется <u>общим уравнением плоскости</u>. Рассмотрим его <u>частные случаи</u>, которые возникают, когда некоторые коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль. Во всех этих случаях в расположении данной плоскости α относительно координатных осей и плоскостей будут некоторые особенности.

1. $d=0$. В этом случае $\alpha: ax+by+cz=0$ и начало координат лежит в данной плоскости $(0\in\alpha)$; см. рис. 6.8.

2. В нуль обращается один из коэффициентов при переменных.

2а. $a=0$. В этом случае $\alpha: by+cz+d=0$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}(0,b,c)=b\vec{j}+c\vec{k}$ параллелен плоскости YOZ или лежит в ней (рис. 6.9), а координатный вектор $\vec{i}$, перпендикулярный вектору $\vec{n}$, будет направляющим для этой плоскости. Итак, $a=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel OX$.

2в. Аналогично $b=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel OY,\ c=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel OZ$

3. В нуль обращаются один из коэффициентов при переменных и свободный член.

3а. $a=d=0$. В этом случае плоскость $\alpha: by+cz=0$ проходит через начало координат (так как $d=0$) и параллельна оси абсцисс (так как $a=0$). Поэтому она проходит через ось абсцисс (рис. 6.10). Итак, $a=d=0 \Leftrightarrow OX \subset \alpha$.

3бв. Аналогично $b=d=0 \Leftrightarrow OY \subset$, $c=d=0 \Leftrightarrow OZ \subset \alpha$.

4. В нуль обращаются два коэффициента при переменных.

4а. $b=c=0$. В этом случае плоскость $\alpha: ax+d=0$ параллельна оси ординат (так как $b=0$) и оси аппликат (так как $c=0$), то есть она параллельна плоскости OYZ или, что то же самое, перпендикулярна оси OX (рис. 6.11). Итак, $b=c=0 \quad \alpha \perp OX$.

4бв. Аналогично $a=c=0 \Leftrightarrow \alpha \perp OY,\ a=b=0 \Leftrightarrow \alpha \perp OZ$.

5. В нуль обращаются два коэффициента при переменных и свободный член.

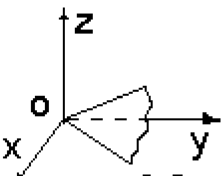


рис. 6.8

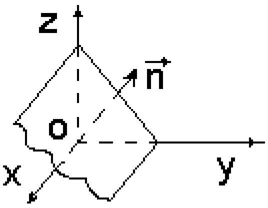


рис. 6.9

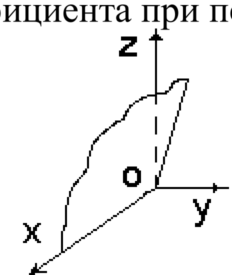


рис. 6.10

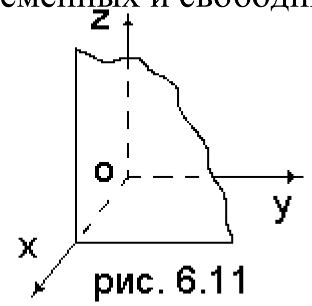


рис. 6.11

5а. $b=c=d=0$. В этом случае плоскость $\alpha: ax=0$ при $x=0$ совпадает с координатной плоскостью YOZ. Итак, $b=c=d=0 \Leftrightarrow \alpha = YOZ$.

5бв. Аналогично $a=c=d=0 \Leftrightarrow \alpha = XOZ, a=b=d=0 \Leftrightarrow \alpha = XOY$.

Пример 1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось ординат и точку A(1, 2, 2). Этот пример мы уже решали в §1.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось ординат, неполное, оно имеет вид $ax+cz=0$ (случай 3б). А так как точка A принадлежит этой плоскости, то $a\cdot 1+c\cdot 2=0$. Поэтому $a=-2c$ и мы получаем уравнение искомой плоскости: $-2cx+cz=0$, которое после сокращения принимает вид $2x-z=0$.

Пример 2. Найдите отрезки, отсекаемые плоскостью $2x-y+z-4=0$ на координатных осях.

Решение. Точка A, в которой плоскость пересекает ось абсцисс, имеет координаты A(x, 0, 0). Подставив эти координаты в уравнение плоскости, получаем $x=2$. Итак, A(2, 0, 0).

Аналогично находим точку пересечения с осями OУ и OZ: B(0, -4, 0), C(0, 0, 4). Итак, данная плоскость отсекает на координатных осях отрезки 2, -4, 4 (рис. 6.12).

§6. Углы между плоскостями, параллельность и перпендикулярность. Взаимное расположение двух плоскостей

Задача. Найти величину двугранного угла между плоскостями

$$\begin{aligned}\alpha_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\\ \alpha_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.6.1)}$$

Решение. Эта задача аналогична задаче нахождения угла между двумя прямыми. Поэтому здесь изложение будет более сжатым.

Плоскости образуют два двугранных угла – φ_1 и φ_2, сумма которых равна π. Угол между нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ данных плоскостей равен одному из них, на рис. 6.13 этот угол обозначен φ_1. Так как $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi_2$, то формула угла между плоскостями, охватывающая оба случая, имеет следующий вид:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{n_1 n_2} = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \textbf{(3.6.2)}$$

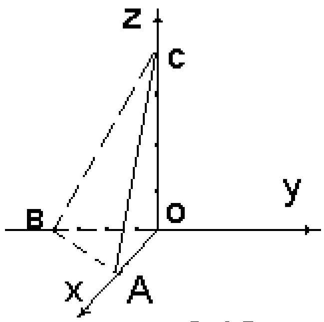


рис. 6.12

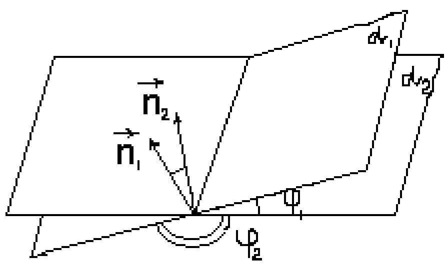


рис. 6.13

Теперь выведем условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Имеем: $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Итак, <u>условие параллельности</u> (допускается и совпадение) и <u>условие перпендикулярности</u> двух плоскостей таковы:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \textbf{(3.6.3)}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \qquad \textbf{(3.6.4)}$$

Вывод: <u>для того, чтобы две плоскости были параллельными или совпадающими, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных в уравнениях плоскостей были пропорциональны; условием совпадения плоскостей является пропорциональность всех коэффициентов:</u>

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \qquad \textbf{(3.6.5)}$$

чтобы плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы имело место отрицание условия (3.6.3):

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \vee \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \vee \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \qquad \textbf{(3.6.6)}$$

Пример 1. Через точку А(-3, 2, 1) проведена плоскость, параллельная плоскости $x-2y+3z-1=0$. Найдите ее уравнение.

Решение. Первый способ. В силу параллельности плоскостей нормальный вектор данной плоскости α есть в то же время нормальный вектор плоскости $\beta: \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} = (1,-2,3)$. Поэтому уравнение плоскости β можно найти по точке А и нормальному вектору (формула (3.4.1)): $1\cdot(x+3)-2(y-2)+3(z-1)=0$ или $\beta: x-2y+3z+4=0$.

Второй способ. В силу условия параллельности плоскостей (3.6.3) уравнение искомой плоскости имеет вид $\beta: x-2y+3z+d=0$. Неизвестный коэффициент d можно определить из условия $A\in\beta: -3-2\cdot 2+3\cdot 1+d=0$, откуда d = 4, и мы получаем $\beta: x-2y+3z+4=0$.

Пример 2. Через точки А(3, 2, -2) и В(0, 1, 1) проведена плоскость перпендикулярно плоскости $x+y+z=0$. Найдите ее уравнение.

Этот пример уже решен двумя способами в §1. Здесь приводится решение, в котором используется условие перпендикулярности плоскостей.

Решение. Если уравнение искомой плоскости β записать в общем виде $ax+by+cz+d=0$, то из условия получаются три уравнения относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} A\in\beta &\Rightarrow 3a+2b-2c+d=0 \\ B\in\beta &\Rightarrow \quad\ \ b+\ c+d=0. \\ \beta\perp\alpha &\Rightarrow a+b+c \qquad\ =0 \end{aligned}$$

В полученной системе линейных однородных уравнений число неизвестных на 1 больше числа уравнений. В этом случае все неизвестные выражаются через одно из них.

Из второго и третьего уравнения $a=d$. Исключаем $d: \begin{cases} 3a+2b-2c+a=0 \\ a+b+c \qquad =0 \end{cases}$, или $\begin{cases} 2a+b-c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$. Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем $a-2c=0$ или $a=2c$. Далее находим: $b=-3c$. Итак, уравнение искомой плоскости имеет вид $2cx-3cy+cz+2c=0$ или $\beta: 2x-3y+z+2=0$.

§ 7 Расстояние от точки до плоскости

Задача. Найти расстояние от точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\alpha: ax+by+cz+d=0$.

Решение. Расстояние h от точки А до плоскости - это длина перпендикуляра AD, опущенного из точки на плоскость: h = AD. Нормальный вектор $\vec{n}(a,b,c)$ данной плоскости тоже перпендикулярен ей, поэтому $\vec{n}\parallel\overrightarrow{AD}$. Следовательно, угол φ между этими векторами равен либо 0 (при сонаправленности векторов), либо π (при противоположной направленности); на рис. 6.14 показан второй случай.

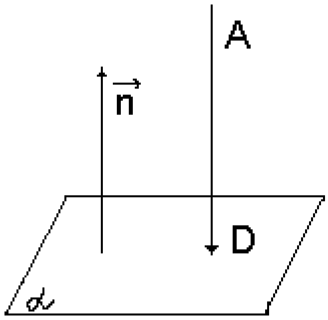


рис. 6.14

Вычислим скалярное произведение $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}$ двумя способами. По определению скалярного произведения $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot h\cdot(\pm1)$.

Далее. Обозначив координаты точки D через x_1, y_1, z_1, имеем $\overrightarrow{AD}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ и по формуле (5.2.3) получаем: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)=$ $=(ax_1+by_1+cz_1)-(ax_2+by_2+cz_2)$. Но $D\in\alpha$, поэтому $ax_1+by_1+cz_1+d=0$ и, следовательно $ax_1+by_1+cz_1=-d$.

С учетом этого $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-(ax_0+by_0+cz_0+d)$. Приравниваем оба значения скалярного произведения: $\pm h\sqrt{a^2+b^2+c^2}=-(ax_0+by_0+cz_0+d)$, откуда $h=\mp\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Но так как $h\geq0$, то из двух значений надо брать неотрицательное:

$$h=\frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \textbf{(3.7.1)}$$

Вывод: расстояние от точки до плоскости равно дроби; в числителе которой стоит абсолютная величина того значения, которое принимает левая часть общего уравнения данной плоскости, если в нее вместо текущих координат подставить координаты данной точки, а в знаменателе – корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при текущих координатах.

Примечание. В планиметрии аналогичную задачу – найти расстояние от точки до прямой – мы решали. Там мы воспользовались другим способом, который можно было бы применить и здесь: найти уравнение прямой AD, затем – D как точку пересечения плоскости с прямой. Тогда искомое расстояние мы нашли бы как расстояние между двумя точками. Но для этого нужно было предварительно рассмотреть уравнение прямой в пространстве. Заметим также, что и в § 3.4 можно было применить более экономический способ этого параграфа.

Пример. Дан тетраэдр с вершинами A(-4, 5, 3), B(-3, 2, 1), C(-2, 1, 3), D(-1, 3, 2). Найдите длину его высоты, опущенной из вершины A.

Эта задача уже решалась с применением векторного и смешанного произведений векторов.

Решение. Находим уравнение плоскости BCD по точке B и направляющим векторам $\overrightarrow{BC}(-1,1,-2)$ и $\overrightarrow{BD}(2,1,1)$: $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. После упрощений получаем $x-y-z+6=0$. Теперь по формуле (3.7.1) находим длину высоты как расстояние от точки A до плоскости основания: $h=\dfrac{|-4-5-3+6|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.