Лекция 1
Механика. Движение материальной точки. Скорость и ускорение произвольно движущейся точки

Механика – это наука о механическом движении тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Кинематика – раздел механики, который рассматривает лишь само перемещение тел в зависимости от времени.

Наиболее просто описать поведение тела, если можно приять это тело за материальную точку. **Материальной точкой** называют тело, размерами которого можно пренебречь в рассматриваемой задаче. Для определения положения тела в пространстве используют понятие **системы отсчета**: включающая тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор (часы) для измерения времени (рис. 1.1).

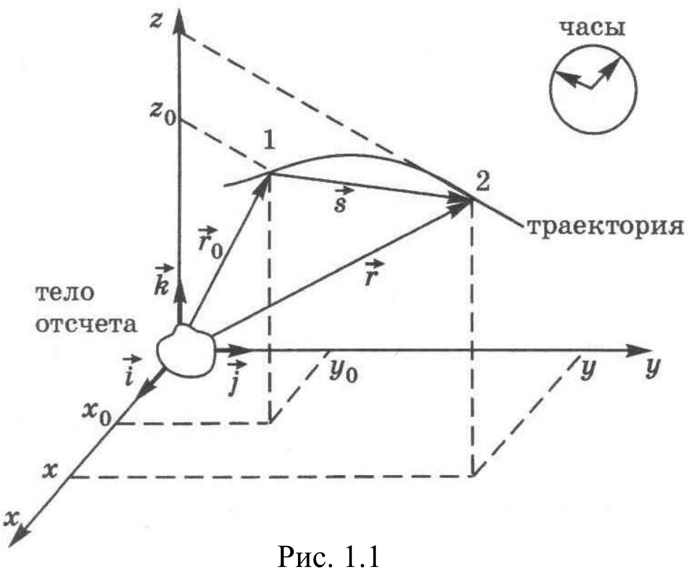

Рис. 1.1

Положение тела в пространстве задается либо с помощью **радиус-вектора** $\vec{r}$, проведенного из начала координат в рассматриваемую точку (для точек 1 и 2 на рис. 1.1 это векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$), либо с помощью координат x, y, z – проекций вектора $\vec{r}$ на координатные оси:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

(1.1)

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - векторы, указывающие направление осей ***Ox, Oy, Oz*** и равные по модулю.

Вектор $\vec{S}$,соединяющий начальное и конечное положение тела (точки 1 и 2 на рис. 1.1), называют **перемещением.** Модуль перемещения меньше или равен пути *l* – расстоянию, пройденному телом по траектории; они равны в случае прямолинейного движения в одну сторону.

Для определения быстроты движения тела вводят понятие **мгновенной скорости** $\vec{v}$ тела в данной точке траектории, равной первой производной от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени *t* (см. приложение 2):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.2)$$

Вектор $\vec{v}$ в каждой точке траектории пространства направлен по касательной к ней (рис. 1.2).

Часто используют понятие **средняя путевая скорость** $v_{\text{ср}}$– скалярная физическая величина, равная отношению пути *l*, пройденного телом за время *t*, к этому времени *t*.

Быстроту изменения скорости определяют, введя понятие **мгновенного ускорения** $\vec{a}$ – ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости $\vec{v}$ по времени *t*:

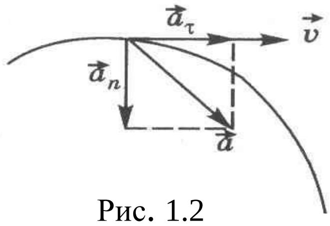

Рис. 1.2

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.3)$$

Проекцию вектора ускорения $\vec{a}$ на направление касательной к траектории называют **касательным (тангенциальным**) ускорением $\vec{a}_\tau$, а на направление, перпендикулярное к касательной, – **нормальным (центростремительным)** ускорением $\vec{a}_n$ (см. рис. 1.2):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{R}, \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad (1.4)$$

где *v* – числовое значение скорости; *R* – радиус кривизны траектории в данной ее точке, он равен радиусу окружности *R* , вписанный в малый участок траектории вблизи этой точки.

Касательное ускорение характеризует изменение скорости тела по ее числовой величине (по модулю скорости), а нормальное ускорение – по направлению.

Приведем вывод формул для ускорений a_τ и a_n . Для этого возьмем на траектории движения две близко расположенные точки 1 и 2, разделенные интервалом времени Δ*t* (рис. 1.3).

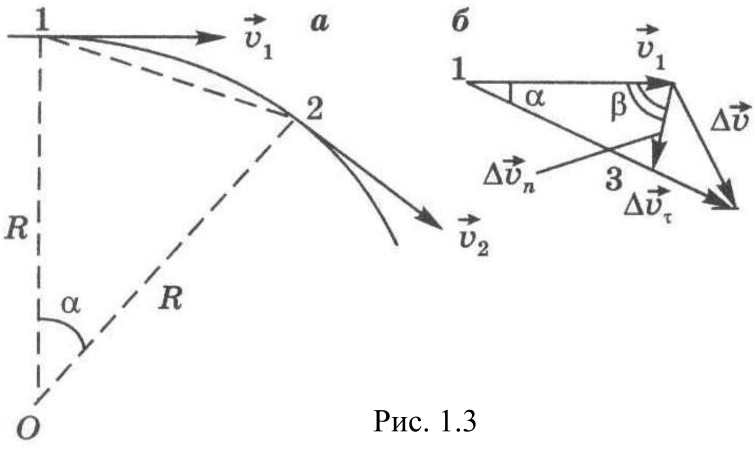

Рис. 1.3

Перенесем вектор $\vec{v}_2$ параллельно самому себе и отложим на нем отрезок, равный по модулю вектору $\vec{v}_1$. Тогда вектор $\Delta\vec{v}$ можно представить в виде суммы двух векторов $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$. При $\Delta t \to 0$ углы α и β стремятся соответственно к 0^0 и 90^0, поэтому вектор $d\vec{v}_\tau$, направленный по касательной к траектории, будет характеризовать изменение числового значения скорости, а вектор $d\vec{v}_n$ будет перпендикулярен к $\vec{v}_1$.

Следовательно,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}, \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \qquad (1.5)$$

Длина дуги и расстояние по прямой между точками 1 и 2 (рис. 1.3а) при малых $\Delta t \to dt$ будут равны $dl_{1,2} = dS_{1,2} = vdt$. Из подобия треугольников Δ1*0*2 (рис. 1.3а) и $\Delta 1 v_1 3$ (рис. 1.3б) следует

$$\frac{dv_n}{v} = \frac{vdt}{R}, a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{R}.$$

1.2. Кинематика вращательного движения

Пусть м. т. движется со скоростью $\vec{v}$ по окружности радиуса r вокруг неподвижной оси вращения (рис.1.4а). Положение точки на окружности определяет радиус-вектор $\vec{r}$, а вектор его элементарного приращения $d\vec{r}$ направлен по касательной к окружности. Введем понятие **вектора элементарного углового перемещения** $d\vec{\varphi}$: он равен по модулю углу элементарного поворота $d\varphi$, направлен по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика, а именно: направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения материальной точки, тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора $d\vec{\varphi}$ (рис. 1.4а).

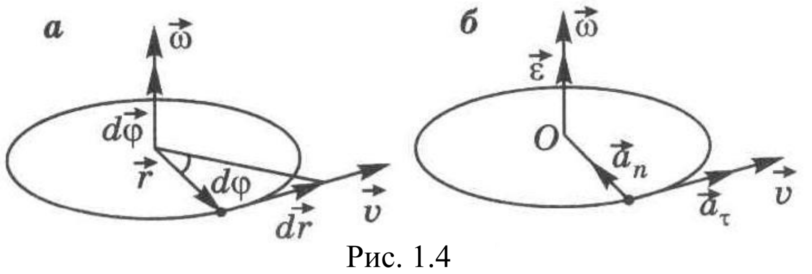

Рис. 1.4

Быстроту вращения м. т. характеризует **угловая скорость** $\vec{\omega}$, равная первой производной от вектора углового перемещения $\vec{\varphi}$ по времени t:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.6)$$

Направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектора элементарного углового перемещения $d\vec{\varphi}$ совпадают.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует **вектор углового ускорения** $\vec{\varepsilon}$, равный первой производной от угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени *t*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.7)$$

Кроме перечисленных выше величин, для описания вращательного движения тела используют **частоту вращения *n***, определяемую как число оборотов, совершенных телом за единицу времени, и **период обращения *T*,** как время одного полного оборота. Справедлива следующая взаимосвязь *ω, n* и *T*:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T. \qquad (1.8)$$

Установим взаимосвязь линейных $(\vec{v}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n)$ и угловых $(\vec{\omega}, \vec{\varepsilon})$ характеристик при вращательном движении.

Пользуясь определением векторного произведения двух векторов и рис. 1.4а, можно записать

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \qquad (1.9)$$

Выражение (1.9) позволяет получить следующие формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик:

1) для скоростей $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi} \times \vec{r}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}];$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]; \ \mathrm{v} = \omega \mathrm{r}. \qquad (1.10)$$

2) для ускорений $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]; \ a_{\tau =} \varepsilon r, \qquad (1.11)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}], \ a_n = \omega v = v^2/r = \omega^2 r. \qquad (1.12)$$